This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

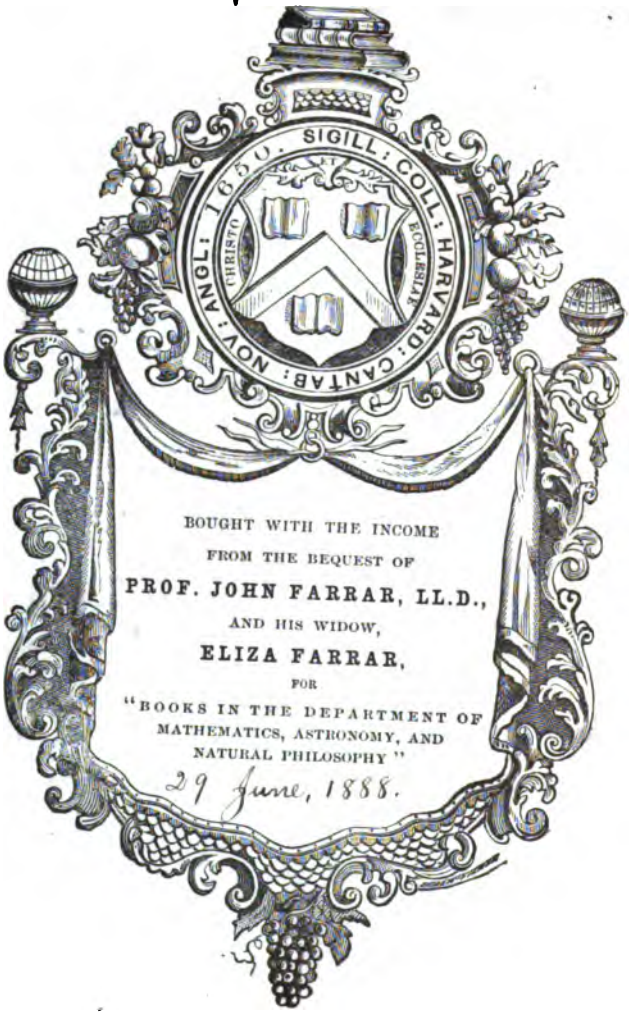
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

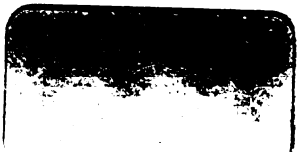
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

LSoc386.4

Bd. Sept. 1888.



BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
29 June, 1888.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

EINUNDNEUNZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

XCI. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1885. — HEFT I BIS V.

(Mit 19 Tafeln, 1 Karte und 12 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

~~743.18~~
LSoc 386.4

1888, June 29.
Farrar fund.

INHALT.

Seite

I. Sitzung vom 8. Jänner 1885: Übersicht 3

II. Sitzung vom 15. Jänner 1885: Übersicht 7

Gegenbauer, Über das Legendre-Jacobi'sche Symbol. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 11

v. Ebner, Über den Unterschied krystallinischer und anderer anisotroper Structuren. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] . . . 34

Kalmann u. *Smolka*, Über eine neue Methode zur Bestimmung des Mangans in Spiegeleisen, Ferromanganen und den wichtigsten Erzen 49

III. Sitzung vom 22. Jänner 1885: Übersicht 59

Czeczetka, Zur Ausführung der Stickstoffbestimmung nach Kjeldahl 63

Maly, Analyse des Andesins von Trifail in Steiermark . . . 65

Emich, Zur Selbstreinigung natürlicher Wässer 67

Haitinger, Über die Dehydracetsäure 85

Glaser, Die Sternkunde der südarabischen Kabylen. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 89

Study, Über die Massbestimmung extensiver Grössen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 100

Pick, Zur Lehre von den Modulargleichungen der elliptischen Functionen. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 138

IV. Sitzung vom 5. Februar 1885: Übersicht 153

Maly, Untersuchungen über die Oxydation des Eiweisses mittelst Kaliumpermanganat. (Preisgekrönte Abhandlung.) 157

Janovsky, Über die Reductionsproducte der Nitroazokörper und über Azonitrolsäuren. (Mit 3 Holzschnitten.) . . . 207

Exner, K., Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 218

Simony, Über zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen. [Preis: 80 kr. = 1 RMk. 60 Pfg.] 223

Seite

V. Sitzung vom 12. Februar 1885: Übersicht 329

Gegenbauer, Über den grössten gemeinschaftlichen Divisor. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 333

Herz, Entwicklung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalien in independenter Form. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 344

Schreder, Über die Constitution der Isuvitinsäure. 390

VI. Sitzung vom 5. März 1885: Übersicht 397

Hann, Die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer. II. Theil. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 403

Liznar, Über den täglichen und jährlichen Gang sowie über die Störungsperioden der magnetischen Declination zu Wien. (Mit 3 Tafeln.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 454

Bobek, Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene. (I., II., III.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] . . 476

Mertens, Die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraëders zweier Flächen II. Ordnung schneidenden Geraden besteht. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 519

Pitsch, Über die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 527

Kachler u. *Spitzer*, Über Camphoronsäure 553

Smolka, Über Mannit-Bleinitrat 575

— Notiz über das Löwe'sche Drittelbleinitrat und das Morawski'sche Pentaplumbotrinitrat. 581

VII. Sitzung vom 12. März 1885: Übersicht 584

Weiss, Notiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 587

VIII. Sitzung vom 19. März 1885: Übersicht 597

Gegenbauer, Über die Divisoren der ganzen Zahlen. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 600

Mertens, Über eine Formel der Determinantentheorie [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 622

— Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat . 637

v. Hepperger, Über die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgange eines Strahlenbüschels monochromatischen Lichtes durch ein Prisma mit gerader Durchsicht. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 640

v. Wroblewski, Über den Gebrauch des siedenden Sauerstoffs, Stickstoffs, Kohlenoxyds, sowie der atmosphärischen Luft als Kältemittel. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 667

Seite

Klemenčič, Experimentaluntersuchung über die Dielektricitätsconstante einiger Gase und Dämpfe. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 712

r. *Ebner*, Die Lösungsflächen des Kalkspathes und des Aragonites. II. Die Ätzfiguren des Kalkspathes. III. Die Lösungsflächen des Aragonites. (Mit 6 Tafeln.) [Preis: 2 fl. = 4 RMk. 760

IX. Sitzung vom 16. April 1885: Übersicht 839

r. *Lang*, Messung der elektromotorischen Kraft des elektrischen Lichtbogens. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 844

Exner, F., Über eine neue Methode zur Bestimmung der Grösse der Moleküle. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 850

Aulinger, Über das Verhältniss der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu dem von Hertz aufgestellten Princip der Einheit der elektrischen Kräfte. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.) 880

Oppert, Die astronomischen Angaben der assyrischen Keilinschriften. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 894

X. Sitzung vom 23. April 1885: Übersicht 915

Haitinger u. *Lieben*, Untersuchungen über Chelidonsäure. — II. Abhandlung. (Mit 1 Tabelle.) 919

Gläser, Über die Einwirkung des Kaliumhypermanganats auf unterschwefeligsaures Natron 969

Mertens, Zur Theorie der elliptischen Functionen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 974

Le Paige, Über die Hesse'sche Fläche der Flächen dritter Ordnung. [Preis: 8 kr. = 16 Pfg.] 981

Mahler, Astronomische Untersuchung über die in der Bibel erwähnte ägyptische Finsterniss. (Mit 1 Karte.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 987

Czermak u. *Hiecke*, Pendelversuche. (Mit 6 Tafeln.) [Preis: 1 fl. 20 kr. = 2 RMk. 40 Pfg.] 1002

XI. Sitzung vom 7. Mai 1885: Übersicht 1015

Linnemann, Verarbeitung und qualitative Zusammensetzung des Zirkons. (Mit 2 Holzschnitten.) 1019

Zikes, Über die Chlorhydrine des Butenylglycerins 1032

Horbaczewski, Über künstliche Harnsäure und Methylharnsäure. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1040

Gegenbauer, Über die ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 1047

Lippich, Über polaristrobometrische Methoden, insbesondere über Halbschattenapparate. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 1059

Seite

Eder, Spectrographische Untersuchung von Normal-Lichtquellen und die Brauchbarkeit der letzteren zu photochemischen Messungen der Lichtempfindlichkeit. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1097

XII. Sitzung vom 15. Mai 1885: Übersicht 1103

Linnemann, Das Oxydationsproduct des Propylenoxydes durch Silberoxyd. 1107

Goldschmiedt, Untersuchungen über Papaverin. I. Abhandlung 1110

Vortmann, Beiträge zur Kenntniss der Kobaltammoniumverbindungen 1142

Zehden, Rationelle Verwerthung nicht steuerbarer Winkelunterschiede bei Kursbestimmungen zur See. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1184

Gegenbauer, Arithmetische Notiz. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . 1194

HARVARD COLLEGE
JUN 29 1888
LIBRARY.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. BAND. I. und II. HEFT.

Jahrgang 1885. — Jänner und Februar.

(Mit 3 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

INHALT

des 1. und 2. Heftes Jänner und Februar 1885 des XCI. Bandes II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

I. Sitzung vom 8. Jänner 1885: Übersicht 3

II. Sitzung vom 15. Jänner 1885: Übersicht 7

Gegenbauer, Über das Legendre-Jacobi'sche Symbol. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 11

v. Ebner, Über den Unterschied krystallinischer und anderer anisotroper Structuren. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] . . . 34

Kalmann u. *Smolka*, Über eine neue Methode zur Bestimmung des Mangans in Spiegeleisen, Ferromanganen und den wichtigsten Erzen 49

III. Sitzung vom 22. Jänner 1885: Übersicht 59

Czeczetka, Zur Ausführung der Stickstoffbestimmung nach Kjeldahl 63

Maly, Analyse des Andesins von Trifail in Steiermark . . . 65

Emich, Zur Selbstreinigung natürlicher Wässer 67

Haitinger, Über die Dehydracetsäure 85

Glaser, Die Sternkunde der südarabischen Kabylen. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 89

Study, Über die Massbestimmung extensiver Grössen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 100

Pick, Zur Lehre von den Modulargleichungen der elliptischen Functionen. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 138

IV. Sitzung vom 5. Februar 1885: Übersicht 153

Maly, Untersuchungen über die Oxydation des Eiweisses mittelst Kaliumpermanganat 157

Janovsky, Über die Reductionsproducte der Nitroazokörper und über Azonitrolsäuren. (Mit 3 Holzschnitten.) . . . 207

Exner, K., Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 218

Simony, Über zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen. [Preis: 80 kr. = 1 RMk. 60 Pfg.] 223

V. Sitzung vom 12. Februar 1885: Übersicht 329

Gegenbauer, Über den grössten gemeinschaftlichen Divisor. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 333

Herz, Entwicklung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalien in independenter Form. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 344

Schreder, Über die Constitution der Isuvitinsäure. 390

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 75 kr. = 5 RMk. 50 Pfg.

H 63/52-9

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. Band. I. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

I. SITZUNG VOM 8. JÄNNER 1885.

In Verhinderung des Secretärs der Classe übernimmt Herr Regierungsrath Ritter v. Oppolzer dessen Functionen.

Der Vorstand des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins dankt für die Completirung der Vereinsbibliothek mit den älteren Jahrgängen der akademischen Sitzungsberichte.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Constantin Freiherr v. Ettingshausen übersendet eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt: „Die fossile Flora von Sagor in Krain", III. Theil und Schluss.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet eine in seinem Institute ausgeführte Experimentaluntersuchung unter dem Titel: „Pendelversuche," von den Herren Paul Czermak und Richard Hiecke.

Der Secretär-Stellvertreter legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Georg Pick, Privatdocent an der deutschen Universität in Prag: „Zur Lehre von den Modulargleichungen der elliptischen Functionen" vor.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. v. Waltenhofen in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität hinsichtlich einer neuen Construction der Elektromagnete für Dynamomaschinen.

Der Secretär-Stellvertreter legt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität von dem k. k. Linien-Schiffslieutenant Herrn Heinrich v. Benigni in Wien vor, welches angeblich die Beschreibung und Zeichnung einer vom Einsender gemachten Erfindung enthält.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bulletin. 53e année, 3e série, tome VIII. Nos. 9—10. Bruxelles, 1884; 8°.

— de Médecine: Bulletin. 48e année, 2e série, tome XIII. Nos. 44—53. Paris, 1884; 8°.

— royale de Copenhague: Mémoires, Vol. I, Nr. 9. Kjøbenhavn, 1884; 4°. — Vol. II. Nr. 6. Kjøbenhavn, 1884; 4°.

Academy, the Connecticut of arts and sciences: Transactions. Vol. VI, part. I. New. Haven, 1884; 8°.

Accademia, royale Virgiliana di Mantova. Atti e Memorie. Biennio 1882 e 1883 — 1883 e 1884. Montova, 1884; 8°.

Apotheker-Verein, allgemeiner österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXII. Jahrgang Nr. 36. Wien, 1884; 8°.

— — XXIII. Jahrgang Nr. 1. Wien, 1885; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VIII, Nr. 96 bis 99. Cöthen, 1884; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIX. 2e semestre. Nrs. 23—25. Paris, 1884; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. V. Jahrgang. 1884. Heft XII. December. Berlin, 1884; 4°.

Freiburg i. B., Universität: Akademische Schriften pro 1883—1884. 65 Stücke; 8°.

Genootschap, het bataviaasch van Kunsten en Wetenschappen: Verhandelingen. Deel. XLIV. 's Gravenhage, 1884; gr. 4°.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Wochenschrift. XLV. Jahrgang Nr. 50 & 51. Wien, 1884; 4°. — XLVI. Jahrgang Nr. 1. Wien, 1885; 4°.

Hamburgische wissenschaftliche Anstalten: Jahrbuch. I. Jahrgang. Hamburg, 1884; 8°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift, IX. Jahrgang, Nr. 50—52. Wien, 1884; 4°. — X. Jahrgang Nr. 1. Wien, 1885; 4°.

Institut, koninklijk voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie: Bydragen. Deel. IX. 'sGravenhage, 1885; 8°. — Achtste Deel. — 3e Stuk. 'sGravenhage, 1884; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXX. Band. Nr. 15 & 16. Leipzig, 1884; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. von Dr. A. Petermann. 30. Band XII und Ergänzungsheft Nr. 76. Gotha 1884.; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 3e série, tome XV, 517e livraison. Janvier 1885. Paris; 4°.

Musée Teyler: Archives. Série II, Vol. II. 1re partie. Harlem, Paris, Leipsic, 1884; 4°.

Museum of comparative Zoölogy at Harvard College: Memoirs. Vol. IX, Nr. 3. Cambridge, 1884; 4°.

Nature. Vol. XXXI. Nrs. 790—792. London, 1884—1885; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen, Nr. 16. Wien, 1884; 8°.

Repertorium der Physik. XX. Band, 12. Heft. München und Leipzig, 1884; 8°.

Simony, O. Dr.: Neue topologische Thatsachen. Wien, 1883; 8°.

Société Hollandaise des sciences à Harlem. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XVIII, 5e livraison. Harlem, 1883; 8°. — Tome XIX, 3e livraison. Harlem, 1884; 8°.

Society of Chemical Industry: The Journal. Vol. III. Nr. 10 & 11. Manchester, 1884; 8°.

— the royal astronomical: Monthly Notices. Vol. XLV. Nr. 1. November 1884 London; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. VI, Nr. 12. December, London, 1884; 8°.

— the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. IV. Part 6. December, London 1884; 8°.

Vereeniging, Nederlandsche dierkundige: Tijdschrift. Supplement Deel I, Aflevering II. Leiden, 1883—1884; 8°.

— koninklijke natuurkundige in Nederlandsch-Indie. Natuurkundige Tijdschrift, Deel XLIII. 8e serie, Deel IV. Batavia, 's Gravenhage, 1884; 8°.

Verein der Ärzte in Steiermark. Mittheilungen. XX. Vereinsjahr 1883. Graz, 1884; 8°.

— entomologischer in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XXVIII. Band, 2. Heft. Berlin, 1884; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher in Hamburg: Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. VIII. Bd., 1.—3. Hft. Hamburg, 1884; 4°.

— — Über einige afrikanische Reptilien, Amphibien und Fische des naturhistorischen Museums von Dr. J. G. Fischer, Hamburg, 1884; 8°.

— — Naturhistorisches Museum zu Hamburg: Bericht. Hamburg 1884; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIV. Jahrgang. Nr. 50—52. Wien, 1884; 4°. — XXXV. Jahrgang. Nr. 1. Wien, 1885; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien. Monatsblätter. VI. Jahrgang, Nr. 3 und ausserordentliche Beilage Nr. 1. Wien, 1884; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. IV. Jahrgang. Nr. 12 — und V. Jahrgang, Nr. 1, Berlin, 1884—1885; 4°.

II. SITZUNG VOM 15. JÄNNER 1885.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die Akademie und speciell diese Classe durch das am 9. Jänner d. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath und Professor Dr. Friedrich Ritter v. Stein in Prag erlitten hat.

Die Anwesenden geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Die königl. Akademie der Wissenschaften zu Turin übermittelt das Programm für den fünften Bressa'schen Preis von 12000 Lire.

Das c. M. Herr Prof. V. v. Ebner in Graz übersendet eine Abhandlung: „Über den Unterschied krystallinischer und anderer anisotroper Structuren."

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über das Legendre-Jacobi'sche Symbol",

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn E. v. Taund-Szyll, Gutsbesitzer zu Fraunegg (bei Graz) vor, welches die Aufschrift trägt: „v. Taund's neuartiges System der Kabeltelegraphie für lange Kabellinien, Differential-Recorder genannt."

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der Staatsgewerbeschule in Bielitz: „Über eine neue Methode zur Bestimmung des Mangans in Spiegeleisen, Ferromanganen und den wichtigsten Erzen" von den Herren Wilhelm Kalmann und Alois Smolka.

Herr Josef Schlesinger, o. ö. Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien, überreicht nach gehaltenem

Vortrage eine Abhandlung unter dem Titel: „Über die Nothwendigkeit der Aufstellung eines neuen Kraftbegriffes.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Annales, Tomo XXI. Entrega 239—244. Habana, 1884; 8°.

— nacional de ciencias en Córdoba: Boletin. Tomo VI. Entrega 2ª y 3ª. Buenos Aires, 1884; 8°.

Académie, royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 53e année, 3e série, tome 8. Nr. 11. Bruxelles, 1884; 8°.

Academy of natural sciences of Philadelphia: Proceedings, Part II. May—October, 1884. Philadelphia, 1884; 8°.

Accademia reale di scienze, lettere e belle arti di Palermo: Atti. N. S. Volume VIII. Palermo, 1884; 4°.

— R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXXI. 1883—84. Serie terza. Transunti. Volume VIII. Fascicolo 16° ed ultimo. Roma, 1884; 4°.

— Pontificia de'Nuovi Lincei: Atti. Anno XXXVI. Sessione Vª, VIª e VIIª. Roma, 1884; 4°.

Ackerbau-Ministerium, k. k.: Statistisches Jahrbuch für 1883. 3. Heft: Der Bergwerksbetrieb Oesterreichs im Jahre 1883. 2. Lieferung. Wien, 1884; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königlich schwedische: Öfversigt af Förhandlingar. 41: Årg. Nr. 2 o. 3. und 4. Stockholm, 1884; 8°.

— — Bihang. VIII. Band, 2. Heft. Stockholm. 1884; 8°.

— — Handlingar. Ny Föld. 9. Delen. Stockholm, 1884; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 4e année, 6e série, 10e cahier. Paris, 1884; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österreich.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXIII. Jahrgang. Nr. 2. Wien, 1885; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik. Zweite Reihe. I. Theil, 4. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

Bern, Universität: Akademische Schriften pro 1883. 58 Stück; 4° und 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période. Tome XII. Nr. 11. Genève, Lausanne, Paris, 1884; 8°.

Chemiker-Zeitung: Centralorgan. Jahrg. VIII, Nr. 100—104. Cöthen, 1884; 4°.

Comité géologique: Mémoires. Vol. I. No. 3. St. Pétersbourg, 1884; Folio.

Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel: Vierter Bericht für die Jahre 1877 bis 1881. VII. bis XI. Jahrgang. III. Abtheilung. (Schluss.) Berlin, 1884; Folio.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCIX. 2e semestre. No. 26. Paris, 1884; 4°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. XX. Band. Jänner-Heft. Wien, 1885; 8°.

— physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XVI, Nr. 8 und 9. St. Petersburg, 1884; 8°.

— für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. XXIV. Vereinsjahr, 1884. Salzburg; 8°.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. XII, Nr. 7 bis 12. Pola, 1884; 8°.

Jannettaz, Ed.: Les Roches. Description et Analyse au microscope de leurs éléments minéralogiques et de leur structure, Gisements-Emplois. Paris, 1884; 12°.

Johns Hopkins University: Studies from the biological laboratory. Vol. III. Nr. 2. Baltimore, 1884; 8°.

Kiew, Universität. Universitäts-Nachrichten. XXIV. Jahrgang. Nr. 7 und 8. Kiew, 1884; 8°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1884. Heft 5—8. Pola, 1884; 8°.

Meunier, Stanislas: Traité de Paléontologie pratique, Gisements et Description des animaux et des Végétaux fossiles de la France. Strassbourg, Paris; 12°.

Museum of comparative Zoölogy at Harvard College: Annual Report of the Curator for 1883—84. Cambridge, 1884; 8°.

Nature. Vol. XXXI. No. 793. London, 1885; 8°.

Observatory, the royal at Greenwich: The nautical Almanac and astronomical Ephemeries for the year 1888. London, 1884; 8°.

Società, J. R. agraria di Gorizia: Atti e Memorie. Anno XXIII. Nuova Serie. Nrs. 7—12. Gorizia, 1884; 8°.

— Italiana di Antropologia, etnologia e psicologia comparata; Archivio. Vol. XIV, fascicolo 2°. Firenze, 1884; 8°.

Societas entomologica rossica: Horae. Tom. XVII. 1882. St. Petersburg, 1882—1883; 8°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4ᵉ série, 37ᵉ année, 10ᵉ cahier. Paris, 1884; 8°

Society, the royal physical: Proceedings. Session 1883—84. Edinburgh, 1884; 8°.

— the royal of New South Wales: Journal and Proceedings. Vol. XVI. Sydney, 1883; 8°.

Verein, entomologischer in Stockholm: Entomologisk Tidskrift. Stockholm, 1884; 8°.

— militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ. XXIX. Bd., 3. Heft. 1884. Wien; 8°.

Über das Legendre-Jacobi'sche Symbol.

Von dem c. M. Leopold Gegenbauer.

Ich werde in den folgenden Zeilen einige Sätze über das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol ableiten und eine Regel zur Bestimmung dieses Zeichens angeben.

Sind m und n zwei positive ungerade, theilerfremde Zahlen, so besteht, wie ich unlängst gezeigt habe („Über das quadratische Reciprocitätsgesetz." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch - naturwissenschaftliche Classe XC. Band, II. Abtheilung), folgende Relation:

$$1)\quad \left(\frac{m}{2rm\pm n}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]-\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]} \qquad (n\leqq 2m-1).$$

Der grösste Werth, welchen $\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]$ im Exponenten von -1 annehmen kann, ist, wie man sofort ersieht:

$$\frac{m-1}{2}+\left[\frac{1}{2}-\frac{m}{2(2rm\pm n)}\right]$$

während die Werthe von $\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]$ die ganze Zahl:

$$\frac{m-1}{2}+\left[1-\frac{m}{2(2rm\pm n)}\right]$$

nicht übersteigen.

Es soll zunächst, falls n mit dem positiven Vorzeichen versehen ist, $r>0$ oder $r=0$ und zugleich $n>m$ sein, ist aber n mit dem negativen Vorzeichen behaftet, so soll entweder $r>1$

oder $r=1$ und gleichzeitig $n<m$ sein. Alsdann sind die zwei eben angegebenen ganzen Zahlen gleich $\frac{m-1}{2}$.

Nun ist:

$$\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]=\lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$2(\lambda+1)r\pm\frac{(\lambda+1)n}{m}>x\geqq 2\lambda r\pm\frac{\lambda n}{m}$$

genügt, und daher ist die Anzahl derjenigen Glieder der zweiten Summe im Exponenten von -1, welche den Werth λ besitzen, für $\lambda<\frac{m-1}{2}$:

$$2r\pm\left[\frac{(\lambda+1)n}{m}\right]\mp\left[\frac{\lambda n}{m}\right]$$

da:

$$[-\alpha]=-1-[\alpha]$$

ist, während diese Anzahl für $\lambda=\frac{m-1}{2}$ den Werth:

$$r+\frac{\pm n+1}{2}\mp\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{2m}\right]$$

erhält.

Es ist daher:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]\equiv\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{\pm n+1}{2}-\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{2m}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{m-3}{2}}\lambda\left\{\left[\frac{(\lambda+1)n}{m}\right]-\left[\frac{\lambda n}{m}\right]\right\}\ (\text{mod. }2).$$

Nun ist aber:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{m-3}{2}}\lambda\left\{\left[\frac{(\lambda+1)n}{m}\right]-\left[\frac{\lambda n}{m}\right]\right\}=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}\right]+\frac{m-1}{2}\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{2m}\right]$$

und daher auch:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}\right]\equiv-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}\right]+\frac{m-1}{2}\cdot\left\{r+\frac{\pm n+1}{2}\right\}\ (\mathrm{mod.}\,2).$$

Es ist ferner:

$$\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]=\lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$(2\lambda+1)r\pm\frac{(2\lambda+1)n}{2m}>x\geqq(2\lambda-1)r\pm\frac{(2\lambda-1)n}{2m}$$

genügt, und daher ist die Anzahl derjenigen Glieder der ersten Summe im Exponenten von -1, welche gleich λ sind:

$$2r\pm\left[\frac{\lambda n}{m}+\frac{n}{2m}\right]\mp\left[\frac{\lambda n}{m}-\frac{n}{2m}\right]$$

für $\lambda<\frac{m-1}{2}$, während sie für $\lambda=\frac{m-1}{2}$:

$$2r+\frac{\pm n+1}{2}-\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{m}\right]$$

beträgt.

Es ist also:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]\equiv\frac{m-1}{2}\left\{\frac{\pm n+1}{2}-\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{m}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-3}{2}}x\left\{\left[\frac{xn}{m}+\frac{n}{2m}\right]-\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]\right\}\ (\mathrm{mod.}\,2).$$

Nun hat man:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-3}{2}}x\left\{\left[\frac{xn}{m}+\frac{n}{2m}\right]-\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]\right\}=$$

$$=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]+\frac{m-1}{2}\left[\frac{n}{2}-\frac{n}{m}\right]$$

und daher:

$$\sum_{x=1}^{x=rm+\frac{\pm n-1}{2}}\left[\frac{xm}{2rm\pm n}+\frac{1}{2}\right]\equiv-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{\pm n+1}{2}\pmod 2$$

Man hat demnach unter den gemachten Voraussetzungen:

$$2)\qquad \left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}r-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}\right]+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}-\frac{n}{2m}\right]}.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Gleichung auch dann noch bestehen bleibt, wenn die über die Grösse von r und n gemachten beschränkenden Annahmen fallen gelassen werden.

Wenn man sich des quadratischen Reciprocitätsgesetzes bedienen will, so kann man die Gleichung 2) kürzer in folgender Weise ableiten. Nach dem quadratischen Reciprocitätsgesetze ist:

$$\left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{\pm n-1}{2}\right\}}\left(\frac{2rm\pm n}{m}\right)$$

oder, weil:

$$\left(\frac{sm\pm n}{m}\right)=\left(\frac{\pm n}{m}\right)$$

ist:

$$\left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{\pm n-1}{2}\right\}}\left(\frac{\pm n}{m}\right)$$

welche Gleichung sich mit Hilfe der Formel:

$$\left(\frac{-n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right)$$

in die folgende verwandeln lässt:

$$\left(\frac{m}{2rm\pm n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\left\{r+\frac{n-1}{2}\right\}}\left(\frac{n}{m}\right).$$

Es besteht aber, wie ich a. a. O. gezeigt habe, die Relation:

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{(n+1)(m-1)}{4}+s}$$

wo s die Anzahl derjenigen Zahlen λ der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}$ bezeichnet, für welche der in $\frac{\lambda n}{m}$ enthaltene Bruchrest grösser als $\frac{n-1}{2m}$ wird.

Man hat daher:

$$\left(\frac{m}{2rm \pm n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r+1)+s}$$

oder, wenn σ die Anzahl derjenigen Zahlen λ bezeichnet, für welche der betreffende Bruchrest nicht grösser als $\frac{n-1}{2m}$ wird:

3) $$\left(\frac{m}{2rm \pm n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}r+\sigma} ,$$

wo, wie ich gezeigt habe:

4) $$\sigma = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} - \frac{n}{2m}\right]$$

ist.

Die Formel 3) wurde auf anderem Wege für den Fall, dass $2rm + n$ eine Primzahl ist und n das positive Vorzeichen besitzt, von Herrn V. Buniakowsky abgeleitet („Sur un théorème relatif à la théorie des résidus et de son application à la démonstration de la loi de réciprocité de deux nombres premiers." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome quatorzième, p. 432—447). Die hier gegebene Ableitung lässt deutlich erkennen, dass der Buniakowsky'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes in die Kategorie der sich auf das Gauss'sche Lemma stützenden Beweise dieses Theorems gehört.

Für die Grösse σ hat Herr V. Buniakowsky etwas später die Gleichung:

$$\sigma = -\sum_{x=1}^{x=\frac{n-m}{2}} \left[\frac{(x-1)m-1}{n-m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{n-m}{2}} \frac{(x-1)m + \frac{n-1}{2}}{n-m} \qquad (n>m)$$

abgeleitet („Sur le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome quatorzième, p. 497—512).

Da m und n ungerade Zahlen sind, so hat man entweder:

$$n = m + 2\varkappa$$

oder:

$$n = m - 2\varkappa$$

welchen Werthen von n die Gleichungen:

$$\left(\frac{m}{2rm+m+2\varkappa}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}r+\sigma_1}$$

$$\left(\frac{m}{2rm+m-2\varkappa}\right) = \left(\frac{m}{2(r+1)m-m-2\varkappa}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r+1)+\sigma_1}$$

entsprechen, wo:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m+2\varkappa)x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m+2\varkappa)x}{m} - \frac{1}{2} - \frac{\varkappa}{m}\right]$$

$$= -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2\varkappa x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2\varkappa x}{m} - \frac{1}{2} - \frac{\varkappa}{m}\right]$$

ist.

Es soll zunächst σ_1 für einige specielle Werthe von $\varkappa$ ermittelt werden.

Ist $\varkappa = 1$, so wird:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{2x}{m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right] - \frac{m-1}{2}.$$

Beachtet man, dass $\frac{2x}{m}$ für alle angegebenen Werthe von x kleiner als 1 ist, $\frac{2x}{m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$ aber so lange, als x kleiner als $\left[\frac{m}{4} + \frac{1}{2}\right] + 1$ ist, so erhält man:

$$\sigma_1 = -\left[\frac{m}{4} + \frac{1}{2}\right].$$

Es ist ferner:

$$\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{m+1}{4}\right]=\left[\frac{m-1}{4}\right]+\varepsilon$$

$$\frac{m-1}{2}=2\left[\frac{m-1}{4}\right]+\varepsilon$$

wo $\varepsilon=0$ ist für $m\equiv 1 \pmod 4$ und für $m\equiv -1 \pmod 4$ den Werth 1 erhält.

Man hat daher die bekannte Relation:

$$\frac{m-1}{2}=\left[\frac{m-1}{4}\right]+\left[\frac{m+1}{4}\right]$$

$$=\left[\frac{m-1}{4}\right]+\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

und demnach ist:

5)
$$\left(\frac{m}{2rm+m+2}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}r+\left[\frac{m+1}{4}\right]}$$

$$\left(\frac{m}{2rm+m-2}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}r+\left[\frac{m-1}{4}\right]}$$

Diese zwei Formeln hat schon Herr V. Buniakowsky in der zuletzt erwähnten Arbeit angegeben.

Ist ferner $\varkappa=3$, so wird:

$$\sigma_1=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{6x}{m}\right]+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{6x}{m}+\frac{1}{2}-\frac{3}{m}\right]-\frac{m-1}{2}.$$

Da $\left[\frac{6x}{m}\right]$ einen der Werthe 1 oder 2 erhält, je nachdem:

$$\frac{m}{3}>x\geq\frac{m}{6}$$

oder:

$$x\geq\frac{m}{3}$$

ist, da ferner

$\left[\frac{6x}{m}+\frac{1}{2}-\frac{3}{m}\right]$ gleich 1, 2, oder 3 wird, wenn x bez. der Bedingung:

$$\frac{m}{4}+\frac{1}{2}>x\geqq\frac{m}{12}+\frac{1}{2},$$
$$\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}>x\geqq\frac{m}{4}+\frac{1}{2}$$
$$x\geqq\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}$$

genügt, so hat man, falls die ganze Zahl m grösser als 11 ist:

$$\sigma_1=\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{m}{6}\right]-\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}\right]$$

und

$\sigma_1=-2 \quad (m=5)$
$\sigma_1=-3 \quad (m=7)$
$\sigma_1=-5 \quad (m=11)$

Da m und n zwei theilerfremde Zahlen sind, so kann m nur eine der Formen $12t+1$, $12t+5$, $12t+7$, $12t+11$ haben, und es ist demnach, wie man sofort sieht:

$$\left[\frac{m}{3}\right]-\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]=t$$
$$\left[\frac{5m}{12}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{m}{6}\right]\equiv t \pmod 2$$

und daher:

$$\sigma_1\equiv\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right] \pmod 2$$

welche Congruenz auch für $m=5, 7, 11$ bestehen bleibt.

Man hat daher die Gleichungen:

6)
$$\left[\frac{m}{2rm+m+6}\right]=(-1)^{\frac{m-1}{2}r+\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]}$$
$$\left[\frac{m}{2rm+m-6}\right]=(-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Ist ferner $x=\frac{m-3}{2}$, so wird:

7)
$$\sigma_1=-\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m-3)x}{m}\right]+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m-3)x}{m}-1+\frac{3}{2m}\right]$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{3x}{m}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{3x}{m} + 1 - \frac{3}{2m}\right]$$

oder, wenn man in der zweiten Summe für x: $\frac{m+1}{2} - x_1$ schreibt:

$$\sigma_1 \equiv \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{3x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{3x}{m} + \frac{1}{2}\right] \pmod 2$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{3x}{m} + \frac{1}{2} \geq 1$ ist, wenn $x \geq \frac{m}{6}$ wird, während $\frac{3x}{m} \geq 1$ wird, für alle der Bedingung $x \geq \frac{m}{3}$ genügenden Werthe von x so erhält man:

$$\sigma_1 \equiv \left[\frac{m}{3}\right] - \left[\frac{m}{6}\right] \pmod 2.$$

oder, weil:

$$\left[\frac{m}{3}\right] = 2\left[\frac{m}{6}\right] + \varepsilon$$

$$\left[\frac{m}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{m}{6}\right] + \varepsilon$$

ist, wo ε den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem m von der Form $6t+1$ oder $6t-1$ ist:

$$\sigma_1 \equiv \left[\frac{m}{6} + \frac{1}{2}\right] \pmod 2.$$

Man hat demnach die Gleichungen:

$$\left(\frac{m}{2rm-3}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1) + \left[\frac{m}{6} + \frac{1}{2}\right]}$$

7)
$$\left(\frac{m}{2rm+3}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1) + \left[\frac{m}{6} + \frac{1}{2}\right]}.$$

Ist endlich $x = \frac{m-5}{2}$, so wird:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m-5)x}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(m-5)x}{m} - 1 + \frac{5}{2m}\right]$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{5x}{m}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{5x}{m} - \frac{5}{2m}\right] - \frac{m-1}{2}.$$

Nun ist $\left[\frac{5x}{m}\right]$ gleich 1 oder 2, je nachdem

$$\frac{2m}{5} > x \geqq \frac{m}{5}$$

oder

$$x \geqq \frac{2m}{5}$$

ist, während $\left[\frac{5x}{m} - \frac{5}{2m}\right]$ den Werth 1 oder 2 erhält, je nachdem

$$\frac{2m}{5} + \frac{1}{2} > x \geqq \frac{m}{5} + \frac{1}{2}$$

oder

$$x \geqq \frac{2m}{5} + \frac{1}{2}$$

ist.

Man hat daher:

$$\sigma_1 = \left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{2m}{5}\right] - \left[\frac{m}{5} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{2m}{5} + \frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2} \quad (m>9)$$

oder da:

$$\left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{2m}{5}\right] \equiv \left[\frac{2m}{5} + \frac{1}{2}\right] \pmod 2$$

wird, wenn m nicht durch 5 theilbar ist:

$$\sigma_1 \equiv \left[\frac{m}{5} + \frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2} \pmod 2 \quad (m>9).$$

Diese Congruenz bleibt aber auch für $m=3, 7$ bestehen, da:

$$\sigma_1 = \quad 2 \qquad (m=3)$$

$$\sigma_1 = -2 \qquad (m=5)$$

ist.

Man hat daher die Formeln:

$$\left(\frac{m}{2rm-5}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{5}+\frac{1}{2}\right]}$$

8) $$\left(\frac{m}{2rm+5}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}(r-1)+\left[\frac{m}{5}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Setzt man in den Gleichungen 5), 6), 7) und 8) $r=1$ und wendet das quadratische Reciprocitätsgesetz an, so erhält man die interessanten von Herrn V. Buniakowsky in anderer Weise abgeleiteten Formeln: („Sur les congruences binômes exponentielles à base 3 et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome quatorzième, p. 356—381.)

$$\left(\frac{2}{m}\right)=(-1)^{\left[\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{3}{m}\right)=(-1)^{\left[\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{6}{m}\right)=(-1)^{\left[\frac{m}{12}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{5}{m}\right)=(-1)^{\left[\frac{m}{5}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Zu obigen Formeln mag noch die folgende etwas weniger einfache hinzugefügt werden:

$$\left(\frac{7}{m}\right)=(-1)^{\left[\frac{m}{14}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m}{7}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Ist:

9) $$m=4\rho\varkappa+2\tau-1 \quad (2\tau-1<2\varkappa)$$

so hat man:

$$\tau_1=-\sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right]+\sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}-\frac{1}{2}-\frac{x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right]$$

oder, wenn in der zweiten Summe für x: $2\rho\varkappa+\tau-x_1$ gesetzt wird:

$$\sigma_1 = -\sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right] + \sum_{x=1}^{x=2\rho\varkappa+\tau-1}\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}+\frac{1}{2}\right] + \\ +(\varkappa-1)(2\rho\varkappa+\tau-1).$$

Nun wird:

$$\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right] = \lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$2\rho(\lambda+1) + \frac{(\lambda+1)(2\tau-1)}{2\varkappa} > x \geq 2\rho\lambda + \frac{\lambda(2\tau-1)}{2\varkappa}$$

genügt, also für:

$$x = 2\rho\lambda + \left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}\right] + 1,\ 2\rho\lambda + \left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}\right] + 2, \ldots,\ 2\rho(\lambda+1) + \\ + \left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right],$$

so dass die Anzahl derjenigen Glieder der ersten Summe auf der rechten Seite der letzten Gleichung, welche den Werth λ haben, gleich ist:

$$2\rho + \left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right] - \left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}\right]$$

für:

$$\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\left[\frac{2\varkappa(2\rho\varkappa+\tau-1)}{4\rho\varkappa+2\tau-1}\right] = \varkappa-1.$$

Da die Grössen $\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda+1}{2\varkappa}$ und $\frac{\lambda\tau}{\varkappa} - \frac{\lambda}{2\varkappa}$ sich um weniger als eine Einheit unterscheiden, so kann diese Anzahl nur die Werthe 2ρ oder $2\rho+1$ haben.

Es ist ferner:

$$\left[\frac{2\varkappa x}{4\rho\varkappa+2\tau-1}+\frac{1}{2}\right] = \lambda$$

wenn x der Bedingung:

$$(2\lambda+1)\rho + \frac{(2\lambda+1)(2\tau-1)}{4\varkappa} > x \geq (2\lambda-1)\rho + \frac{(2\lambda-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}$$

genügt, also für:

$$x = (2\lambda-1)\rho+1+\left[\frac{(2\lambda-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right],\quad (2\lambda-1)\rho+$$
$$+\left[\frac{(2\lambda-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right]+2,\ \ldots,\ (2\lambda+1)\rho+\left[\frac{(2\lambda+1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right].$$

Es beträgt daher die Anzahl derjenigen Glieder der zweiten Summe in der für σ_1 aufgestellten Gleichung, welche den Werth λ haben:

$$2\rho+\left[\frac{(2\lambda+1)\tau}{2\varkappa}-\frac{2\lambda+1}{4\varkappa}\right]-\left[\frac{(2\lambda-1)\tau}{2\varkappa}-\frac{2\lambda-1}{4\varkappa}\right]$$

d. i. 2ρ oder $2\rho+1$ für $\lambda=1, 2, 3, \ldots, \varkappa-1$, während der grösste Werth von λ:

$$\left[\frac{2\varkappa(2\rho\varkappa+\tau-1)}{4\rho\varkappa+2\tau-1}+\frac{1}{2}\right]=\varkappa$$

für:

$$x = (2\varkappa-1)\rho+\left[\frac{(2\varkappa-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right]+1,\ (2\varkappa-1)\rho+$$
$$+\left[\frac{(2\varkappa-1)(2\tau-1)}{4\varkappa}\right]+2,\ \ldots,\ 2\rho\varkappa+\tau-1$$

also für ρ Werthe von x angenommen wird.

Setzt man:

$$\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\frac{\omega}{2\varkappa}\quad(\omega<2\varkappa)$$

so ist:

$$\left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+\left[\frac{\omega-1}{2\varkappa}+\frac{\tau}{\varkappa}\right]$$

und es wird demnach:

$$\left[\frac{(\lambda+1)\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda+1}{2\varkappa}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{\varkappa}-\frac{\lambda}{2\varkappa}\right]+1$$

wenn:

10) $$\omega\geqq 2\varkappa-2\tau+1$$

ist.

Es ist ferner:

$$\left[\frac{(2\lambda-1)\tau}{2x}-\frac{2\lambda-1}{4x}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{x}-\frac{\lambda}{2x}\right]+\left[\frac{2\omega-2\tau+1}{4x}\right]$$
$$\left[\frac{(2\lambda+1)\tau}{2x}-\frac{2\lambda+1}{4x}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{x}-\frac{\lambda}{2x}\right]+\left[\frac{2\omega+2\tau-1}{4x}\right]$$
$$\left[\frac{(2\lambda+3)\tau}{2x}-\frac{2\lambda+3}{4x}\right]=\left[\frac{\lambda\tau}{x}-\frac{\lambda}{2x}\right]+\left[\frac{2\omega+6\tau-3}{4x}\right]$$

Genügt nun ω der Bedingung 10), so ist:

$$1-\frac{2\tau-1}{4x}>\frac{2\omega-2\tau+1}{4x}\geqq 1-\frac{6\tau-3}{4x}$$
$$1+\frac{2\tau-1}{4x}>\frac{2\omega+2\tau-1}{4x}\geqq 1-\frac{2\tau-1}{4x}$$
$$1+\frac{6\tau-3}{4x}>\frac{2\omega+6\tau-3}{4x}\geqq 1+\frac{2\tau-1}{4x}$$

und daher ist:

$$\left[\frac{2\omega-2\tau+1}{4x}\right]=\left[\frac{2\omega+2\tau-1}{4x}\right]=\left[\frac{2\omega+6\tau-3}{4x}\right]-1$$

wenn:

$$\omega\leqq 2x-\tau$$

ist, während für:

$$\omega>2x-\tau$$

die Relation:

$$\left[\frac{2\omega-2\tau+1}{4x}\right]+1=\left[\frac{2\omega+2\tau-1}{4x}\right]$$

besteht.

Es wird also jedesmal, wenn:

$$2x-\tau\geqq\omega\geqq 2x-2\tau+1$$

ist, sowohl in der ersten als auch in der zweiten der obigen Summen der Werth λ für $2\rho+1$ Werthe von x angenommen, während für:

$$\omega>2x-\tau$$

der Werth λ in der ersten und der Werth $\lambda+1$ in der zweiten Summe, so lange $\lambda+1<x$ ist, $(2\rho+1)$-mal auftritt.

Nun kann aber in der ersten Summe der Werth $x-1$ nur dann $(2\rho+1)$-mal auftreten, wenn:

$$\left[\frac{(x-1)\tau}{x}-\frac{x-1}{2x}\right]=\left[\frac{x\tau}{x}-\frac{x}{2x}\right]-1$$
$$=\tau-2$$

d. h. wenn:

$$\left[\frac{2\tau-1}{2x}+\frac{1}{2}\right]=1$$

also:

$$2\tau-1 \gtrless x$$

ist, und es wird der der Beziehung:

$$\frac{(x-1)\tau}{x}-\frac{x-1}{2x}=\left[\frac{(x-1)\tau}{x}-\frac{x-1}{2x}\right]+\frac{\omega}{2x}$$

genügende Werth von ω stets grösser als $2x-\tau$ sein, wenn:

$$\tau < x-1$$

ist.

Ist also entweder:

$$\tau = x$$

oder:

$$\tau < \frac{x+1}{2}$$

und bezeichnet ξ die Anzahl derjenigen Zahlen $\lambda < x-1$, für welche die durch die Gleichung:

$$\frac{\lambda\tau}{x}-\frac{\lambda}{2x}=\left[\frac{\lambda\tau}{x}-\frac{\lambda}{2x}\right]+\frac{\omega}{2x}$$

definirte Grösse ω, der Relation:

$$\omega > 2x-\tau$$

genügt, so ist:

$$\sigma_1 \equiv (x-1)(\tau-1)+x\rho+\xi \pmod 2.$$

Es ist also unter den gemachten Voraussetzungen:

$$10)\ \left(\frac{m}{2rm+m+2x}\right)=(-1)^{\xi+(\tau-1)(x+r-1)+\frac{m-2\tau+1}{4}}$$

$$11)\ \left(\frac{m}{2rm+m-2x}\right)=(-1)^{\xi+(\tau-1)(x+r)+\frac{m-2\tau+1}{4}}\ (m=4x\rho+2\tau\lambda-1)$$

Ist:

$$\tau = \varkappa$$

so ist:

$$\xi = 0$$

und daher:

$$12) \quad \left(\frac{m}{2rm+m+2\varkappa}\right) = (-1)^{(\varkappa-1)(r+1)+\frac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{2}-\varkappa\right\}}$$

$$13) \quad \left(\frac{m}{2rm+m-2\varkappa}\right) = (-1)^{(\varkappa-1)r+\frac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{2}-\varkappa\right\}}$$

für:

$$m = 2(2\rho+1)\varkappa - 1$$

Wenn man den Fall eines geraden und eines ungeraden $\varkappa$ unterscheidet, so erhält man die Formeln:

$$14) \quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa}\right) = (-1)^{\xi+(\tau-1)(r-1)} \quad (m = 8\varkappa\rho+2\tau-1)$$

$$15) \quad \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa}\right) = (-1)^{\xi+(\tau-1)r}$$

$$16) \quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa}\right) = (-1)^{r-1} \qquad (m = 4(2\rho+1)\varkappa - 1)$$

$$17) \quad \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa}\right) = (-1)^{r}$$

$$18) \quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa+2}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa-2}\right) = (-1)^{\xi+\frac{m-2\tau+1}{4}}$$

für:

$$m = 8\varkappa\rho+4\rho+2\tau-1$$

$$19) \quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa+2}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa-2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{2}-\varkappa\right\}}$$

für:

$$m = 8\varkappa\rho+4(\rho+\varkappa)+1.$$

Ist τ ungerade, so verwandeln sich die Gleichungen 14) und 15) in:

$$20) \quad \left(\frac{m}{2rm+m+4\varkappa}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-4\varkappa}\right) = (-1)^{\xi}$$

wo:

$$m = 8\varkappa\rho+4\tau+1$$

ist.

Die speciellen Formeln 16), 17) und 19) hat auf einem anderen Wege Herr V. Buniakowsky abgeleitet („Sur quelques propositions nouvelles, relatives au symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$." Par V. Bouniakowsky. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome vingt-deuxième p. 358—377).

Setzt man:

$$\tau = 1$$

so ist:

$$\xi = 0$$

und man hat daher die Formel:

$$21)\ \left(\frac{m}{2rm+m+2\varkappa}\right) = \left(\frac{m}{2rm+m-2\varkappa}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{4}}$$

für:

$$m = 4\varkappa\rho + 1.$$

Es soll nun eine allgemeine Regel zur Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Zeichens abgeleitet werden.

Sind n und n_1 zwei theilerfremde Zahlen, von denen mindestens die erste ungerade ist, und leitet man aus denselben die Zahlen n_λ und μ_λ in der durch das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
n &= \mu_1 n_1 - n_2 \\
n_1 &= \mu_2 n_2 - n_3 \\
n_2 &= \mu_3 n_3 - n_4 \\
&\cdots\cdots \\
n_{\nu-2} &= \mu_{\nu-1} n_{\nu-1} - n_\nu \\
n_{\nu-1} &= \mu_\nu n_\nu \qquad\qquad (n_\nu = \pm 1)
\end{aligned}$$

angegebenen Weise ab, ist ferner:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\varkappa &= \pm 1,\ \varepsilon_\varkappa n_\varkappa > 0 \\
n_\varkappa &= 2^{\lambda_\varkappa} \bar{n}_\varkappa
\end{aligned}$$

wo $\bar{n}_\varkappa$ ungerade ist, so ist, wie ich angegeben habe („Zahlentheoretische Studien." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch - naturwissenschaftliche Classe, 90. Band, II. Abtheilung):

$$\left(\frac{n_1}{n}\right)=(-1)^{\frac{2\sum_{x=1}^{x=\nu}\{(\bar{n}_{x-1}-1)(\bar{n}_x+1)-(\varepsilon_{x-1}-1)(\varepsilon_x+1)\}-\sum_{x=0}^{x=\nu-1}\{\lambda_{x-1}-\lambda_{x+1}\}(\bar{n}_x^2-1)}{8}}.$$

Ist nun:

$$\bar{n}_x = 4\sigma_x+\eta_x \qquad (\eta = \pm 1)$$

so hat man:

$$(\bar{n}_{x-1}-1)(\bar{n}_x+1) \equiv (\eta_{x-1}-1)(\eta_x+1) \pmod 8$$

und daher auch:

$$22) \quad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{2\sum_{x=1}^{x=\nu}\{\eta_x\eta_{x-1}-\varepsilon_x\varepsilon_{x-1}\}-2(\eta_0-\varepsilon_0)-\sum_{x=0}^{x=\nu-1}\{\lambda_{x-1}-\lambda_{x+1}\}(\bar{n}_x^2-1)}{8}}$$

Ist nun λ_ρ von Null verschieden, dann sind $\lambda_{\rho-1}$ und $\lambda_{\rho+1}$ gleich Null und man hat daher:

$$\bar{n}_{\rho-1}+\bar{n}_{\rho+1} = 2^{\lambda_\rho}\mu_\rho\bar{n}_\rho$$

oder:

$$23) \qquad 4(\sigma_{\rho-1}+\sigma_{\rho+1})+\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1} = 2^{\lambda_\rho}\mu_\rho(4\sigma_\rho+\eta_\rho).$$

Ist μ_ρ gerade, oder μ_ρ ungerade und gleichzeitig $\lambda_\rho > 1$, so folgt aus dieser Gleichung die Congruenz:

$$\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1} \equiv 0 \pmod 4$$

und daher ist in diesem Falle:

$$\eta_{\rho+1} = -\eta_{\rho+1}.$$

Ist μ_ρ ungerade und $\lambda_\rho = 1$, dann ist der auf der rechten Seite der Gleichung 23) stehende Ausdruck durch 2, aber nicht durch 4 theilbar und daher ist:

$$\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1} = 2$$

also:

$$\eta_{\rho+1} = \eta_{\rho-1}.$$

Vereinigt man in der Gleichung 22) alle Glieder im Exponenten von -1, in denen ν_ρ, λ_ρ und π_ρ vorkommen, so erhält man, falls $\lambda_\rho > 1$ ist:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) = -2^{\lambda_\rho+1}\lambda_\rho\mu_\rho\pi_\rho(\pi_{\rho+1}-2^{\lambda_\rho-1}\mu_\rho\pi_\rho)$$

und daher:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) \equiv 0 \pmod{16}$$

Ist $\lambda_\rho = 1$ und μ_ρ gerade, so hat man:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) = -4\mu_\rho\pi_\rho(\pi_{\rho+1}-\mu_\rho\pi_\rho)$$

also:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) \equiv 4\mu_\rho \pmod{16}$$

oder:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) \equiv 8 \pmod{16}$$

wenn μ_ρ einfachgerade ist, und:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) \equiv 0 \pmod{16}$$

wenn μ_ρ mindestens durch 4 theilbar ist.

Ist $\lambda_\rho = 1$ und μ_ρ ungerade, so wird:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) = 4\nu_\rho\nu_{\rho+1}-4\mu_\rho\pi_\rho(\pi_{\rho+1}-\mu_\rho\pi_\rho)$$

also:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) \equiv 4(\mu_\rho-1)\nu_\rho\nu_{\rho+1}+4\mu_\rho^2\nu_\rho^2 \pmod{16}$$

oder, weil in diesem Falle:

$$\mu_\rho^2 \equiv 1 \pmod 8$$

ist:

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) \equiv 4(\mu_\rho-1)\nu_\rho\nu_{\rho+1}+4 \pmod{16}.$$

Aus dieser Congruenz entstehen sofort folgende Relationen

$$2\nu_\rho(\nu_{\rho-1}+\nu_{\rho+1})-\lambda_\rho(\pi_{\rho+1}^2-\pi_{\rho-1}^2) \equiv 4 \pmod{16}$$

wenn:

$$\mu_\rho \equiv 1 \pmod 4$$

ist, und:

$$2\eta_\rho(\eta_{\rho-1}+\eta_{\rho+1})-\lambda_\rho(n^2_{\rho+1}-n^2_{\rho-1}) \equiv -4 \pmod{16}$$

für:

$$\mu_\rho \equiv -1 \pmod 4$$

Ist:

A die Anzahl der geraden Divisoren n_ρ,

B die Anzahl derjenigen einfachgeraden Divisoren n_ρ, deren zugehöriger Quotient μ_ρ die Form $4s+1$ hat,

C die Anzahl derjenigen einfachgeraden Divisoren n_ρ, deren zugehöriger Quotient μ_ρ die Form $4s-1$ hat,

D die Anzahl der einfachgeraden Divisoren n_ρ mit zugehörigem einfachgeraden Quotienten μ_ρ,

E die Anzahl der übrigen geraden Divisoren n_ρ.

τ_σ diejenige (positive oder negative) Einheit, welcher der σ^{te} ungerade Divisor nach dem Modul 4 congruent ist, so ist nach den obigen Entwickelungen:

$$24) \qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum_{x=1}^{x=\nu} \tau_x\tau_{x-1} - \sum_{x=1}^{x=\nu} \varepsilon_x\varepsilon_{x-1} - (\eta_0-\varepsilon_0)+A}{4}+C+D}$$

wo die Summation bezüglich x in der ersten Summe im Exponenten von -1 über alle Grössen τ_σ auszudehnen ist.

Bezeichnet man mit α die Anzahl der Zeichenfolgen, mit α_1 die Anzahl der Zeichenwechsel, welche in der Reihe der Grössen τ_σ auftreten, und mit β und β_1 die analogen Anzahlen für die Reihe der Grössen ε_x, so kann man die Gleichung 24) auch in folgender Weise schreiben:

$$25) \qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-\alpha_1-\beta+\beta_1-\eta_0+\varepsilon_0+A}{4}+C+D}.$$

Ist:

$$4(C+D)+A \equiv 0 \pmod 8$$

oder:

$$B+E \equiv 3(C+D) \pmod 8$$

so wird:

$$26) \qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum_{x}^{x=\nu} \tau_x\tau_{x-1} - \sum_{x=1}^{x=\nu} \varepsilon_x\varepsilon_{x-1} - \eta_0+\varepsilon_0}{4}}$$

$$= (-1)^{\frac{\alpha-\alpha_1+\beta_1-\beta-\eta_0+\varepsilon_0}{4}}$$

so dass also in diesem Falle die Kenntnis der Vorzeichen der Glieder zweier Zahlenreihen zur Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Symbols ausreicht.

Schreibt man die Gleichung 24) in einer der folgenden Formen:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum_{x}^{x=\nu} \{1+\tau_x\tau_{x-1}\} - \sum_{x=1}^{x=\nu} \{1+\varepsilon_x\varepsilon_{x-1}\} - \eta_0+\varepsilon_0+2A}{4} + C+D}$$

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum_{x}^{x=\nu} \{-1+\tau_x\tau_{x-1}\} - \sum_{x=1}^{x=\nu} \{-1+\varepsilon_x\varepsilon_{x-1}\} - \eta_0+\varepsilon_0}{4} + C+D}$$

so erhält man sofort:

$$27) \qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-\beta+A}{2} - \frac{\eta_0-\varepsilon_0}{4} + C+D}$$

$$28) \qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\beta_1-\alpha_1}{2} - \frac{\eta_0-\varepsilon_0}{4} + C+D}.$$

Für:

$$A+2(C+D) \equiv 0 \pmod 4$$

oder:

$$C+D \equiv B+E \pmod 4$$

verwandelt sich die erste von diesen Gleichungen in:

$$29) \qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\eta_0-\varepsilon_0}{4}}$$

während für:

$$C+D \equiv 0 \pmod 2$$

die zweite in:

$$30) \qquad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\beta_1-\alpha_1}{2} - \frac{\eta_0-\varepsilon_0}{4}}$$

übergeht.

Es wird daher auch, wenn die eben angegebenen Bedingungen erfüllt sind, das verallgemeinerte Legendre'sche Zeichen mit Hilfe der Vorzeichen der Glieder zweier Zahlenreihen bestimmt werden können.

Die angeführten Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn:

$$B = C = D = E = 0$$

ist, d. h., wenn alle Divisoren n_ρ ungerade sind.

Für diesen Fall hat schon Herr L. Kronecker die Gleichungen 29) und 30) angegeben. („Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste." Von L. Kronecker. Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang 1884. Nr. XXIII, p. 519 ff.)

Wird in dem zur Bestimmung der Zahlen n_λ und μ_λ verwendeten Gleichungssysteme für $n_1 : -2n_1$ gesetzt und bei der jedesmaligen Division ein gerader Quotient genommen, so ist:

$$B = C = 0$$

$$\sum \tau_\varkappa \tau_{\varkappa-1} = -A$$

und daher, falls man der Einfachheit halber $\varepsilon_0 = +1$ setzt, was bekanntlich geschehen kann, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun:

$$\left(\frac{-2n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_{\varkappa-1} + \eta_0 - 1}{4} + D}$$

oder weil:

$$\left(\frac{-2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8} - \frac{\eta_0-1}{4}}$$

ist:

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum_{x=1}^{x=\nu} \varepsilon_x \varepsilon_{x-1} + 3(\eta_0 - 1)}{4} + D - \frac{n^2-1}{8}}.$$

Es ist aber in diesem Falle auch, wie ich erwähnt habe, („Algorithmen zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols". Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 82. Band, II. Abtheilung, p. 981 ff.):

$$\left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{\sum_{x=1}^{x=\nu} \varepsilon_x \varepsilon_{x-1}}{4} + \frac{(\eta_0 - 1)^2}{8}}$$

und daher hat man in diesem Falle:

$$D \equiv \frac{n^2-1}{8} \pmod 2$$

oder auch:

$$D \equiv \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] \pmod 2.$$

Über den Unterschied krystallinischer und anderer anisotroper Structuren.

Von dem c. M. Prof. V. v. Ebner in Graz.

In meinen „Untersuchungen über die Ursachen der Anisotropie organisirter Substanzen“[1] habe ich die von Ehrenberg und v. Mohl vertretene Ansicht, dass den organisirten doppelbrechenden Substanzen im Ganzen eine krystallinische Structur zukomme, als eine besondere Hypothese, unterschieden.

Ich betonte damals, dass eine krystallinische Structur nicht genügend characterisirt sei, indem man derselben in verschiedenen Richtungen des Raumes eine verschiedene physikalische Beschaffenheit zuschreibe.

Es scheint mir nun, dass gerade dieser Punkt einer eingehenderen Ausführung bedarf, als ich sie früher gegeben habe, da A. Zimmermann, der sich jüngst speciell mit einschlägigen „molecular-physikalischen Untersuchungen“[2] beschäftigte, die principielle Bedeutung der Unterscheidung krystallinischer und anderer anisotroper Structuren offenbar ebenso ungenügend gewürdiget hat, wie viele seiner Vorgänger.

Zimmermann formulirt seine Ansicht über die Ursache der Anisotropie organisirter Substanzen in folgenden Sätzen:

„Der Annahme, dass die, die Anisotropie bewirkende krystallinische Structur der organischen Substanzen durch Spannungen hervorgerufen wird, stehen theoretische Schwierigkeiten nicht im Wege und es sprechen sogar gewisse Thatsachen für diese Annahme. Es ist jedoch nicht wahrscheinlich, dass diese Spannungen später noch in der Membran vorhanden sind.“

---

[1] Leipzig, 1882.

[2] Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin, 1883. Separatabdruck.

Diesen Sätzen könnte ich nur zustimmen, wenn das Wort krystallinisch gestrichen und ausdrücklich noch gesagt würde: Es ist aber ganz und gar unerwiesen, ja sogar unwahrscheinlich, dass den organisirten Substanzen allgemein eine krystallinische Structur zukomme. Zunächst hebe ich nochmals hervor, dass nicht jede anisotrope Structur krystallinisch ist und es nur bei einem laxen Sprachgebrauche allenfalls gestattet ist, anisotrop und krystallinisch als gleichbedeutend zu gebrauchen. In einem Falle aber, wo es darauf abgesehen ist, genauere Vorstellungen von einer Molecularstructur zu gewinnen, muss der Begriff krystallinisch so scharf als thunlich wissenschaftlich gefasst werden; das heisst so, dass er dasjenige enthält, was für eine Krystallstructur wesentlich ist.

Ehe wir den unterscheidenden Merkmalen einer Krystallstructur und anderer möglicher anisotroper Structuren näher treten, möchte ich einige Bemerkungen über das Vorkommen von Doppelbrechung — die wichtigste Erscheinung, aus welcher wir in der vorliegenden Frage Anisotropie erschliessen — vorausschicken.

Zunächst ist hervorzuheben, dass die regulären Krystalle zwar anisotrop aber nicht doppelbrechend sind. Daraus geht hervor, dass die Doppelbrechung an sich nicht characteristisch für eine krystallinische Structur ist.

Anderseits ist es bekannt, dass es doppelbrechende Körper gibt, welche entschieden keine krystallinische Structur besitzen; denn es wird Niemand im Ernste behaupten wollen, dass eine gespannte Glas- oder eine einseitig gedrückte zähe Gummimasse etc., indem sie doppelbrechend wird, nun eine krystallinische Structur im strengen Wortsinne annehme. Dies zeigt zunächst, dass Doppelbrechung kein untrügliches Zeichen für das Vorhandensein einer krystallinischen Structur ist und dass anderseits eine solche auch ohne Doppelbrechung möglich ist. Die Mehrzahl der Krystalle aber zeigt eine Doppelbrechung, welche unzweifelhaft eine höhere Bedeutung hat. Die Krystalle des tetragonalen und hexagonalen Systemes sind einaxig doppelbrechend, die Krystalle des rhombischen, monoklinen und triklinen Systemes sind alle zweiaxig doppelbrechend und die Lage

der optischen Axen, respective der Axen des optischen Elasticitätsellipsoides stehen in so inniger Beziehung zu den Symmetrieaxen und Ebenen der betreffenden Krystalle, dass an einem causalen Zusammenhange zwischen krystallinischer Structur und Doppelbrechung nicht gezweifelt werden kann. Wenn daher in einer Substanz Erscheinungen der Doppelbrechung beobachtet werden, welche mit den an solchen Krystallen beobachteten Erscheinungen einige Ähnlichkeit haben, so scheint der Schluss gerechtfertigt, dass diese Substanz eine Structur habe, wie Krystalle, an welchen normale Doppelbrechung vorkommt. Dieser Schluss scheint noch plausibler, wenn man im Zusammenhange mit der Doppelbrechung und in bestimmten Beziehungen zu den optischen Axen andere Kennzeichen der Anisotropie, z. B. Quellungsaxen etc. findet. Die Unzulässigkeit dieses Schlusses zu erweisen, muss nun die Hauptaufgabe dieser Zeilen sein.

Ich glaube dies zunächst am besten an einem concreten Beispiele thun zu sollen.

Man kann, wie Bertin [1] gezeigt hat, trockene Gelatineplatten herstellen, welche optisch negativ einaxig sind und zwar so, dass die optische Axe senkrecht steht auf der Fläche der Platte, und mit dem Nörremberg'schen Polarisationsmikroskope das characteristische Kreuz und die isochromatischen Ringe gesehen werden können, wie sie senkrecht zur optischen Axe geschliffene Platten von negativ einaxigen Krystallen geben.

Wollte man nun behaupten, die Gelatineplatte habe eine krystallinische Structur, so müsste man bestimmen können, welchem Krystallsysteme sie angehört. Denn irgend einem Krystallsysteme müsste sie angehören, wenn sie überhaupt krystallinisch ist, da durch v. Lang [2] auf inductivem Wege erwiesen ist, dass ausser den sechs bekannten Krystallsystemen keine anderen möglich sind. [3] Vermöge der optischen Erscheinungen könnte die Platte dem tetragonalen oder dem hexagonalen

[1] Annales de chimie et de physique, V. Ser., T. XV, p. 129.

[2] Lehrbuch der Krystallographie. Wien, 1866.

[3] Auf die von Bravais, Sohncke u. A. gegebenen deductiven Beweise dieses Satzes kann hier weniger Gewicht gelegt werden, da diese auf einer Hypothese über die Molecularstructur der Krystalle beruhen.

Systeme angehören. Da gesetzmässige Krystallflächen fehlen, von einer regelmässigen Spaltbarkeit, etwa nach Prismen-, Pyramiden-, Rhomboëderflächen etc. keine Rede ist, so liegt zunächst gar kein Grund vor, Symmetrieverhältnisse anzunehmen, welche einem der genannten Krystallsysteme entsprächen. Vielleicht könnten noch feinere physikalische Untersuchungen herangezogen werden, um Eigenthümlichkeiten krystallinischer Structuren an der Gelatineplatte zu entdecken; allein davon ist nichts bekannt und es ist a priori unwahrscheinlich, dass man auf diesem Wege constante ungleichwerthige Richtungen in einer der Platte parallelen Ebene entdecken würde. Lässt sich nun eine nicht krystallinische Molecularstructur denken, welche uns die optischen Erscheinungen ungezwungen erklärt? Dies glaube ich entschieden bejahen zu müssen. Es genügt, sich vorzustellen, dass die Molecularanordnung in der Richtung der Normalen der Platte eine andere ist, als in den verschiedenen Richtungen einer der Platte parallelen Ebene. Es ist ferner ganz natürlich, anzunehmen, dass die verschiedenen Richtungen einer der Platte parallelen Ebene unter sich alle gleichwerthig sind. In die Sprache der Krystallographie übersetzt, würde dies heissen: Die Gelatineplatte hat eine Hauptsymmetrieebene parallel ihrer Fläche; sie hat ferner unendlich viele, zur Hauptsymmetrieebene normale, unter sich gleichwerthige Symmetrieebenen. Krystalle, welche diesem Symmetriegesetze folgen, sind unmöglich; ich darf daher eine solche Platte nicht als krystallinisch bezeichnen. Dass einer solchen Platte eine Hauptquellungsaxe in der Richtung der optischen Axe zukommt, würde sich durch die angenommene, nicht krystallinische Structur ebenfalls begreifen lassen.

Wir können nun versuchen, in mehr allgemeiner Weise die Symmetrieverhältnisse anisotroper Structuren aufzusuchen, von welchen nichts weiter bekannt ist, als dass ihnen ein optisch einaxiges oder ein optisch zweiaxiges Elasticitätsellipsoid zukommt und allenfalls noch weitere Erscheinungen der Anisotropie, welche jedoch nicht für irgend ein Krystallsystem characteristisch sind.

Unter Anisotropie ist hier zu verstehen: irgend welche physikalische Verschiedenheiten in verschiedenen Richtungen einer homogenen Substanz.

Bei einer solchen theoretischen Erörterung können wir uns vorläufig an die Betrachtung der optischen Elasticitätsflächen halten und uns die Symmetrieverhältnisse der Fläche einer Kugel eines Rotationsellipsoides und eines dreiaxigen Ellipsoides in der Sprache der Krystallographie unter der Voraussetzung aufsuchen, dass alle Radien, welche in einem beliebigen Durchschnitte durch den Mittelpunkt einer solchen Form als gleich lang erscheinen, als gleichwerthige Richtungen — respective als Richtungen, in welchen keine physikalischen Verschiedenheiten bestehen — angesehen werden können. Ehe wir aber an diese Auseinandersetzung gehen, müssen wir uns über einige die Symmetrieverhältnisse betreffende Ausdrücke verständigen, welche sich an die in der Krystallographie gebräuchlichen anlehnen, zum Theile aber neu geschaffen werden müssen, wenn es sich um Symmetrieverhältnisse handelt, welche bei Krystallen unmöglich sind. Die Ausdrücke, die wir nothwendig haben, beziehen sich auf die Symmetrieverhältnisse von Ebenen und von auf diesen normalen Linien, welche wir als Symmetrieaxen oder auch kurzweg als Axen bezeichnen wollen. Zum besseren Verständnisse des Folgenden wird es zunächst zweckdienlich sein, kurz die Symmetrieverhältnisse von Schnittebenen, welche durch einen Krystall gelegt werden können, nach der von v. Lang[1] gegebenen Terminologie anzuführen, wobei zu bemerken ist, dass die entgegengesetzten Richtungen einer geraden Linie im Allgemeinen physikalisch verschieden sind und wo sie gleich sind, als zwei Richtungen betrachtet werden.

Denken wir uns einen beliebigen Punkt einer solchen Schnittebene als Mittelpunkt, von welchem aus nach allen möglichen Richtungen der Ebene gerade Linien gezogen seien, deren Längen uns eine Function der physikalischen Eigenschaften in diesen Richtungen (die krystallographische Werthigkeit der Richtung) ausdrücken sollen, so erhalten wir durch Verbindung aller Endpunkte dieser Linien im Allgemeinen eine geschlossene Curve, welche eine Figur umgrenzt, innerhalb welcher der Mittelpunkt, von welchem aus wir uns die Richtungen der krystallographischen Werthigkeit gezogen denken, gelegen ist.

---

[1] L. c.

Im Allgemeinen ist nun eine solche Figur auf einer beliebigen Schnittebene eines Krystalles so beschaffen, dass sich durch den Mittelpunkt keine Symmetrielinie legen lässt, durch welche die Fläche in zwei Hälften zerfiele, innerhalb welcher jeder beliebigen Richtung der einen Hälfte eine gleichwerthige, gleichgeneigte Richtung der anderen Hälfte entsprechen würde. Solche Schnittebenen kommen in allen Krystallsystemen, im triklinischen aber ausschliesslich vor und heissen daher:

1. Triklinische Ebenen. Die Normale einer solchen Ebene ohne jede Symmetrie der physikalischen Werthigkeitsfigur ist eine triklinische Axe.

Alle anderen auf Krystallschnitten sonst noch möglichen Werthigkeitsfiguren sind so beschaffen, dass sie sich in zwei oder mehrere symmetrische Abtheilungen zerlegen lassen. Die Symmetrie der Werthigkeitsfiguren ist im Allgemeinen von zweifacher Art.

A. Durch den Mittelpunkt der Figur lassen sich 1, 2, 3, 4, oder 6 Symmetrielinien ziehen, welche die Figur in Hälften zerlegen, die sich wie Bild und Spiegelbild verhalten.

B. Die Werthigkeitsfigur lässt sich vom Mittelpunkte aus in 2, 3, 4 oder 6 gleiche Winkelabschnitte theilen, welche congruente Curvenabschnitte einschliessen (die also durch Drehung um eine im Mittelpunkte der Figur errichtete Normale zur Deckung mit einem nächst folgenden Curvenabschnitte gebracht werden können.) Der Nullpunkt der Winkeltheilung kann beliebig gewählt werden.

Es existirt aber bei der Symmetrie *B* keine Symmetrielinie, in Bezug auf welche sich zwei Hälften der Curve, wie Bild und Spiegelbild verhielten. Die Symmetrie *B* findet sich häufig bei hemisymmetrischen Krystallen, die Symmetrie *A* auf den Hauptschnitten holosymmetrischer Krystalle. Werthigkeitscurven von der Symmetrie *A* kommt auch die Symmetrie *B* zu mit einziger Ausnahme der monoklinischen Figuren, welche wohl eine Symmetrielinie haben, sich aber in keiner Weise in congruente Theile zerlegen lassen.

In Bezug auf die Werthigkeitscurven mit Symmetrie unterscheidet man nun:

2. Monoklinische Ebenen. Sie haben eine Symmetrielinie, zu deren Seiten je zwei gleichwerthige Richtungen liegen. Die Normale ist eine monoklinische Axe.

3. Rhombische Ebenen. Sie haben zwei auf einander senkrechte, ungleichwerthige Symmetrielinien und je vier gleichwerthige Richtungen. Die Normale ist eine rhombische Axe.

4. Tetragonale Ebenen. Sie haben vier unter Winkeln von 45° sich kreuzende Symmetrielinien. Es sind je acht gleichwerthige Richtungen vorhanden. — Die Normale ist eine tetragonale Axe.

5. Trigonale Ebenen mit drei unter Winkeln von 60° sich schneidenden, gleichwerthigen Symmetrielinien und je sechs gleichwerthigen Richtungen. Die Normale ist eine trigonale Axe.

6. Hexagonale Ebenen mit sechs unter Winkeln von 30° sich schneidenden, gleichwerthigen Symmetrielinien und je 12 gleichwerthigen Richtungen. Die Normale ist eine hexagonale Axe. — Hiezu ist zu bemerken, dass das allgemeine Symmetriegesetz für die Zahl der gleichwerthigen Richtungen in dem speciellen Falle eine Ausnahme erleidet, wenn die untersuchte Richtung in eine Symmetrielinie fällt. Die Zahl der gleichwerthigen Richtungen wird dann auf die Hälfte reducirt.

Für alle gleichwerthigen Richtungen erfolgt ferner eine Reduction auf die Hälfte, wenn es sich um ein hemisymmetrisches Krystallsystem handelt. Ferner geht bei gewissen Hemiedrien die Symmetrie *A* in die Symmetrie *B* über. Damit sind aber die möglichen Symmetrieverhältnisse, welche auf einer natürlichen Krystallfläche oder auf einer beliebigen, durch einen Krystall gelegten Durchschnittsebene vorkommen können, erschöpft. Für die nicht krystallinischen Structuren können aber noch Ebenen von höherer Symmetrie, als es hexagonale Ebenen sind, in Betracht kommen. Von besonderer Wichtigkeit sind:

Kreisebenen. Sie haben unendlich viele Symmetrielinien, nur gleichwerthige Richtungen, die durch die einander gleichen Radien eines Kreises dargestellt werden. Die Normale einer solchen Ebene ist eine Kreisaxe.

Mit diesen aus der physikalischen Krystallographie geschöpften Vorbegriffen können wir nun zunächst folgende Definition einer homogenen, isotropen Molecularstructur aufstellen:

In einem homogenen, isotropen Körper ist jede beliebige Ebene eine Kreisebene (und jede beliebige gerade Linie eine Kreisaxe).

Vergleicht man mit dieser vollkommensten molecularen Symmetrie diejenige einer krystallinischen Substanz ausgestattet mit dem höchsten Grade von Symmetrie, welcher bei einer solchen überhaupt vorkommen kann (reguläres, holotesserales System), so ist diese vergleichsweise gering. Denn durch eine holotesserale Substanz gelegten Ebenen sind im Allgemeinen triklinisch.

Man kann durch eine solche nur drei aufeinander senkrechte tetragonale Ebenen, vier die Winkel dieser Ebenen halbirende trigonale Ebenen und sechs auf den Durchschnittslinien der tetragonalen und trigonalen Ebenen senkrechte rhombische Ebenen und endlich noch Schaaren von monoklinischen Ebenen legen, welche man erhält, wenn man auf alle möglichen Richtungen der tetragonalen und trigonalen Ebenen senkrechte Ebenen legt. Alle übrigen, sonst noch denkbaren Ebenen, und deren gibt es noch unendlich viele, sind aber triklinisch.

Ich hebe dies desshalb hervor, weil bekanntlich reguläre Krystalle nicht doppelbrechend sind und ihnen daher eine kugelförmige Lichtwelle zukommt, obwohl sie in hohem Grade anisotrop sind. Daraus lässt sich schon nach Analogie vermuthen, dass die Formen der Lichtwellen, wie sie den doppelbrechenden Krystallen zukommen, nicht nothwendig an krystallinische Structuren gebunden sind, sondern wohl auch bei anisotropen Structuren höherer Symmetrieen, als sie bei Krystallen vorkommen, möglich sind.

Wenden wir uns nun zu einer homogenen anisotropen Substanz, deren Molecularstructur durch die Symmetrieverhältnisse eines Rotationsellipsoides ausgedrückt sei, in welchem die physikalische Werthigkeit der Richtungen durch die Längen der vom Mittelpunkte des Ellipsoides zur Oberfläche gezogenen Radien gegeben ist. Eine solche Structur ist mit Rücksicht auf die analytische Herleitung der Gesetze der Doppelbrechung wohl geeignet, dieselben optischen Erscheinungen, wie ein einaxig doppelbrechender Krystall hervorzurufen. Einer solchen Structur kommt eine Kreissymmetrieebene zu, ferner unendlich viele gleichwerthige rhombische Symmetrieebenen erster Art, welche senk-

recht auf der Kreisebene stehen,[1] ferner unendlich viele rhombische Ebenen zweiter Art, welche man sich vorstellen kann, wenn man jede rhombische Ebene erster Art um ihre Durchschnittslinie mit der Kreisebene dreht, bis sie endlich in die Lage der Kreisebene übergeht. Von diesen rhombischen Ebenen zweiter Art sind alle zur Kreisebene gleich geneigten unter sich gleichwerthig, alle ungleich geneigten ungleichwerthig. Damit sind aber alle möglichen Ebenen, welche durch eine solche Structur gelegt werden können, erschöpft. Alle in einer solchen Structur möglichen Richtungen sind rhombische Axen mit Ausnahme der einzigen Kreisaxe, welche auf der Kreisebene senkrecht steht. Dass eine solche hypothetische anisotrope Structur eine weit höhere Symmetrie hat, als irgend ein optisch einaxiger Krystall, liegt auf der Hand. Ich hebe nun hervor, dass den hexagonalen und tetragonalen Krystallen keine Axe höherer Symmetrie zukommt, als die Namen der Systeme ausdrücken und dass in beiden unendlich viele Richtungen vorkommen, welche den Character triklinischer Axen haben.

Analysiren wir nun noch in analoger Weise ein dreiaxiges Ellipsoid, wie es als Elasticitätsellipsoid einer optisch zweiaxigen Substanz angenommen wird, so kommen wir auf eine nicht krystallinische Structur, welche im Allgemeinen wohl geeignet ist, gleich einem optisch zweiaxigen Krystall Doppelbrechung hervorzurufen.

Eine solche Structur hat drei unter Winkeln von 90° sich schneidende, ungleichwerthige rhombische Ebenen erster Art, ferner unendlich viele rhombische Ebenen zweiter Art, welche man sich vorstellen kann, indem man eine rhombische Ebene erster Art um je ihre Durchschnittslinien mit den beiden anderen dreht. Diese sind paarweise gleich geneigt zu einer rhombischen Symmetrieebene erster Art und dann gleichwerthig; im Übrigen

[1] Diese Ebenen sind sämmtlich gleiche Ellipsen. Eine Ellipse, deren Radien die krystallographische Werthigkeit ausdrücken, erfüllt die Bedingungen einer Ebene von rhombischer Symmetrie. Trotzdem dürften wir, strenge genommen, eine solche Symmetrieebene einer nicht krystallinischen Substanz nicht mit einer in einem Krystalle möglichen rhombischen Ebene identificiren. Doch können wir in den folgenden Betrachtungen von diesen Unterschieden absehen.

aber ungleichwerthig. Unter diesen Symmetrieebenen erreicht ein Paar, wenn die Drehung um die mittlere Hauptaxe erfolgt, Kreissymmetrie. (Kreisschnitt des Elasticitätsellipsoides.) Endlich gibt es noch ein System von unendlich vielen rhombischen Symmetrieebenen, welche man sich vorstellen kann, wenn man die Ebenen zweiter Art um ihre Durchschnittlinien mit den Ebenen erster Art dreht.

Keine Richtung, welche man sich in einer solchen Structur denken kann, hat eine geringere Symmetrie, als einer rhombischen Axe zukommt; zwei Richtungen sind aber Kreisaxen. Optisch zweiaxige Krystalle von derartiger Symmetrie sind selbstverständlich unmöglich; keiner derselben hat eine Durchschnittsebene oder Axe von höherer, als rhombischer Symmetrie.

Es liessen sich nun ohne Zweifel noch zahllose anisotrope, nicht krystallinische Structuren anderer Art denken, als die hier analysirten; ich halte aber das Gesagte für genügend, um zu zeigen, dass anisotrop und krystallinisch keineswegs identische Begriffe sind und fasse dasselbe kurz folgendermassen zusammen:

1. In homogenen, krystallinischen, doppelbrechenden, optisch ein- und zweiaxigen Structuren ist stets eine unbegrenzte Zahl von Richtungen vorhanden, welchen der Character triklinischer Axen zukommt. Von Richtungen höherer Symmetrie können nur monoklinische Axen in unbeschränkter Zahl, Richtungen vom Character rhombischer Axen nur in sehr beschränkter Zahl, trigonale, tetragonale und hexagonale Axen nur in der Einzahl, Axen noch höherer Symmetrie aber gar nicht vorkommen.

2. Homogene, anisotrope, nicht krystallinische Structuren, welche optisch ein- oder zweiaxig doppelbrechend sind, können Kreissymmetrieaxen besitzen und so beschaffen sein, dass keiner denkbaren Richtung in denselben eine geringere Symmetrie, als die einer rhombischen Axe zukommt.

Sehen wir nun nach, wie weit uns die über die Anisotropie organisirter Substanzen bekannten Thatsachen zu dem Schlusse berechtigen, dass in denselben Symmetrieverhältnisse, wie in

den Krystallen, vorhanden seien. Was zunächst die Doppelbrechung anbelangt, so ist die Kenntniss derselben eine sehr mangelhafte. Die organisirten Substanzen sind gewöhnlich nur auf mikroskopisch kleine Strecken als homogen anzusehen; meist wechseln innerhalb kleiner Bezirke die Richtungen der Axen des Polarisationsellipsoides.

Man ist daher auf die Beobachtungen mit parallelem, polarisirtem Lichte angewiesen und kann im Allgemeinen nur die Richtungen und relativen Längen der Axen des Polarisationsellipsoides bestimmen; von genaueren Bestimmungen der Brechungsquotienten, der Dispersion, von Beobachtung der Axenbilder etc. ist keine Rede. Von anderen Erscheinungen der Anisotropie kennen wir Quellungsaxen, welche mit Axen des Polarisationsellipsoides zusammenfallen. Die Cohäsionserscheinungen deuten ebenfalls auf Anisotropie und stehen zum Theil mit den Erscheinungen der Doppelbrechung in Beziehung. Doch ist eine Spaltbarkeit, welche derjenigen von Krystallen analog wäre, durchaus nicht nachzuweisen; wo eine Spaltbarkeit vorhanden ist, hängt sie in der Regel zweifellos mit einer sichtbaren histologischen Structur (Schichtung, Faserung etc.) zusammen. Dies Alles und das Wenige, was wir sonst noch von Erscheinungen der Anisotropie wissen, genügt aber durchaus nicht, um die Symmetrieeigenthümlichkeiten irgend eines Krystallsystems auch nur einigermassen zu erkennen.

Es gibt aber andere und, wie mir scheint, schwer ins Gewicht fallende Thatsachen, welche gegen die krystallinische Structur organisirter Substanzen sprechen.

Krystalle bestehen — wenn wir von der Isomorphie und davon absehen, dass namentlich grössere Individuen oft erhebliche Mengen von Verunreinigungen in sich aufnehmen können — aus wohl definirbaren, stöchiometrisch constant zusammengesetzten, chemischen Verbindungen.

Ist ja doch das Krystallisiren und Umkrystallisiren einer der häufigsten Kunstgriffe zur Reindarstellung einer chemischen Verbindung. — Unzersetzte, organisirte Substanzen lassen sich durch keine Mittel als Krystallindividuen darstellen und der Beweis, dass sie aus einfachen, stöchiometrisch constant zusammengesetzten chemischen Verbindungen bestehen, lässt sich

in der Regel nicht erbringen; für viele aber ist es sicher, dass in ihnen verschiedenartige in der Zusammensetzung wechselnde chemische Verbindungen enthalten sind.

Normal doppelbrechende Krystalle zeigen immer denselben optischen Character, von organisirten Substanzen ist es aber bekannt (Cellulose, cuticularisirte Zellhäute, Hornsubstanz etc.), dass der optische Character je nach Umständen sehr verschieden sein kann. Wir haben, wie jetzt immer mehr anerkannt wird, allen Grund anzunehmen, dass Spannungen die Anisotropie der organisirten Substanzen veranlassen; bei Krystallen dagegen können wir dies nicht annehmen, bei diesen müssen wir vielmehr voraussetzen, dass besondere Eigenschaften der Molecüle die Krystallform und die damit gegebene Anisotropie direct bedingen.

Nur für die anomal doppelbrechenden Krystalle nehmen die Krystallographen an, dass die Anomalie der Doppelbrechung mit der krystallinischen Structur als solcher nichts zu thun habe, sondern ebenfalls auf Spannungsvorgänge während der Bildung des Krystalles zurückzuführen sei. Dies alles sind wohl Gründe genug, um bei molecular-physikalischen Erörterungen die Begriffe anisotrop und krystallinisch auseinander zu halten.

Die Consequenzen, die sich aus den vorhergehenden Erörterungen für die möglichen Ursachen der Anisotropie organisirter Substanzen ergeben, sind nun sehr wichtige.

Wenn zugegeben wird, dass die Anisotropie unter dem Einflusse von Spannungen und in ursächlichem Zusammenhange mit denselben entsteht; so kann man sich viel leichter vorstellen, dass nicht krystallinische Structuren zu Stande kommen, als krystallinische. Es würde beispielsweise genügen, an einen Zug oder Druck in einer bestimmten Richtung zu denken, unter dessen Einfluss eine optisch einaxige, nicht krystallinische Substanz zu Stande kommt. Wenn man sich dagegen vorstellen sollte, dass eine krystallinische Substanz, welche z. B. der rhromboëdrischen Symmetrie entspricht, direct unter dem Einflusse von Spannungen sich bilde, so würde diese einfache Annahme bei weitem nicht genügen; man müsste dann die weitere Bedingung voraussetzen, dass senkrecht auf die Richtung des Hauptzuges oder Druckes in drei unter Winkeln von 120° auseinander liegenden

Richtungen, andere unter sich genau gleiche Zug- oder Druckkräfte einwirken und überdies noch annehmen, dass die Änderungen dieser Zug- und Druckkräfte nach verschiedenen Richtungen hin genau nach den Symmetriegesetzen des rhomboëdrischen Systems erfolgen würden. Zu solchen Annahmen fehlt aber bei organisirten Substanzen jeder halbwegs plausible Grund.

Für optisch zweiaxige, nicht krystallinische Structuren wird die Annahme genügen, dass in zwei verschiedenen Richtungen ungleiche Spannungen wirken; für zweiaxige krystallinische Structuren müssten wir dagegen wieder viel complicirtere Annahmen machen, wie wohl nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

Dagegen ist ein anderer Zusammenhang zwischen krystallinischer Structur und Spannungen noch denkbar; nämlich der, dass Substanzen, welche vermöge ihrer chemischen Natur sich in Krystallform abscheiden unter dem Einflusse von Spannungen ihre Hauptsymmetrieaxen in bestimmter Richtung orientiren. Als Beispiel dieser Art kann die Thatsache dienen, dass unter dem Einfluss der Spannung einer zusammenhängenden Eisdecke alle eine solche Decke zusammensetzenden Eiskrystalle sich schliesslich mit ihrer optischen Axe senkrecht zur Oberfläche orientiren. Doch wäre eine solche Erklärung bei einer organisirten Substanz nur dann denkbar, wenn dieselbe stets mit demselben optischen Character aufträte und auch dann noch wäre diese Erklärung keineswegs sicher richtig, aber wenigstens möglich.

Alles, was im Vorhergehenden über die Structur der Krystalle vorgebracht wurde, beruht auf Gesetzen, welche ohne irgend eine Hypothese auf dem Wege des Calcüls aus beobachteten Thatsachen abgeleitet sind. Diese Structurgesetze bleiben also wahr, mag man was immer für eine Hypothese über den molecularen Aufbau der Krystalle ersinnen. Es war nicht nothwendig, eine solche Hypothese zu Hilfe zu nehmen, um denkbare Unterschiede zwischen krystallinischen und anderen anisotropen Structuren hervorzuheben. Bei tieferem Eingehen in die Frage würde man allerdings ohne eine moleculare Hypothese nicht wohl auskommen und ohne eine solche wäre wohl die Erörterung der Frage unthunlich, welche Symmetrien bei irgend

welchen Structuren überhaupt möglich sind und ob es homogene Structuren ohne jede Symmetrie geben kann, welche nicht krystallinisch sind. So weit brauchen wir aber vorläufig nicht zu gehen.

Da die Verwechslung der Begriffe amorph, isotrop und einfachbrechend, sowie anderseits krystallinisch, anisotrop und doppelbrechend nun schon wiederholt zu Missverständnissen geführt hat, möchte ich schliesslich noch das Verhältniss dieser Begriffe gegen einander präcisiren.

Halten wir uns an den Gebrauch der Mineralogen und Chemiker, Alles was nicht in Krystallform auftritt, amorph zu nennen, so kann folgende Tabelle möglicher, homogener Structuren die Beziehungen der fraglichen Begriffe darstellen.

A. Amorphe Structuren.

1. Isotrope Structuren.
   - *a)* Vollkommenste Symmetrie. Jeder Schnitt ein gleichwerthiger Kreisschnitt, in welchem jede Linie eine (Spiegel-)Symmetrielinie ist. Jede Richtung eine Kreisaxe. Einfachbrechend.
   - *b)* Hemisymmetrisch, vollkommenste Symmetrie. Jeder Schnitt ein gleichwerthiger Kreisschnitt, jedoch ohne Spiegelsymmetrielinien. Jede Richtung eine Kreisaxe. Circular polarisirend, doppelbrechend ohne Axe, mit zwei Kugelwellen von ungleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit. [1]
2. Amorphe, anisotrope Structuren.
   Structuren, in welchen physikalisch ungleichwerthige Richtungen vorkommen, welche nach solchen Symmetrien geordnet sind, wie sie in Krystallen nicht vorkommen. Ein- oder zweiaxig-doppelbrechend oder einfachbrechend.

[1] Hieher wären Structuren mit den Eigenschaften circular polarisirender Flüssigkeiten zu rechnen, welche letztere nach v. Fleischl's Untersuchungen in der angegebenen Weise doppelbrechend sind. (Diese Berichte Bd. XC, October 1884.) Die hemisymmetrische Kreissymmetrie kann man sich allenfalls unter dem Bilde eines Sperrrades mit einer unbegrenzten Anzahl Zähnen vorstellen, welche in Bezug auf den Beschauer entweder stets nach rechts oder stets nach links gerichtet sind.

B. Krystallinische Structuren. (Sämmtlich anisotrop.)

1. Reguläre Structuren.
   a) Einfach brechend.
   b) Circular polarisirend.
2. Hexagonale und tetragonale Structuren.
   a) Einaxig doppelbrechend.
   b) Einaxig doppelbrechend und circular polarisirend.
3. Rhombische, monoklinische und triklinische Structuren.
   Zweiaxig doppelbrechend.

Über eine neue Methode zur Bestimmung des Mangans in Spiegeleisen, Ferromanganen und den wichtigsten Erzen.

Von **Wilhelm Kalmann** und **Alois Smolka.**

Zur quantitativen Bestimmung des Mangans gibt es viele Methoden und die meisten derselben lassen in Bezug auf Genauigkeit der Resultate nichts zu wünschen übrig; doch verlangen alle bisherigen Bestimmungsmethoden eine verhältnissmässig lange Zeit zu ihrer Ausführung, ein Nachtheil, der sich namentlich in Hüttenlaboratorien recht fühlbar macht. Dies gilt auch von der noch am raschesten zum Ziele führenden Pattinson'schen Methode, nach welcher selbst ein geübter Analytiker das Resultat kaum vor 8—10 Stunden erfährt.

Unser Bestreben ging dahin, eine Methode zur Bestimmung des Mangans aufzufinden, die mit möglichst rascher Ausführbarkeit eine für technische Zwecke hinreichende Genauigkeit verbindet. Dabei war unser Augenmerk besonders auf solche Fälle gerichtet, in denen es sich nur um eine directe Bestimmung des Mangans handelt; denn bei einer vollständigen Erzanalyse, bei der ohnedies der gewöhnliche analytische Gang eingehalten werden muss, fällt eine etwas raschere Manganbestimmung am Ende weniger ins Gewicht.

W. Dittmar[1] beschrieb eine Methode zur Bestimmung des Chroms in Chromeisensteinen, die für unsere Absicht vielversprechend erschien. Er schliesst bekanntlich den Chromeisenstein mit einem geschmolzenen Gemenge aus zwei Theilen Boraxglas und drei Theilen kohlensaurem Natronkali im Platintiegel auf und überführt so das Chrom unter Mitwirkung des atmo-

[1] Dingler's Journal 1876, Bd. CCXXI, pag. 450.

sphärischen Sauerstoffs in chromsaures Alkali. Wir dachten in ganz derselben Weise das Mangan zu Mangansäure zu oxydiren, die Schmelze in einer mit Schwefelsäure angesäuerten Eisenvitriollösung von bekanntem Gehalte aufzulösen und aus der Menge des von dem Manganate oxydirten Eisenvitriols den ursprünglichen Mangangehalt zu berechnen. Indessen zeigte es sich, als wir ein Spiegeleisen von bekanntem Mangangehalt der eben angedeuteten Behandlung unterzogen, dass unsere Erwartungen nicht eintrafen. Schon die dunkellauchgrüne Schmelze zeigte, nicht die charakteristische Farbe eines Manganates; von der Eisenvitriollösung wurde sie zwar gelöst, aber die Titrirung mit Chamäleon ergab kaum die Hälfte des thatsächlichen Mangangehaltes. Bei Wiederholung der Versuche unter verschiedener Schmelzdauer fanden wir — stets die Bildung eines Manganates voraussetzend — immer zu niedrige Resultate, doch waren sie unter einander gut übereinstimmend. So viel war sicher, dass die Oxydation nicht wie erwartet bis zur Bildung von Manganat ging.

Die Übereinstimmung der Resultate unter einander bewog uns, die Sache weiter zu studiren und zwar vorerst an Manganoxyduloxyd; dieses wurde in bekannter Weise aus Manganchlorür durch Fällung mit kohlensaurem Natron, Waschen und Glühen des Niederschlages dargestellt und da ein Gehalt desselben an kohlensaurem Natron in Anbetracht der zu verwendenden Schmelze ohne Einfluss war, so begnügten wir uns damit, das Waschen nur bis zum Verschwinden der Chlorreaction fortzusetzen. In dem Präparat bestimmten wir das Mangan gewichtsanalytisch; 0·9075 Grm. desselben gaben 1·0168 Grm. MnS oder 0·642804 Grm. Mangan, entsprechend 70·83% Mn.

Das Manganoxyduloxyd wurde nun mit Gemengen aus verschiedenen Theilen Boraxglas und kohlensaurem Natronkali mit Borax allein und mit kohlensaurem Natronkali allein geschmolzen; das Schmelzen wurde im bedeckten, dann im offenen Platintiegel ohne und unter Umrühren durchgeführt. Die erkaltete Schmelze wurde immer in einer gemessenen Menge einer Eisenvitriollösung von bekanntem Gehalte gelöst und hierauf mit Chamäleon zurücktitrirt; daraus liess sich die Menge des Sauerstoffs berechnen, welche von der beim Schmelzen entstandenen Manganverbindung an den Eisenvitriol abgegeben wurde. Bei so wesentlich modifi-

cirten Bedingungen war es natürlich, dass man in den einzelnen Schmelzen verschiedene Mengen disponiblen Sauerstoffs fand; die Resultate differirten in Folge dessen auch, zwar nicht um viele Procente, doch immerhin erheblich. Nur bei Einhaltung bestimmter Bedingungen beim Schmelzen oxydirte sich das Mangan gleichmässig.

Diese Bedingungen sind folgende:

1. Ein sehr fein gepulvertes Manganoxyduloxyd.
2. Die zwanzigfache Menge eines aus zwei Theilen Boraxglas und drei Theilen kohlensaurem Natronkali bestehenden Flussmittels.
3. Ein Schmelzen durch 15 — 30 Minuten im bedeckten Tiegel, hierauf durch 5 Minuten fortgesetztes Schmelzen unter Umrühren.

Bei Nichteinhaltung dieser Bedingungen ging die Oxydation theils weiter, theils weniger weit.

Im Folgenden ist eine Zusammenstellung der Resultate gegeben, die unter Einhaltung der angegebenen Bedingungen beim Manganoxyduloxyd gefunden wurden. Zu dieser Tabelle sei nur bemerkt, dass der Mangangehalt in dem Oxyduloxyd auf Grund der gewichtsanalytischen Bestimmung (70·83% Mn) berechnet ist. 1 CC. Chamäleon = 0·002732 Grm. Fe = = 0·0035125 Grm. FeO.

Gewogene Substanz	Darin enthaltenes Mn.	Dem oxydirten FeO entsprechende CC. Chamäleon	Oxydirtes FeO in Grammen	Oxydirender Sauerstoff	
in Grammen				in Grammen	auf 100 Theile Mn berechnet
0·1460	0·103412	64·5	0·226556	0·025173	24·34
0·1545	0·109432	68·5	0·240606	0·026734	24·43
0·2546	0·180333	112·1	0·393751	0·043750	24·26
0·2424	0·171692	107·2	0·376540	0·041838	24·37
0·2357	0·166946	103·4	0·363193	0·040355	24·17
0·1910	0·135285	84·2	0·295753	0·032861	24·29
				Mittel..	24·32

Die Schmelze enthielt somit im Mittel aus sechs Bestimmungen auf 100 Theile Mangan 24·32 Theile disponiblen Sauerstoff; daraus geht hervor, dass während des Schmelzens eine chemische Verbindung entstanden sein muss, welche auf 6 Atome Mn 5 Atome disponiblen Sauerstoffes enthält, denn diesem Atomverhältnisse entsprechen auf 100 Theile Mangan 24·24 Theile Sauerstoff, gegen 24·32 Theile, die wir durch unsere Versuche gefunden haben. Die Untersuchung der chemischen Verbindung selbst ist von uns noch nicht zum Abschlusse gebracht und behalten wir uns vor, darüber in Bälde zu berichten.

Auf der Thatsache, dass bei der angegebenen Aufschliessung des Manganoxyduloxyds sich stets ein Oxydationsproduct bildet, welches auf 6 Atome Mn 5 Atome disponiblen Sauerstoffs enthält, basirt unsere neue Methode der Manganbestimmung, deren Beschreibung wir nun ausführlich mittheilen wollen.

A. Erfordernisse.

1. Ein Flussmittel aus Borax und kohlensaurem Natronkali, welches folgend bereitet wird:

Ein Gemenge aus zwei Theilen Boraxglas und drei Theilen kohlensaurem Natronkali schmilzt man in einer Platinschale, bis die Masse ruhig fliesst. Die erstarrte, sehr hygroskopische Schmelze wird noch warm in einem eisernen Mörser pulverisirt und dann in einem gut schliessenden Pulverglase zum Gebrauche aufbewahrt.

2. Eine Eisenvitriollösung. Etwa 100 Grm. Eisenvitriol werden in 1000 CC. Wasser gelöst, mit etwas Schwefelsäure angesäuert und filtrirt; die filtrirte Lösung wird mit circa 100 CC. reiner, concentrirter Schwefelsäure versetzt.

3. Eine Chamäleonlösung, die in gewöhnlicher Weise auf Eisen gestellt wird. Am besten entspricht 1 CC. Chamäleon ungefähr 0·0025 Grm. Eisen. Den Mangantiter der Chamäleonlösung findet man durch folgende Überlegung:

Je 6 Atomen Mn entsprechen 5 Atome disponiblen Sauerstoffes; 5 Atome O oxydiren 10 $FeSO_4$, somit entsprechen 10 Fe 6 Mn und lässt sich der Mangantiter der Chamäleonlösung aus dem Eisentiter nach folgendem Ansatze berechnen:

$$\text{Eisentiter: } x = (10 \times 56) : (6 \times 55).$$

B. Ausführung der Methode.

1. Man nehme eine aufs Feinste gepulverte Durchschnittsprobe der zu untersuchenden Manganverbindung und wäge davon 0·15—0·30 Grm. in einen Platintiegel ein. Die Menge richtet sich nach dem beiläufigen Mangangehalte der Substanz; wir fanden, dass die Probe an Genauigkeit verlor, wenn mehr als 0·15 Grm. Mangan in derselben vorhanden war.

2. Die gewogene Substanz wird am Boden des Tiegels gleichmässig ausgebreitet und mindestens $^1/_4$ Stunde im offenen Tiegel in der Flamme eines Bunsenbrenners geglüht. Gut, doch nicht unbedingt nothwendig ist es, das Glühen im Gebläse zu beenden. — Das Glühen hat den Zweck, das Mangan grösstentheils in Oxyduloxyd überzuführen, denn in dieser Form gelingt die Aufschliessung am besten.

3. Man lässt den Platintiegel bedeckt erkalten und wiegt dann circa die zwanzigfache Menge von dem gepulverten, oben beschriebenen Flussmittel ein. Nun erhitzt man allmälig, bis der Inhalt des Tiegels in Fluss geräth, wobei namentlich darauf zu achten ist, dass nicht viel auf den Deckel spritzt, da sich diese Partien grösstentheils zu Manganat oxydiren und hiedurch ein zu hohes Resultat erfolgen kann.

Ist der Inhalt des Tiegels geschmolzen, so wird bei voll geöffnetem Bunsenbrenner das Schmelzen durch 15—20 Minuten fortgesetzt, sodann der Deckel entfernt, der Tiegel schief gelegt und das Schmelzen unter Umrühren mit einem circa 1 Mm. starken Platinspatel noch 5 Minuten unterhalten. Hiebei ist besonders darauf Rücksicht zu nehmen, dass kein fester, unaufgeschlossener Rückstand am Boden des Tiegels bleibt. Bei Einhaltung der angegebenen Bedingungen kommt dies nicht vor.

4. In zwei Bechergläser lässt man aus einer in Zehntel Cubikcentimeter getheilten Bürette aufs Genaueste gleiche Mengen von Eisenvitriollösung einfliessen. Für gewöhnlich reichen 10 CC. der nach Vorschrift bereiteten Lösung hin, für sehr manganreiche Substanzen sind etwa 15 CC. nothwendig. Man verdünnt so weit, dass bei der späteren Operation der Tiegel vollständig unter die Flüssigkeit zu liegen kommt.

5. Der erkaltete Tiegel sammt Deckel, sowie auch der Rührdraht werden in eines der Bechergläser mit Eisenvitriollösung gegeben, dieses sodann mit einer Uhrschale bedeckt und, damit die Lösung der Schmelze rascher von statten geht, etwas concentrirte Schwefelsäure zugegeben, doch nicht so viel, dass die Lösung zu stürmisch vor sich geht. Die Schmelze löst sich unter Kohlensäureentwicklung in der Eisenvitriollösung in circa $^1/_4$ Stunde, genügenden Schwefelsäurezusatz vorausgesetzt, auf.

6. Nun titrirt man sowohl die unveränderte Eisenvitriollösung als auch jene, in der man die Schmelze gelöst, mit Chamäleon. Die Differenz der in beiden Fällen gebrauchten CC. Chamäleonlösung, multiplicirt mit dem Mangantiter derselben, gibt den Mangangehalt der Probe.

Beleganalysen.

Wir führten an Spiegeleisen, Ferromanganen, Manganoxydul-oxyd, Braunstein und Spatheisenstein eine Reihe von Manganbestimmungen nach unserer Methode aus, verglichen dieselben mit den auf gewichtsanalytischem Wege gefundenen Procentzahlen und finden sich sämmtliche diesbezüglichen Resultate in den folgenden Tabellen übersichtlich zusammengestellt:

Tabelle I.

	Gewogene Substanz in Grammen	CC Chamäleon, entsprechend dem oxydirten $FeSO_4$	1 CC Chamäleon entspricht Grammen Mangan	Gefundenes Mangan in	
				Grammen	Procenten
I. Manganoxydul-oxyd					
1. Probe	0·1460	64·5	0·00160992	0·10383984	71·12
2. „	0·1545	68·5	„	0·1102795	71·38
3. „	0·2546	112·1	„	0·18047203	70·88
4. „	0·224	107·2	„	0·17258342	71·20
5. „	0·2357	103·4	„	0·16646573	70·63
6. „	0·1910	84·2	„	0·13555526	70.97
				Mittel...	71·03

	Gewogene Substanz in Grammen	CC Chamäleon, entsprechend dem oxydirten $FeSO_4$	1 CC Chamäleon entspricht Grammen Mangan	Gefundenes Mangan in	
				Grammen	Procenten
II. Spiegeleisen					
1. Probe	0·2746	10·0	0·003561	0·0356100	12·97
2. „	0·1680	6·0	„	0·0213660	12·72
3. „	0·3029	10·8	„	0·0384588	12·70
				Mittel...	12·80
III. Spiegeleisen von Witkowitz					
1. Probe	0·2222	31·8	0·00160992	0·05119545	23·04
2. „	0·2448	35·0	„	0·0563472	23·02
3. „	0·2238	32·2	„	0·05183942	23·16
				Mittel...	23·07
IV. Ferromangan von Hörde					
1. Probe	0·2138	44·7	0·00160992	0·07196342	33·66
2. „	0·2269	48·0	„	0·07727616	34·06
3. „	0·1653	35·1	„	0·05650819	34·19
4. „	0·2289	47·0	„	0·07566624	33·06
				Mittel...	33·77
V. Ferromangan (französisch)					
1. Probe	0·1026	10·9	0·003561	0·03881490	37·82
2. „	0·1067	11·5	„	0·0409515	38·38
3. „	0·1770	19·0	„	0·0676590	38·23
4. „	0·2326	55·2	0·00160992	0·08886758	38·21
				Mittel...	38·16
VI. Ferromangan von Witkowitz					
1. Probe	0·2214	66·6	0·001490	0·099234	44·82
2. „	0·2177	66·0	„	0·098340	45·17
3. „	0·2070	63·2	„	0·094168	45·49
4. „	0·2101	64·7	„	0·096403	45·88

	Gewogene Substanz in Grammen	CC Chamäleon, entsprechend dem oxydirten $FeSO_4$	1 CC Chamäleon entspricht Grammen Mangan	Gefundenes Mangan in	
				Grammen	Procenten
5. Probe	0·1993	59·5	0·001490	0·088655	44·48
6. „	0·2050	62·5	„	0·093125	45·43
				Mittel...	45·22
VII. Ferromangan von Oberhausen					
1. Probe	0·2070	99·6	0·001490	0·148404	71·69
2. „	0·2052	99·0	„	0·147510	71·89
3. „	0·2000	95·6	„	0·142444	71·22
4. „	0·2092	101·0	„	0·150490	71·94
5. „	0·2043	98·1	„	0·146169	71·55
6. „	0·1257	59·77	„	0·089057	70·85
				Mittel...	71·52
VIII. Spatheisenstein von Eisenerz					
1. Probe	0·3022	5·5	0·001490	0·008195	2·71
2. „	0·3075	5·5	„	0·008195	2·67
3. „	0·3081	5·85	„	0·008716	2·83
4. „	0·3053	5·4	„	0·008046	2·64
5. „	0·3004	5·25	„	0·007822	2·60
				Mittel...	2·69
IX. Braunstein					
1. Probe	0·1152	45·45	0·001490	0·067720	58·78
2. „	0·1704	66·3	„	0·098787	57·97
3. „	0·1635	63·8	„	0·095062	58·14
4. „	0·1650	65·0	„	0·096850	58·70
5. „	0·1802	70·6	„	0·105194	58·38
				Mittel...	58·39

Tabelle II.

	Gewogene Substanz	Mangan-sulfür	Procente an Mangan	
	in Grammen		Gewichts-analytisch	Nach unserer Methode im Mittel
Manganoxyduloxyd	0·9075	1·0168	70·83	71·03
Spiegeleisen.....	1·0276	0·2049	12·60	12·80
Spiegeleisen von Witkowitz	0·4399	0·1625	23·35	23·07
Ferromangan von Hörde	1·0070	0·5420	34·00	33·77
Ferromangan (französisch)...	0·8367	0·5028	37·99	38·16
Ferromangan von Witkowitz	0·8191	0·5860	45·23	45·22
Ferromangan von Oberhausen	0·6778	0·7655	71·40	71·52
Spatheisenstein von Eisenerz	1·0592	0·0441	2 63	2·69
Braunstein	1·0027	0·9251	58·32	58·39

Ein Vergleich der nach unserer Methode gefundenen Mittelwerthe mit den auf gewichtsanalytischem Wege gefundenen Procentzahlen ergibt, dass die Maximalabweichung 0·23 % beträgt, ein Umstand, der gewiss für unsere Methode spricht. Wie aus Tabelle I ersichtlich, sind die Mittel im Durchschnitt aus je fünf Bestimmungen gezogen worden und genügt diese Anzahl jedesmal, um ein gut stimmendes Resultat zu erhalten. Dessenungeachtet dürfen wir aber nicht verhehlen, dass namentlich bei hochprocentigen Ferromanganen, wie z. B. jenes von Oberhausen eines ist, die nach unserer Methode ausgeführten Manganbestimmungen um 1% von einander abweichen können. Die Eigenthümlichkeit, dass die Resultate bei hochprocentigen Ferromanganen nicht den hohen Grad der Übereinstimmung unter einander zeigen, wie bei Spiegeleisen und niederprocentigen Ferromanganen, theilt unsere Methode übrigens mit allen anderen bis jetzt bekannten technischen Proben auf Mangan. Durch Ausführung von nur drei Parallelversuchen, die gleichzeitig angestellt und in vier Stunden beendigt sein können, wird man aber nach unserer Methode einen sehr sicheren Mittelwerth erhalten. —

Die Anwendbarkeit dieser Methode zur Bestimmung sehr kleiner Mengen von Mangan, wie z. B. in Stahl, unterzogen wir gar keiner Prüfung, da vorauszusehen ist, dass durch die beschränkte Menge von anwendbarer Substanz die unvermeidlichen Versuchsfehler in solchen Fällen zu hoch ausfallen; desgleichen überzeugten wir uns durch die Analyse eines Kieselmangans, dass in Fällen, wo das Mangan in Form von Mangansilicat vorliegt, unsere Methode nur annähernde, um 2—3% zu niedere Resultate ergibt. Dies bewog uns, davon abzustehen, unsere Methode auch für Schlacken zu versuchen.

Dieselbe eignet sich somit in allen jenen Fällen, wo durch einfaches Glühen der Probe das Mangan in Manganoxyduloxyd übergeht, der Gehalt an Mangan mindestens 1—2% beträgt, ferner in dem Untersuchungsobject ausser Mangan kein anderer Körper enthalten ist, der bei der Aufschliessung in eine an Eisenvitriollösung Sauerstoff abgebende Verbindung verwandelt wird, wie z. B. Chrom.

Bielitz, Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule.

III. SITZUNG VOM 22. JÄNNER 1885.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt einen Abdruck der Protokolle der „International Conference held of Washington for the purpose of fixing a Prime Meridian and a Universal Day. October, 1884".

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt die 28. Lieferung (24 Blätter) der neuen Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie (1 : 75000).

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung des Herrn Carl Bobek, Privatdocent an der deutschen technischen Hochschule zu Prag: „Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene."

Das c. M. Herr Prof. Richard Maly in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Die Analyse des Andesin's von Trifail in Steiermark."

Ferner übersendet Herr Prof. Maly zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten des Herrn Heinrich Emich:

1. „Zur Selbstreinigung natürlicher Wässer."
2. „Über das Verhalten der Gallensäuren zu Leim und Leimpepton."

Herr Prof. J. V. Janovsky an der höheren Staatsgewerbeschule zu Reichenberg, übersendet eine Abhandlung: „Über intermediäre Reductionsproducte der Nitroazokörper."

Herr F. Wittenbauer, diplom. Ingenieur und Privatdocent an der technischen Hochschule in Graz, übersendet eine vorläufige Mittheilung: „Über die Bewegung einer Ebene im Raume".

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung des Afrikareisenden Herrn Eduard Glaser in Constantinopel unter dem Titel: „Die Sternkunde der südarabischen Kabylen.“

Das w. M. Herr Prof. A. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Ludwig Haitinger: „Über die Dehydracetsäure.“

Herr Prof. Dr. Franz Toula in Wien erstattet Bericht über seine „geologischen Untersuchungen in der ‚Grauwackenzone‘ der nordöstlichen Alpen, mit besonderer Berücksichtigung des Semmeringgebietes“, zu deren Ausführung ihm von Seite der kaiserlichen Akademie eine Subvention bewiligt worden ist.

Herr Adolf Sobieczky, k. k. Linien-Schiffslieutenant in Wien, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Die meteorologischen Beobachtungen der österreichischen arctischen Beobachtungsstation auf Jan Mayen im Jahre 1882 — 1883.“

Herr Adolf Bobrik v. Boldva, k. k. Linien-Schiffslieutenant in Wien, überreicht folgende Abhandlungen:

1. „Die Fluth- und Ebbebeobachtungen der österreichischen arctischen Beobachtungsstation auf Jan Mayen 1882 — 1883.“
2. „Die Aufnahme der Insel Jan Mayen durch die österreichische Polar-Expedition 1882 — 1883.“

An Druckschriften wurden vorgelegt.

Academia Romana: Memoriile geologice ale scolei militare din Jasi. Memoriul I. de G. Cobălescu. Bucuresci, 1883; gr. 4°.

— — Dare de Séma despre expositiunea de Igiena de la Berlin din 1883 de Dr. J. Felix. Bucuresci, 1884; 4°.

— — Dare de Séma despre expositiunea de Electricitate de la Viena din 1883 de Emanoil Bacaloglu. Bucuresci, 1884; 4°.

Académie Impériale des sciences: Zapiski. Tome XLVIII. Nr. 2. St. Petersbourg, 1884; 8°.

— — Mélanges physiques et chimiques, Tome XII, livraisons 1 & 2. St. Pétersbourg, 1884; 8°.

Académie Impériale de St. Pétersburg: Mémoires. Tome XXII. Nrs. 4—12. St. Pétersbourg, 1884; gr. 4°.

— — Ein Blick auf das Unterrichtswesen Russlands im XVIII. Jahrhundert bis 1782 von Graf D. A. Tolstoi. St. Petersburg, 1884; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XX. Nr. 23—24. Halle a. S. 1884; 4°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. Tome XII. Nr. 12. Genéve, Lausanne, Paris, 1884; 8°.

Central-Commission, k. k. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale: X. Band, 4. (Schluss-) Heft. Wien, 1884; 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang IX. Nr. 1—3. Cöthen, 1885; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome C. 1er semestre, 1885. Nr. 1. 1885; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang. Nr. 18. Berlin, 1884; 8°.

Heidelberg, Universität: Akademische Schriften pro 1880 bis 82. — 19 Stücke. 4° u. 8°.

Institut, königl. preussisches geodätisches: Publication. Die gegenseitige Lage der Sternwarten zu Altona und Kiel. Kiel, 1884; 4°.

Istituto, Reale Lombardo di scienze e lettere: Rendiconti. Ser. II. Volume XVI. Milano, Pisa, Napoli, 1883; 8°.

— — Memorie. Vol. XV. Fascicoli II & III. Milano, Pisa, Napoli, 1884; 4°.

— — Prodromi della Faunistica Bresciana. Dr. Eugenio Bettoni. Brescia. 1884; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1882. IV. Heft. Giessen, 1884; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. 30. Band. Nr. 17 und 18. Leipzig, 1884; 8°.

Kraetzl, Franz: Wald und Waldstreu. Römerstadt, 1884; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1884. XII. Heft. Wien, 1884; 8°.

Nature. Vol. XXXI. Nr. 794. London, 1885; 8°.

Observatoire, Impérial de Rio de Janeiro: Annales. Tome II. 1882. Rio de Janeiro, 1883; gr. 4°.

Observatory, the Adelaide and other places in South Australia and the northern territory: Meteorological Observations during the year 1881. Adelaide, 1884; Folio.

Reichsanstalt k. k. geologische: Jahrbuch 1884. XXXIV. Band, 4. Heft. Wien, 1884; 8°.

Reichsforstverein, österreichischer: Österreichische Vierteljahresschrift für Forstwesen. N. F. II. Band. IV. Quartal. Wien, 1884; 8°.

Societas scientiarum fennica: Acta. Tomus XIII. Helsingforsiae, 1884; 8°.

Société scientifique Argentine: Aperçu sur la théorie de l'évolution par le Dr. Ladislau Netto. Rio de Janeiro, 1883; 8°.

Societeten, Finska Vetenskaps: Öfversigt af Förhandlingar. XXV. 1882—1883. Helsingfors, 1883; 8°.

Society, the royal of Edinburgh: Proceedings. Vol. XI. Nr. 110. Session 1881—82. Edinburgh, 1882; 8°. Vol. XII. Nr. 113. Session 1882—1883. Edinburgh, 1883; 8°.

— — Transactions. Vol. XXX, parts 2 & 3. For the sessions 1881—1883. Edinburgh, 1882—1883; 4°. — Vol. XXXII, part. I. For the session 1882—1883. Edinburgh, 1883; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. VI. Jahrgang. Nr. 4. Wien, 1885; 4°.

Zur Ausführung der Stickstoffbestimmung nach Kjeldahl.

Von G. Czeczetka.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1885.)

Die Stickstoffbestimmung ist eine so oft vorkommende Arbeit, dass dem Arzte, Landwirthe, Gährungstechniker, Sanitätsbeamten etc. die Kenntniss eines rasch fördernden und verlässliche Resultate liefernden Verfahrens Bedürfniss ist.

Neuerer Zeit hat Kjeldahl sein ganz eigenthümliches Verfahren zur Bestimmung des Stickstoffes veröffentlicht und fast allgemein wendet man es an, denn es gestattet bei gleicher Genauigkeit und Richtigkeit der Resultate mit viel einfacheren Mitteln als bisher und in kürzerer Zeit die Analyse durchzuführen.

Bekanntlich löset Kjeldahl die zu analysirende Substanz in starker reiner Schwefelsäure und oxydirt diese Lösung mittelst Kaliumpermanganat.

Das Gelingen der Arbeit hängt dabei von der richtigen Ausführung der Oxydation ab, aber gerade diese bereitet einige Schwierigkeiten. Bringt man nach Kjeldahl's Vorschrift das trockene Kaliumpermanganatpulver noch so vorsichtig und in kleinen Mengen in die zu oxydirende Lösung, so ist die Reaction doch immer eine sehr heftige, und abgesehen von der nicht entsprechenden geringen Sauberkeit dieser Operation, kann durch Verspritzung die ganze Arbeit vereitelt werden.

Diesem Übelstande habe ich vollständig dadurch abgeholfen, dass ich nicht Kaliumpermanganatpulver, sondern eine gesättigte Lösung dieses Präparates in reiner starker Schwefelsäure verwende, welche man langsam durch ein Trichterchen mit langem Rohre in die zu oxydirende Lösung fliessen lässt.

Hierbei muss man aber dafür sorgen, dass die Permanganat*lösung* nicht auf die Oberfläche der zu oxydirenden Flüssigkeit

sondern in dieselbe fliesse, weil sonst die Oxydation auch störend heftig erfolgen würde.

Um beim Zusammengiessen der Natronlauge mit der oxydirten Lösung im Destillirkolben jeden Ammoniakverlust zu meiden, giesst man die überschüssige Lauge nicht bei offenem Destillirkolben zu, sondern erst dann, wenn der Destillirkolben dicht verschlossen und mit dem Kühler verbunden worden ist, zu welchem Zwecke im Pfropfe des Destillirkolbens ausser dem Ammoniakableitungsrohre auch ein Welter'scher Sicherheitstrichter eingefügt ist, dessen Rohrende in die Flüssigkeit im Kolben taucht.

Zum Austitriren der im Überschusse vorgeschlagenen ein Zehntel Normalschwefelsäure wendet man fast allgemein ein Zehntel Normalnatron oder Kali an und benützt entweder Lackmustinktur oder Lackmuspapier als Indicator.

Viel besser bewährt sich jedoch Phenolphtalein in alkoholischer Lösung, wovon ein Tropfen vollkommen hinreicht. Beim geringsten Überschusse an Natron färbt sich die bishin nur weisslich opalisirende Flüssigkeit prachtvoll rubinroth, wodurch die Bestimmung nicht nur an Sicherheit gewinnt, sondern auch bei jedem Lichte gleich gut ausführbar ist.

Von der Kaliumpermanganatlösung bereitet man nur so wenig, als man während eines Tages verbraucht, da sie nicht beständig ist.

Analyse des Andesins von Trifail in Steiermark.

Von **Richard Maly.**

Die folgende Notiz enthält die chemische Analyse des Trifailer Andesins, über dessen merkwürdiges Vorkommen in der Braunkohle Prof. J. Rumpf in Nr. 1 des Anzeigers der k. Akademie vom vergangenen Jahre eine kurze vorläufige Mittheilung gemacht hat.

Die sorgfältig ausgesuchten Krystalle waren durch stärkste Salzsäure nicht, wohl aber durch Schmelzen mit kohlensaurem Natronkali oder durch Flusssäure aufschliessbar.

Das specifische Gewicht von J. Rumpf bestimmt, war 2·66. Das gepulverte Mineral verlor nach dem Trocknen im Exsiccator oder bei 100°, bei darauf folgendem Glühen nur eine Kleinigkeit an Gewicht, was auf die mikroskopischen Kohlentheilchen kommt, die mechanisch nicht mehr abgetrennt werden konnten. Die Glühverluste betrugen:

1) 0·20%
2) 0·25%

Die qualitative Analyse ergab an Basen Thonerde, Kalk-Natron, dann kleine Mengen von Magnesia und Kali, und eine nicht bestimmbare Spur Eisen.

I. Zur Aufschliessung mit kohlensaurem Natronkali dienten 2·1030 Grm. geglühter Substanz. Die erhaltene Kieselsäure wog 1·2100 Grm. und war in verdünnter Lauge leicht zur klaren Flüssigkeit löslich. Im Filtrate wurden noch Kalk und Magnesia bestimmt, da die Thonerde dieser Portion verloren ging. Der aus dem Oxalat erhaltene kohlensaure Kalk wog 0·3333 Grm. = 0·1866 Grm. CaO; das Magnesiumpyrophosphat: 0·0215 Grm. = 0·0077 MgO.

II. Aufschliessung mit Flusssäure. Die angewandte und geglühte Substanz wog 1·1766 Grm. Die benützte wässrige Flusssäure war zweimal aus einer Platinretorte destillirt und völlig rückstandfrei.

Die Thonerde wog 0·3133 Grm.; das Calciumcarbonat 0·1700 Grm. = 0·0952 Grm. CaO.

Das Filtrat vom Calciumoxalat, das noch die Alkalien und die kleine Menge Magnesia enthielt, wurde mit etwas Schwefelsäure eingedampft, der Rückstand schwach geglüht; er wog 0·1985 Grm. Darin sind Magnesium und Kalium noch direct bestimmt worden; Magnesiumpyrophosphat 0·0035 = 0·00126 Grm. MgO; Kaliumchlorid + Platin 0·0172 = 0·0047 Grm. K_2O.

Zieht man vom obigen Sulfatgemisch das Kali als Sulfat (= 0·0087 Grm.) und ebenso die gefundene Magnesia als Sulfat (= 0·00378 Grm.) ab, so erhält man für das schwefelsaure Natron 0·1860 Grm., woraus sich 0·0812 Grm. Na_2O rechnen.

Das Mineral ist demnach ein Kalk-Natronsilicat mit kleinen Mengen Kalium und Magnesium. Die procentische Zusammensetzung ist:

Kieselsäure	57·53%
Thonerde	26·62 „
Kalk	8·48 „
Magnesia	0·23 „
Natron	6·90 „
Kali	0·39 „
	100·15

Das Sauerstoffverhältniss von

	Kieselsäure,		Thonerde und Monoxyden		
ist wie	30·68	:	12·40	:	4·36
oder wie	7·03	:	2·85	:	1·00.

Zur Selbstreinigung natürlicher Wässer.

Von **Friedrich Emich.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. R. Maly in Graz.)

Es ist eine bekannte Thatsache, dass Flüsse, denen Abwässer des menschlichen Haushaltes oder Fabriks- und Canalwässer zugeführt werden, nach längerem Laufe eine mehr oder weniger vollständige Reinigung in dem Sinne erfahren, dass sie namentlich ärmer an den sogenannten „organischen Substanzen" werden, also ärmer an jenen Bestandtheilen, welche man in den zu Genusszwecken bestimmten Wässern vor Allem ausgeschlossen sehen will. Bei der chemischen Analyse zeigt sich jene Abnahme durch die Verminderung der Oxydirbarkeit mittelst Chamäleon- oder alkalischer Silberlösung.

Von den hierüber gemachten Beobachtungen und Berichten anderer Autoren sei folgendes hervorgehoben.

Im „Handbuch der Hygiene und der Gewerbekrankheiten" von Pettenkofer und Ziemssen führt Wolffhügel als „schlagendes Beispiel" an, dass die Wupper trotz der enormen Verunreinigungen, welche ihr in Elberfeld durch Fabrikswässer zugeführt werden, schon nach einem Laufe von wenigen Meilen so rein sei, dass sie mit Vorliebe zur Türkischrothfärberei verwendet werde.

Die Seine, welche unterhalb Paris nach Einmündung der Schwemmkanäle in colossalem Masse verunreinigt erscheint, lässt bei Meulan sowohl durch den Augenschein, als durch die chemische Analyse von solchen Beimengungen nichts mehr erkennen.[1]

---

[1] Aus „Die Reinigung der Seine", angeführt in Pettenkofer, Canalisation und Abfuhr, p. 199 ff.

Das Blackston-Flusswasser soll während eines Laufes von 20 (engl.) Meilen den grössten Theil seiner Canalwasser-Verunreinigungen verlieren; sein Gehalt an organischen Stoffen hat dabei bedeutend abgenommen, welche Abnahme sich aus der Verdünnung durch die Zuflüsse allein nicht erklären lässt, da sonst auch eine proportionale Abnahme des Chlorgehaltes hätte eintreten müssen, was nicht der Fall war.[1]

Nach Hulwa[2] hat das Oderwasser bei Dyhernfurth (32 Kilometer unterhalb Breslau) durch die Selbstreinigung einen derartigen Grad von Reinheit erfahren, dass der Einfluss der Breslauer Canalwässer weder chemisch noch mikroskopisch nachzuweisen ist. Die Beschaffenheit des Flusses sei an dieser Stelle wieder jener oberhalb Breslau gleich.

Die Frage von der Selbstreinigung der Flüsse hat namentlich in England, wo ihnen oft ungeheure Mengen von Abfällen der verschiedensten Art zugeführt werden, frühzeitig reges Interesse erweckt; dort hat man auch zuerst versucht, diese wichtige Naturerscheinung im Kleinen zu studieren.

Letheby liess ein Gemisch von 1 Pint Londoner Canalwasser mit 20 Pint gewöhnlichem Wasser aus einer Höhe von 5·2 Meter in $5\frac{1}{2}$ Minuten herabfliessen und erhielt nach fünfzigmaliger Wiederholung dieser Operation ein Wasser, welches zur Oxydation der organischen Substanzen (wahrscheinlich mit Chamäleonlösung?) weniger als ein Viertel derjenigen Sauerstoffmenge brauchte, welche vor Beginn des Versuches erforderlich war.[3] Daraus wurde der Schluss gezogen, dass in einem Flusse während eines Laufes von etwa 12 (engl.) Meilen sämmtliche organische Substanz oxydirt werden könnte. Die Selbst-

---

[1] Nichols 7. Bericht des Gesundheitsamtes von Massachusetts; ref. in Brunner u. Emmerich, Die chemischen Veränderungen des Isarwassers während seines Laufes durch München; Zeitschr. f. Biologie, 14, 270.

[2] Beiträge zur Schwemmcanalisation und Wasserversorgung der Stadt Breslau; Ergänzungshefte zum Centralblatt für allgemeine Gesundheitspflege, herausgegeben von Finkelnburg, Lent und Wolffberg. I. Band, II. Heft.

[3] W. Rippl, Das englische Wasserversorgungssystem. Vortrag, gehalten in der österr. Gesellschaft f. Gesundheitspflege am 22. April 1882.

reinigung wäre demzufolge ein ausserordentlich schnell verlaufender Process.

Ganz anders hat sich Brodie[1] über diese Frage geäussert. Der gewöhnliche Sauerstoff übe keine schnell oxydirende Wirkungen auf die organischen Substanzen aus, wir müssten sie zur vollkommenen Zerstörung mit den kräftigsten chemischen Agentien behandeln, und der Gedanke, dass man ihrer Herr werden könne, indem man sie in wässeriger Lösung kurze Zeit der Luft aussetzt, sei thöricht!

Dies haben auch die eingehenden Versuche von Frankland[2] bestätigt, welcher u. A. wie Letheby Londoner Sielwasser und reines Wasser mischte, und diese Flüssigkeit, die nun in 100.000 Theilen 0·264 organischen Kohlenstoff enthielt, mittelst eines Hebers in dünnem, 1 Meter langem Strahle von einem Gefässe in ein anderes fliessen liess. Das so behandelte Wasser enthielt dann nach

96 Stunden noch 0·250 org. C
und nach 192 „ „ 0·200 „ „

Aus diesen und ähnlichen Versuchen folgerte Frankland, dass durch innige Berührung von mit organischen Substanzen verunreinigten Wässern eine Oxydation wohl stattfinde, dass dieser Vorgang aber — im Gegensatz zu Letheby's Angaben — verhältnissmässig sehr viel Zeit erfordere.

Frankland hat ferner das Themsewasser an verschiedenen Stellen untersucht und berechnet, dass dasselbe erst nach einem mindestens 20 (deutschen) Meilen langem Laufe seine ursprüngliche Reinheit wieder erlangen könnte.

Von Interesse sind auch die Mittheilungen Rippl's[3] über das Wasserversorgungssystem vieler englischer Städte; dasselbe besteht darin, dass man in einem geeigneten Thale durch Anlage eines Querdammes sämmtliche Wasserläufe in dem so erhaltenen grossen Reservoir sammelt und nun erst das Wasser durch Canal- und Rohrleitungen dem Verbrauchsorte zuführt. In diesen grossen Behältern setzen sich die trübenden Theilchen ab, und von den

[1] Brunner u. Emmerich l. c.

[2] Frankland, Über Trinkwasser; A. W. Hofmann's Bericht über die Entwicklung der chem. Industrie. 1875.

[3] Rippl l. c.

organischen Substanzen nimmt man an, dass sie durch die lang dauernde Einwirkung der Luft vollständig oxydirt werden. Solches Wasser ist meist vollkommen klar und entspricht fast immer allen Anforderungen, die man in hygienischer Hinsicht an ein gutes Trinkwasser stellt.

Emmerich[1] hält die Bewegung der Luft und des Wassers für die grossartigsten Reinigungsverfahren der Natur. Der Sauerstoffgehalt des Isarwassers (im Stadtbache) nimmt unmittelbar hinter der Einmündung des Münchner Sielwassers eine halbe Stunde lang ab, dann aber fängt er plötzlich an zuzunehmen, und bei der Einmündung des Baches in den Hauptstrom (2 Stunden unterhalb München) hat er seine frühere Höhe erreicht.

Die Selbstreinigung wird, abgesehen von den Klärungsvorgängen, häufig für eine directe, rein chemische Oxydationserscheinung (Aëration) erklärt, oder wenigstens scheinbar stillschweigend angenommen; seltener findet man die Meinung ausgesprochen, dass diese Vorgänge nur, oder hauptsächlich unter Mitwirkung von Organismen zu stande kommen. So spricht Frankland von „der Oxydation der organischen Substanz unter dem Einflusse von Licht und Luft", Wolffhügel von „Oxydationsvorgängen", Rippl von „der oxydirenden Wirkung der Luft". Auch Hulwa, welcher an Oderwasser, das er in lose verschlossenen Flaschen hatte stehen lassen, nach längerer Zeit eine beträchtliche Abnahme der Oxydirbarkeit beobachtete, sagt, dass diese Erscheinung „nach den bisherigen Erfahrungen der Chemie nicht anders als durch eine langsame, aber beständig wirkende Oxydation durch den Sauerstoff der Luft erklärt werden kann", fügt aber später hinzu, dass bei der Selbstreinigung im Grossen wahrscheinlich auch das niedere und höhere vegetabilische und animalische Leben von Bedeutung sein könnte.[2]

Endlich gab Virchow in der 10. Versammlung des Deutschen Vereines für öffentliche Gesundheitspflege der Überzeugung

---

[1] Bericht über die 10. Versammlung d. Deutschen Vereines f. öffentl. Gesundheitspflege zu Berlin, p. 64.

[2] Hulwa's Abhandlung (cit. p. 2) wurde mir erst unmittelbar vor Abschluss meiner Arbeit zugänglich.

Ausdruck, dass die Oxydation der organischen Substanzen in den Flussläufen durch Vermittlung von Organismen stattfinde.

Da die wichtige Frage, ob von den beiden Ansichten über das Wesen der Selbstreinigung die eine oder die andere oder beide richtig seien, durch Laboratoriumsversuche noch nicht entschieden zu sein schien — ich konnte wenigstens in der mir zugänglichen Literatur eine Angabe hierüber nicht finden — so habe ich es auf Veranlassung von Herrn Prof. Maly unternommen, einige Versuchsreihen anzustellen, welche in dieser Angelegenheit zur Aufklärung beitragen mussten.

Die Art, wie diese Untersuchungen anzustellen seien, ergibt sich hier von selbst: besteht die Selbstreinigung in einer einfachen, rein chemischen Oxydation, so muss durch eine möglichst intensive Einwirkung der Luft, also durch Schütteln von an organischen Verunreinigungen reichem Wasser mit Luft, eine schnellere Abnahme der Oxydirbarkeit[1] erzielt werden können, als durch blosses Stehenlassen des Wassers an der Luft, ja die Abnahme der organischen Substanz müsste auch eintreten, wenn man alle Organismen im Wasser tödtete und nur keimfreier Luft den Zutritt gestattete. Ist die Selbstreinigung hingegen ein biologischer Prozess, so muss im letzteren Falle das Wasser unverändert bleiben.

Die Versuche betrafen daher:

1. die Einwirkung gewöhnlicher Luft auf an „organischen Substanzen" reiche Wässer und

2. die Einwirkung keimfreier Luft auf sterilisirtes Wasser.

Nebenbei wurde auch der Einfluss von Ozon und Wasserstoffhyperoxyd auf derlei Wässer geprüft, um zu erfahren, ob diese beiden, sonst so energisch wirkenden Agentien im Stande sind, bei der Selbstreinigung eine nennenswerthe Rolle zu spielen.

Als Versuchsobject diente in mehreren Fällen aus einem Bassin des hiesigen botanischen Gartens geschöpftes Wasser, welches durch Abfälle animalischer, hauptsächlich aber vegetabilischer Natur verunreinigt war, denn das Bassin enthält Wasserpflanzen und kleine Fische. In einem anderen Falle wurde das

[1] Dieselbe gilt uns ja als Mass für die im Wasser enthaltenen „organischen Substanzen".

Wasser eines grösseren Fischteiches (Hilmteich), endlich auch künstlich mittelst Cloakenflüssigkeit verunreinigtes Wasser benützt.

Im folgenden sind die wichtigsten meiner Versuche beschrieben; die daraus gezogenen Folgerungen sollen am Schlusse der Arbeit angeführt werden. Jene werden nicht in der Reihenfolge vorgeführt, wie sie angestellt wurden, sondern sind der bessern Übersicht halber so geordnet, dass die mit verschiedenen Wässern (zu verschiedenen Zeiten) gemachten gleichartigen Versuche zusammengefasst erscheinen.

I. Verhalten der Wässer beim Stehenlassen an der Luft.

Um die Veränderungen kennen zu lernen, welche der Luft frei exponirte Wässer erleiden, wurden Proben derselben in grossen, halb gefüllten, lose verschlossenen Flaschen theils im directen Sonnenlicht, theils im zerstreuten Tageslicht bei Zimmertemperatur stehen gelassen, nachdem jedes Wasser vorher auf seine Oxydirbarkeit,[1] einige Wässer aber auch auf den Gehalt von Ammoniak, Salpeter- und salpetriger Säure geprüft worden waren. Schon nach mehreren Tagen zeigte die Oxydirbarkeit unserer Wässer eine nennenswerthe Abnahme; nach Wochen und Monaten aber wurde beim Titriren nur mehr die Hälfte, ja selbst ein Viertel (und weniger) von der Anfangs erforderlichen Chamäleonmenge gebraucht.

---

[1] Dieselbe wurde stets nach dem Verfahren von Kubel bestimmt. Zur Erzielung möglichst gleichwerthiger Resultate wurden 100 CC. Wasser unter Zusatz von 5 CC. verd. H_2SO_4(1:3) und 10—15 CC. Chamäleonlösung (1 CC. 0·63 Mgr. $C_2H_2O_4.2H_2O$ entsprechend) 5 Minuten lang gekocht, dann ebensolange auf dem Drathnetze abkühlen gelassen, $^1/_{100}$ Norm. Oxalsäure zugesetzt und endlich nach dem vollständigen Klarwerden wieder Chamäleonlösung zutropfen gelassen. Meist wurden wenigstens zwei solche Versuche gemacht, welche auf 0·1—0·2 CC. übereinstimmten; mitunter waren die Differenzen auch grösser. In allen Fällen sind natürlich die Mittelzahlen angegeben. Wenn diese Methode, die organ. Substanzen zu bestimmen, auch durchaus nicht gestattet, auf die absolute Menge derselben zu schliessen, so war ihre Anwendung doch hier, wo es sich immer nur um die Zu- oder Abnahme der in einem und demselben Wasser enthaltenen organ. Materie handelte, gewiss zulässig.

a) Filtrirtes Wasser vom Gartenbassin.

1. Probe, geschöpft am 21. November 1883.

Farbe: gelblich braun, Geruch: unangenehm, faulig.

Oxydirbarkeit: 100 CC. Wasser erforderten 11·6 CC. $^1/_{100}$ Norm. Chamäleonlösung (1 CC. derselben entsprach 0·63 Mgr. kryst. Oxals.).

Nach ein Paar Tagen war das Wasser trüb und gelblich und hatte rostbraune Flocken (welche unter dem Mikroskop als Fäden erschienen) abgesetzt. Bei längerem Stehen nahm diese Vegetation fortwährend zu, das Wasser wurde reiner und klarer, und war nach etwa 90 Tagen von reinem Trinkwasser kaum oder nicht zu unterscheiden.

An obiger Chamäleonlösung wurden für 100 CC. Wasser verbraucht:

nach 0,	1,	2,	3,	6,	10,	14,	90,	120 Tagen
11.6,	10·6,	10·3,	8·8,	8·5,	7·6,	6·2,	4·1,	2·4 CC.

2. Probe, geschöpft am 15. December 1883.

Geruch und Farbe wie oben, aber nicht so intensiv.

Oxydirbarkeit: 100 CC. Wasser verbrauchten 6·6 CC. Chamäleonlösung.

Beim Stehenlassen nahm die Oxydirbarkeit ebenfalls ab; sie entsprach für 100 CC. Wasser nach

0,	3,	5,	12,	30,	75 Tagen
6·6,	6·6,	5·7,	5·4,	3·7,	2·7 CC. Cham.-Lösung.

Auch diesmal war das Wasser vollkommen klar geworden, am Boden hatten sich reichlich Algen etc. abgesetzt.

3. Probe, geschöpft am 20. December 1883.

Geruch und Farbe wie oben.

Oxydirbarkeit: 100 CC. Wasser entsprachen 9·1 CC. Chamäleonlösung.

Die Abnahme der gelösten organischen Substanzen beim Stehenlassen zeigt folgende Reihe: 100 CC. Wasser verbrauchten

nach 0,	2,	4,	13,	60,	120 Tagen
9·1,	8·7,	9·3[1],	6·7,	3·6,	3·4 CC. Cham. Lösung.

[1] Über den Grund dieser Zunahme s. d. folgende Versuchsreihe.

b) Filtrirtes Hilmteichwasser.

Geschöpft am 20. April 1884; trüb; von unangenehmem Geruch.

Um ein möglichst klares Bild von den bei der spontanen Reinigung eintretenden Veränderungen zu gewinnen, wurde ausser der Oxydirbarkeit auch der Gehalt an Ammoniak (colorimetrisch mittelst Nessler's Reagens) an Salpetersäure (als NO nach Tiemann) und an salpetriger Säure (mittelst *m*-Phenylendiamin) zu Beginn und am Ende des Versuches bestimmt.

100 CC. Wasser brauchten 12·0 CC. Chamäleonlösung.

100.000 Theile Wasser enthielten 0·5 Theile NH_3.

Salpeter- und salpetrige Säure waren kaum nachweisbar.

Nach mehrwöchentlichem Stehen nahm die Oxydirbarkeit zuerst ab (am 2. Mai 9·4 CC., am 29. Mai 6·8 CC. Cham.-Lsg.), dann aber rapid zu und entsprach am 26. Juni circa 38 CC. Chamäleonlösung pro 100 CC. Wasser. (Gut übereinstimmende Zahlen waren nicht zu erhalten). Der Grund dieser auffallenden Erscheinung war die Gegenwart von viel salpetriger Säure, denn das Wasser reducirte nun schon in der Kälte Chamäleon und gab auch starke *m*-Diamidobenzol- und Jodkaliumstärke-Reaction. Jenen 38 CC. Chamäleonlösung entsprächen 7·2 Theile N_2O_3 in 100.000 Theilen Wasser; durch Bestimmung als NO wurden 6·1 Theile gefunden.[1] Am 29. October war die salpeterige Säure verschwunden, die Oxydirbarkeit auf 2·7 CC. Chamäleonlösung pro 100 CC. Wasser gesunken, der Gehalt an Salpetersäure auf 20·2 Theile N_2O_5 in 100.000 Theilen gestiegen, Ammoniak dagegen nicht mehr nachweisbar.

c) Mit Cloakenflüssigkeit verunreinigtes Wasser.

Wasserleitungswasser, welches mit etwas filtrirter Cloakenflüssigkeit vermischt worden war, liess äusserlich weder durch

---

[1] Eine solche Zunahme der Oxydirbarkeit (von 0·043 Mgr. O auf 0·327 Mgr. O) beobachtete auch Schottler an einem 3 Wochen lang gestandenem Wasser und erklärte dieselbe für eine Zunahme der organ. Substanz; (Fresenius, Z. f. anal. Ch. **16**, 359) vermutlich war auch damals N_2O_3-Bildung eingetreten.

den Geruch, noch durch das Aussehen eine Verunreinigung erkennen.

Oxydirbarkeit: 100 CC. Wasser brauchten 12·8 CC. Chamäleonlösung.

Ammoniak: 0·7 Theile in 100.000 Theilen.

Salpetersäure: 0·1 in 100.000 Theilen; sehr schwache Brucinreaction.

Salpeterige Säure: kaum nachweisbar.

Beim Stehenlassen an der Luft verhielt sich dieses Wasser wie das vorige, denn nach $2^1/_2$ Monaten hatte sich wieder viel salpetrige Säure gebildet (Gef. durch Bestimmung als NO und bloss auf N_2O_3 berechnet: 7·5 Theile N_2O_3 in 100.000 Theilen Wasser; durch Titriren mit kalter Chamäleonlösung: 6·8 Theile). Dieselbe verschwand allmälig, und nach weiteren 2 Monaten war der Chamäleonverbrauch auf 6·2 CC. pro 100 CC. Wasser gefallen, der Gehalt an Salpetersäure auf 10 Theile in 100.000 Theilen gestiegen, Ammoniak dagegen nicht mehr nachweisbar. Das Wasser war natürlich klar, doch zeigte sich an der Oberfläche eine dünne weisse Haut, und am Boden hatten sich ebensolche Flocken abgesetzt.

Diese Versuche zeigen zunächst, dass sich die Selbstreinigung frei fliessender oder stehender Gewässer recht gut im Kleinen nachahmen lässt, wenngleich sich hiebei manche Unterschiede zeigen, zu denen namentlich das starke Auftreten der Salpetersäure bei den im Laboratorium gestandenen Wässern gerechnet werden muss. Darauf hat auch Hulwa in seiner mehrfach erwähnten Schrift hingewiesen. Das geringere Auftreten der Nitrate in Flussläufen erscheint übrigens sehr erklärlich, wenn man bedenkt, welch wichtiges Nahrungsmittel dieselben für die an den Ufern lebenden Pflanzen abgeben müssen.

Wir ersehen ferner dass (in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Frankland's Forschungen) das Verschwinden, richtiger die Abnahme der organischen Substanz sehr langsam vor sich geht. Auch bemerkt man einen Unterschied zwischen dem vorzugsweise durch vegetabilische, humusartige Substanzen verunreinigten Wasser (Versuche *a)* 1, 2, 3) gegenüber den (stickstoffreiche) Bestandtheile animalischer Abstammung ent-

haltenden Wässern (Versuche *b)* und *c)*), indem bei den Letzteren unter den Zersetzungsproducten immer viel Salpetersäure auftritt, die in einem vorhergehenden Stadium als salpetrige Säure vorhanden ist.

Sollen diese Processe — wie oben bemerkt — eine rein chemische Oxydationswirkung des Luftsauerstoffes sein, so muss durch möglichste Vergrösserung der Berührungsfläche von Luft und Wasser auch offenbar eine raschere Selbstreinigung zustande kommen. Darüber geben die folgenden Versuche Aufschluss.

II. Verhalten der Wässer beim Schütteln mit Luft.

Durch kräftiges Schütteln von Wasser mit atmosphärischer Luft kann man den oben ausgesprochenen Zweck am sichersten erreichen, denn bei dieser Operation tritt die Luft in unzählbaren kleinen Bläschen ins Wasser, dieses in Form der feinsten Tröpfchen in jene; die sich immer erneuernde Berührungsfläche wird ins Unberechenbare vergrössert. Um das Schütteln durch längere Zeit mit gehöriger Intensität fortsetzen zu können, wurde zu diesem Zwecke ein von einem Schmid'schen Wassermotor betriebener Schwarzenbach'scher Schüttelapparat,[1] welcher 150—200 Touren per Minute machte und täglich circa 6 Stunden im Gange war, verwendet. Das Wasser kam in sorgfältig gereinigte Zweiliterflaschen, welche halb gefüllt wurden. Nach je einem Schütteltage wurde frische Luft eingesaugt.

Die so geschüttelten Wässer veränderten sich mit Bezug auf ihre Oxydirbarkeit merkwürdiger Weise kaum so stark als die der freien Luft ausgesetzten; es war also die Luft auch bei dieser intensiven Einwirkung nicht im Stande, die organischen Substanzen schneller zu verändern, als unter gewöhnlichen Umständen, wo ihr das Wasser eine verhältnissmässig nur kleine Oberfläche darbietet.

Vom 15. Tage an wurden die Proben wie in der Reihe I nur mehr stehen gelassen, nachdem von einem längeren Schütteln nach dem oben Gesagten kein Erfolg zu erwarten war.

---

[1] Fresenius, Z. f. anal. Ch. 18, 531.

Der Versuch wurde mit dem unter I *a)* verwendeten

Wasser vom Gartenbassin (1. Probe)

ausgeführt. Bei den von Zeit zu Zeit angestellten Titrirversuchen mit Chamäleonlösung wurden die folgenden Zahlen notirt, welche von den beim einfach stehengelassenen Wasser erhaltenen nicht wesentlich abweichen, wie ein Vergleich mit den auf Seite 73 unter I. *a)* Probe 1 angegebenen Versuchsresultaten ergibt.

	geschüttelt					stehen gelassen		
Nach	0,	3,	6,	10,	14,	20,	90,	120 Tagen
wurden	11·6,	9·7,	8·0,	7·4,	6·6,	6·0,	3·2,	2·3 CC.

der $^1/_{100}$ Norm. Chamäleonlösung für 100 CC. Wasser verbraucht.

Die an diesen beiden Reihen gemachten Beobachtungen liessen es wahrscheinlich erscheinen, dass eine directe Oxydation, wie sie vielfach angenommen wird, bei der Selbstreinigung nicht stattfindet; man musste vielmehr an die zweite der oben erwähnten Ansichten von dem Wesen dieser Oxydationsvorgänge denken, an die Ansicht, nach welcher die spontane Reinigung ein vitaler Process sein sollte, namentlich wenn man die an der Luft gestandenen Wässer genauer betrachtete: sie waren zwar vollkommen klar geworden, aber am Boden der Gefässe hatten sich in Form eines braunen, grünen oder weissen Schlammes die verschiedensten Organismen abgesetzt. Es musste sich förmlich die Überzeugung aufdrängen, dass diese es seien, welche die Selbstreinigung bewirken. Dass dem wirklich so ist, zeigen

III. Versuche mit sterilisirtem Wasser.

Wenn es gelingt, in einem organisch verunreinigten Wasser alle Organismen und deren Keime zu tödten, und den Zutritt von Sporen aus der Luft vollkommen zu verhindern, so verändert sich ein solches Wasser nicht in Bezug auf seinen Gehalt an organischen Substanzen, an Ammoniak, Salpetersäure u. s. w., oder wenigstens nicht so weit, als die Fehlergrenzen einer gewöhnlichen Wasseranalyse reichen.

a) Wasser vom Hilmteich.

In einem geräumigen Kolben wurden circa $1^1/_2$ Liter Wasser zum lebhaften Sieden erhitzt und dann vorsichtig erkalten gelassen. Derselbe war vorher sammt dem Wasser gewogen und mit einem dichten Bausch Bruns'scher Watta verschlossen worden, ersteres desshalb, um die durch das Kochen herbeigeführte Concentration des Wassers vor dem Titriren wieder corrigiren zu können.

α) Die so behandelte Probe wurde 40 Tage mit Wattaverschluss stehen gelassen; der Chamäleonverbrauch betrug nun für 100 CC. Wasser noch immer 11·8 CC. (gegen 12·0 CC., welche beim frisch geschöpften Wasser erforderlich waren). Das abermals gekochte, gewogene und mit Wattaverschluss stehen gelassene Wasser verbrauchte nach weiteren 130 Tagen noch immer 11·8 CC. Chamäleonlösung, und hatte sich auch mit Bezug auf den Gehalt an Ammoniak, Salpeter- und salpetriger Säure nicht nachweisbar verändert.

β) In einer Zweiliterflasche wurde circa 1 Liter Wasser im Kochsalzbade unter Wattaverschluss gekocht, dieselbe nach sehr langsamem Erkalten mit einem wohl eingeschliffenen, bei 130° sterilisirten Glasstopfen verschlossen und nun 4 Wochen je 3mal wöchentlich jedesmal 8—10 Stunden wie beim Versuch II geschüttelt, endlich noch 4 Monate stehen gelassen. Beim vorsichtigen Öffnen der Flasche war keine Druckabnahme im Innern zu beobachten, und die Zusammensetzung des Wassers hatte sich (natürlich in Bezug auf das ursprüngliche Volumen) nicht geändert.

γ) Eine dritte Probe wurde wie unter α behandelt, aber nach dem Abkühlen mit etwas von dem von früher stehen gelassenen Wässern abgesetzten grünen und braunen Schlamme versetzt. Nach einigen Monaten war sehr lebhafte Algen-Vegetation eingetreten, der Chamäleonverbrauch war am Ende des Versuches (nach 170 Tagen) 3·4 CC., Ammoniak und salpetrige Säure waren nicht nachweisbar, dagegen Salpetersäure in einer Menge von 1·5 Theile in 100.000 Theilen Wasser gefunden.

Ebenso exact gelangen die Versuche mit

b) Cloakenwasser,

welches beim Stehenlassen an freier Luft das unter I *c)* beschriebene Verhalten zeigte. Mit diesem Wasser wurden am 27. Juli 1884 drei Kolben mit langem Halse, welch letzterer noch in ein dünnes knieförmig gebogenes Rohr ausgezogen war, beschickt, gewogen, der Inhalt zum heftigen Sieden gebracht, nach etwa 1 Stunde ein Theil des ausgezogenen Halses zum Glühen erhitzt, das offene Ende mittelst sterilisirtem Wattapfropf verschlossen und nun langsam erkalten gelassen, wobei also nur filtrirte, geglühte Luft in's Innere des Kolbens eindringen konnte. Bei der am 15. December ausgeführten Untersuchung zeigte sich wieder, dass das Wasser sich mit Bezug auf den Gehalt an organischer Substanz, an Ammoniak[1] und Salpetersäure absolut nicht verändert hatte.

IV. Verhalten der Wässer bei der Einwirkung von Ozon und Wasserstoffhyperoxyd.

Um zu sehen, ob vielleicht unter dem Einflusse von Ozon oder Wasserstoffsuperoxyd, welchen Substanzen man ja auch eine besondere luftreinigende Wirkung zuzuschreiben geneigt ist, eine schnelle Selbstreinigung stattfindet, wurden folgende Versuche angestellt:

a) Ein Liter Bassinwasser (I *a)*, 1. Probe) wurde mit Ozon am Schüttelapparate behandelt. Man leitete zunächst einen trockenen Sauerstoffstrom durch eine Siemens'sche Röhre, liess den ozonisirten Sauerstoff zwei Waschapparate passiren, von denen der eine mit Lauge, der andere mit Wasser gefüllt war (welch letzteres zeitweise — aber immer mit negativem Erfolge — auf HNO_2 geprüft wurde) und führte das Gas endlich in die halb mit Wasser gefüllte Schüttelflasche. Kautschukröhren waren natürlich beim ganzen Apparate ausgeschlossen, alle Verbindungen wurden

[1] Selbstverständlich konnte der Ammoniak-Gehalt nicht der des ursprünglichen Wassers sein, da dasselbe beim Kochen alkalische Dämpfe abgab, aber er stimmte vollkommen mit dem einer Probe überein, die gleichzeitig mit dem zu sterilisirenden Wasser gekocht und sofort auf NH_3 geprüft worden war.

durch Glasschliffe oder Siegellack hergestellt. Nachdem man ein Paar Minuten Ozon eingeleitet hatte, wurde die mit einem sorgfältig eingeschliffenen Glasstopfen verschlossene Flasche bis zum Verschwinden der Ozonreaction geschüttelt. Dazu war anfangs nur kurze Zeit erforderlich, später mehrere Stunden, endlich Tage. Nach einer Woche war das Wasser im Vergleiche zu dem bloss stehen gelassenen und zu dem mit Luft geschüttelten auffallend klar und setzte auch keine Flocken beim Stehenlassen ab. Aber auch unter diesen, für die Oxydation alles direct oxydirbaren denkbar günstigsten Umständen, war kaum eine raschere Abnahme der organischen Substanz zu beobachten, als bei dem bloss der freien Luft ausgesetzten Wasser. Daher wurde nach 20 Tagen kein Ozon mehr eingeleitet, sondern das Wasser auch nur mehr stehen gelassen.

Die Verminderung der Oxydirbarkeit zeigen folgende, beim Titriren mit Chamäleonlösung (von dem stets angewandten Gehalt) notirten Zahlen. Für 100 CC. Wasser wurden verbraucht

	geschüttelt					stehen gelassen
nach	0,	3,	6,	10,	14,	20,	90 Tagen
	11·6,	8·7,	8·4,	6·8,	6·1,	5·0	4·0 CC.

b) Als das am 20. December 1883 geschöpfte Gartenbassinwasser (Probe 3, pag. 73) ebenso behandelt wurde, betrug der Verbrauch an Chamäleonlösung für 100 CC. Wasser

	geschüttelt			stehen gelassen	
nach	0,	9,	20,	40,	70 Tagen
	9·1,	5·2,	4·5,	4·1,	3·9 CC.

c) Ein Liter von dem am 15. December 1883 geschöpften Bassinwasser (Probe 2, pag. 73) wurde mit 100 CC. käuflichem (von Schuchardt bezogenem) Wasserstoffsuperoxyd versetzt. Nach mehrtägigem Stehen war das Wasser vollkommen farb- und geruchlos geworden. Um es mit Chamäleon titriren zu können, wurde das Wasserstoffsuperoxyd vor dem Zusatz des Permanganats durch gelindes Erwärmen mit etwas Kalilauge und Kupfersulphatlösung zerstört. Die erhaltenen Zahlen sind aber von untergeordnetem Werthe, weil man einwenden kann, es seien

die organischen Verunreinigungen nicht direct durch das H_2O_2, sondern erst durch den bei der nothwendigen Zerstörung desselben (mittelst des CuO_2H_2) frei gewordenen Sauerstoff oxydirt worden.

Für 100 CC. Wasser wurden verbraucht

nach	12,	30 Tagen
	5·0,	2·0 CC. Chamäleonlösung.

Diese wenigen Versuche zeigen, dass die organischen Substanzen durch Ozon oder Wasserstoffsuperoxyd wohl — wie zu erwarten war — zerstört werden, aber doch viel langsamer, als man nach den sonstigen energischen Reactionen dieser Körper glauben könnte; namentlich ist bemerkenswerth, dass die Oxydirbarkeit der mit Ozon behandelten Wässer kaum schneller abnahm, als jene der bloss sich selbst überlassenen.

Wenn wir nun nochmals auf die Versuchsreihen I, II und III (Verhalten der Wässer beim Stehen an der Luft, beim Schütteln mit Luft, Verhalten sterilisirter Wässer) zurückblicken, so erkennen wir, dass eine Selbstreinigung, eine Veränderung der in einem Wasser enthaltenen organischen und anorganischen Verunreinigungen nur dort eingetreten ist, wo dasselbe nicht durch Kochen sterilisirt und beim Aufbewahren gegen das Eindringen von Keimen geschützt worden war; wenn dagegen ein sterilisirtes Wasser nachträglich der Luft frei ausgesetzt, oder durch gewöhnliches Wasser inficirt wird (Vers. III *a*), *γ*, pag. 88), so erleidet es ganz dieselben Veränderungen, wie die an der Luft stehen gelassenen Wässer: die Oxydirbarkeit und der NH_3-Gehalt nehmen ab und salpetrige, beziehungsweise Salpetersäure werden gebildet. Also dort, wo die Entwicklung von Organismen unmöglich gemacht wird, dort ist auch eine Selbstreinigung unmöglich; umgekehrt ist daraus zu schliessen, dass diese von jener abhängig ist.

Dass sich die nicht sterilisirten, geschüttelten Wässer ähnlich wie die nicht geschüttelten verhalten haben, widerspricht dieser Erklärung nicht. Horwarth hat allerdings gezeigt,[1] dass

[1] J. B. f. Thierchemie, 8, 380.

durch eine heftige und verhältnissmässig lange (48 Stunden) andauernde Schüttelbewegung Bacterien die Entwicklungsfähigkeit benommen werden kann, aber bei unseren Versuchen wurde das Schütteln nach 6 — 8 Stunden immer wieder bis zum nächsten Tage unterbrochen, wobei die betreffenden Organismen ihre Lebensthätigkeit gewiss ungestört fortsetzen konnten.

Eine directe Oxydation durch den Luftsauerstoff findet bestimmt nicht statt; Ozon und Wasserstoffhyperoxyd mögen bei dem sich im Haushalte der Natur abspielenden Reinigungsprozess vielleicht mitwirken, jedenfalls spielen sie aber nur eine untergeordnete Rolle.

Auf die Natur jener Organismen einzugehen, lag dieser Arbeit gänzlich ferne, und sicherlich ist es auch nicht die eine oder die andere Species, welche die Selbstreinigung bewirkt, sondern es dürfte je nach dem Grade der Verunreinigung, vielleicht nach Temperatur und Luftzutritt, nach schneller oder geringerer Strömung und vielen anderen Umständen die Art dieser Lebewesen wechseln, wie man einen solchen Wechsel auch schon vielfach in einem und demselben Wasserlaufe in den verschiedenen Stadien seiner Verunreinigung beobachtet hat. Immer handelt es sich hiebei doch nur um die Überführung von hoch zusammengesetzten Verbindungen in immer einfachere, mit einem Worte um die Mineralisirung oder eine Art von Fäulniss der organischen Substanz.

Dadurch ist aber auch die spontane Reinigung des Wassers in den offenen Flussläufen mit der Reinigung im Boden in Zusammenhang gebracht, für welch' letztere Schlösing und Müntz bekanntlich gezeigt haben, dass die Bildung der Salpetersäure nur unter Mitwirkung von Organismen zustande kommt.

So erscheint die ganze Frage von der Selbstreinigung dem Gebiete der rein chemischen Forschung entrückt, denn nun wird es sich vorzugsweise darum handeln, die Natur und die Lebensbedingungen jener Organismen, soferne sie nicht schon bekannt sind,[1] kennen zu lernen.

---

[1] Vergl. z. B. Z. f. anal. Ch. Bd. 16, p. 59.

Nachschrift.

Diese Arbeit war vollkommen abgeschlossen und eben druckfertig, als mir das Werk „Reinigung und Entwässerung Berlins“ zugänglich wurde, bei dessen Durchsicht ich mich über eine in Hulwa's Abhandlung (cit. pag. 68) mittelst Fussnote angedeutete, aber nicht citirte Äusserung Alex. Müller's — nach welcher die Selbstreinigung unter Mitwirkung von Organismen stattfinden sollte — näher informiren konnte. Müller hat in dieser Frage viele Versuchsreihen theils mit Spüljauche, theils mit auf andere Art verunreinigten Wässern angestellt, und aus seinen Beobachtungen und Erfahrungen, die er ausserordentlich geistreich zu deuten wusste, wesentlich dieselben Schlüsse gezogen, wie sie oben angeführt worden sind.

Dass ich mir trotzdem erlaube, meine kleinen Beiträge zu diesem Thema der Öffentlichkeit zu übergeben, mag durch Folgendes gerechtfertigt erscheinen:

1. Meine Arbeit weicht in Bezug auf Methoden und Versuchsanordnung sehr von jenen Müller's ab; Versuche mit durch Hitze sterilisirten oder absichtlich zu diesem Zwecke auf andere Art desinficirten Wässern, ebenso Schüttelversuche oder auch Versuche mit Ozon und H_2O_2 habe ich dort z. B. nicht gefunden, und so können diese Zeilen vielleicht doch geeignet erscheinen, zu der überaus interessanten Frage von der Selbstreinigung, welche voraussichtlich noch manch' eingehende Bearbeitung und viel mehr Aufmerksamkeit erfordern wird, als ihr bisher zutheil geworden, einen weiteren Beitrag zu liefern.

2. Ausserdem aber sind Müller's Arbeiten und deren Ergebnisse in keiner grösseren deutschen chemischen Zeitschrift veröffentlicht oder auch nur referirt worden (vgl. Ber. d. D. chem. Ges., Jahresbericht üb. d. Fortschr. d. Ch., Chem. Centralbl., Wagner's Jahresbericht), ferner auch nicht in Muspratt's Chemie (Kerl und Stohmann), nicht in Ferd. Fischer's Technologie des Wassers, und namentlich nicht in Wolffhügel's Wasserversorgung (Pettenkofer's Handbuch der Hygiene)

erwähnt; es musste also auch angenommen werden, dass sie ebensowenig allgemein bekannt als gewürdigt werden, wie sie es wohl verdienten. Schon deshalb erscheint es mindestens wünschenswert, in einem chemischen Journal darauf hinzuweisen.

Müller hat seine Versuche schon in den Jahren 1869 und 1870 ausgeführt und Manches darüber — wie ich leider auch erst zu spät entdeckt habe—in den „Landwirthschaftlichen Versuchsstationen" (herausg. v. Friedrich Nobbe) mitgetheilt. Namentlich hat sich dieser Forscher im XVI. Bd. p. 263 ff. (1873) und im XX. Bd. p. 391 (1877) so klar und deutlich über die Selbstreinigung als einen vitalen Prozess ausgesprochen, dass es schwer begreiflich erscheint, wie eine solche, damals doch mehr oder weniger neue Idee von so vielen Seiten gänzlich ignorirt werden konnte.

Über die Dehydracetsäure.

Von **Ludwig Haitinger.**

Unter den bezüglich ihrer Stellung im chemischen Systeme noch nicht genügend erforschten organischen Säuren von verhältnissmässig einfacher Zusammensetzung hat die von Geuther entdeckte Dehydracetsäure $C_8H_8O_4$ schon öfter die Aufmerksamkeit der Chemiker erregt. Gleichwohl sind die vorliegenden Angaben über Umsetzungen derselben nur dürftige. Eine interessante Spaltung der Säure wurde von A. Oppenheim und H. Precht[1] aufgefunden. Erhitzt man nämlich Dehydracetsäure mit überschüssigem Ätznatron, so zerfällt sie glattauf in zwei Moleküle Essigsäure und je ein Molekül Kohlensäure und Aceton.

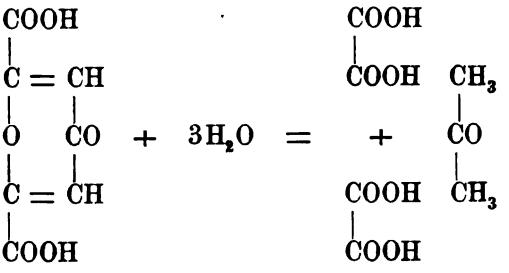
Vor Kurzem haben nun Lieben und Haitinger[2] constatirt, dass die Chelidonsäure in ähnlicher Weise behandelt, zwei Moleküle Oxalsäure und ein Molekül Aceton liefert. Die Analogie beider Zersetzungen ist auffallend und erlaubt die Möglichkeit vorauszusehen, dass den beiden genannten Säuren auch eine analoge Constitution zukomme. Man braucht nur anzunehmen, dass die beiden bei der Zerlegung durch Alkalien in die Oxalsäure eingehenden Carboxylgruppen der Chelidonsäure in der Dehydracetsäure durch Methylgruppen vertreten seien und letztere Säure ausserdem noch ein leicht abspaltbares Carboxyl enthalte.

Drücken wir diese Anschauung graphisch aus, so erhalten wir aus der Zersetzungsgleichung der Chelidonsäure:

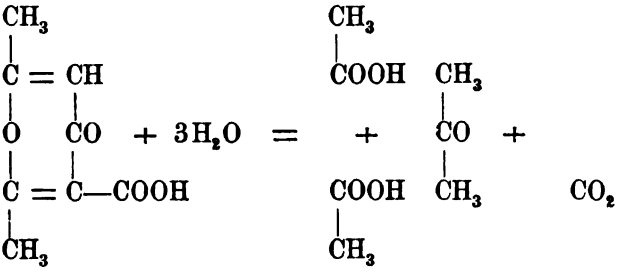
---

[1] Berichte d. deutsch. chem. Ges. 1876, p. 25.

[2] Monatshefte für Chemie. 1884, p. 339, vgl. auch 1883, p. 273 u. 339.



jene für die Dehydracetsäure:



Besteht nun wirklich eine so nahe Relation zwischen beiden Säuren, so muss sich jedenfalls auch in ihrem Verhalten zu anderen Reagentien eine gewisse Übereinstimmung zeigen.

Von der Chelidonsäure ist nun bekannt, dass sie durch blosse Digestion mit wässerigem Ammoniak in eine stickstoffhältige Säure, in Oxypyridindicarbonsäure (Ammonchelidonsäure) übergeführt wird:

$$C_7H_7O_6 + NH_3 = C_7H_5NO_5 + H_2O.$$

Es schien nun von hohem Interesse, zu prüfen, ob nicht auch Dehydracetsäure in ähnlich leichter Weise in ein Pyridinderivat verwandelt werden könne.

Der Versuch hat gezeigt, dass Letzteres wirklich der Fall ist. Erhitzt man nämlich Dehydracetsäure mit wässerigem Ammoniak, so erhält man als Hauptproduct — wenigstens bei länger fortgesetzter Digestion — eine Substanz, welche nach ihrem chemischen und physikalischen Verhalten ein vollkommenes Analogon des durch Erhitzen oben citirter Ammonchelidonsäure zu erhaltenden Oxypyridins ist. Der neue Körper ist fest, krystallinisch, leicht löslich in Wasser; er besitzt schwach basische Eigenschaften und liefert ein Chloroplatinat. Mit Brom behandelt,

gibt er ein Dibromsubstitutionsproduct. Destillirt man ihn mit Zinkstaub, so erhält man reichliche Mengen einer bei 147°—151° siedenden Base, welche sich durch Eigenschaften und Verhalten als ein Lutidin C_7H_9N zu erkennen gibt. Der durch Einwirkung von Ammoniak auf Dehydracetsäure direct erhaltene Körper ist daher als Oxylutidin C_7H_9NO aufzufassen. Seine Entstehung entspricht der Gleichung:

$$C_8H_8O_4 + NH_3 = C_7H_9NO + CO_2 + H_2O$$

und kann nur unter gleichzeitiger Bildung von Kohlensäure erfolgen. Führt man die Umsetzung in geschlossenen Gefässen durch, so kann man in der That die Gegenwart reichlicher Mengen von Ammoniumcarbonat unter den Reactionsproducten constatiren.

Ein ansehnlicher Theil der Dehydracetsäure reagirt jedoch mit Ammoniak ohne Kohlensäureabspaltung unter Bildung einer stickstoffhältigen Säure. Diese liefert, wenn über ihren Schmelzpunkt erhitzt, Kohlendioxyd und ebenfalls Oxylutidin und ist als eine Monocarbonsäure des letzteren aufzufassen.

$$C_8H_8O_4 + NH_3 = C_8H_9NO_3 + H_2O.$$

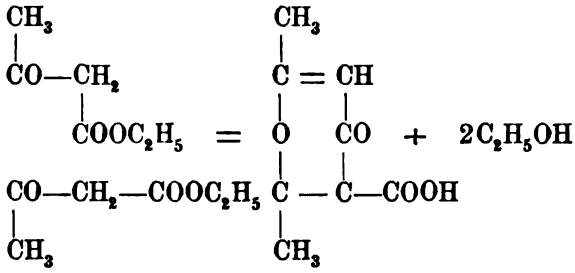
Es ist wahrscheinlich, dass die primäre Wirkung des Ammoniaks auf Dehydracetsäure ausschliesslich in dem durch letztere Gleichung angedeuteten Sinne verlauft, dass aber die gebildete Oxylutidincarbonsäure weiterhin theilweise zerfalle. Ausser den genannten scheinen gar keine anderen Körper gebildet zu werden.

Dieser glatte und einfache Übergang von stickstofffreien Substanzen zu Derivaten des Pyridins ist ein bisher so selten beobachteter, dass wir allen Grund haben — wenn sonst nichts dagegen spricht — Körper, welche dazu fähig sind, als zusammengehörig zu betrachten, und demnach Dehydracetsäure, Chelidonsäure, Mekonsäure etc. als Derivate einer und derselben Stammsubstanz $C_5H_4O_2$ aufzufassen.

Schliesslich möchte ich nicht unerwähnt lassen, dass die aus dem Vorhergehenden sich ergebende Formulirung der Dehydracet-

[1] Oppenheim und Precht geben an, dass durch Abdampfen von Dehydracetsäure mit Ammoniak ein Amid entstehe. Nach den mitgetheilten Eigenschaften dieser Verbindung ist es wahrscheinlich, dass dieselbe vorwiegend aus Oxylutidin bestand.

säure recht gut in Einklang zu bringen ist mit ihrer Entstehung aus Acetessigester.



Weit übersichtlicher gestaltet sich dieses Schema, wenn man statt der angewendeten die von Geuther vorgeschlagene Formel des Acetessigesters: $CH_3—COH=CH—COOC_2H_5$ benützt.

Die genauere Beschreibung der hier besprochenen neuen Verbindungen, sowie ihrer wichtigsten Umsetzungen hoffe ich in Bälde nachtragen zu können.

Die Sternkunde der südarabischen Kabylen.

Von **Eduard Glaser.**

Zwei Factoren sind es, welche in dem ganzen Umfange der arabischen Halbinsel die Kenntniss der Sterne seit undenklichen Zeiten zur Nothwendigkeit gemacht haben: einerseits die völlige Pfadlosigkeit, besonders im Innern Arabiens, welche den Wanderer gleich wie den Schiffer zwingt, in den unwandelbaren Gesetzen des gestirnten Himmels einen Wegweiser, einen Leitfaden zu suchen und anderseits der in manchen Theilen der Halbinsel, wie speciell im südwestlichen Districte, stark ausgebildete Ackerbau, welcher einen mit dem Sonnenjahre übereinstimmenden Kalender voraussetzt. Der Islam brachte die Mondrechnung ins Land, allein mit seinen, mit den Witterungsverhältnissen in keinem Zusammenhange stehenden Monaten konnten sich die Araber niemals recht befreunden. Dass in der sabäisch-himjarischen Periode des Landes ein Sonnenkalender in Anwendung stand, geht aus den Inschriften hervor, in denen in der That eine ganze Reihe von Jahresabschnitten (wahrscheinlich nicht Monate) genannt werden, von denen sich die Bezeichnungen einiger, und zwar stricte im Sinne des Sonnenjahres bis auf unsere Zeit unter den ackerbauenden Kabylen erhalten haben.

So bedeutet z. B. *Qijâẓ* (قياظ) die Erntezeit bis Ende April, *Dithâ* (دثا) die Ernteperiode bis Mitte Juni, *Bikâr* bis Mitte August, *Ṣurrâb* die Späternte bis Ende December.[1]

In ähnlicher Weise bedeuten auch *Ṣeif* (صيف) (Zeit vom 13. Kanun I bis 12. Adâr, also fast unserem Frühling entsprechend), *Djaḥr* (regenlose und heisse Zeit von Mitte April bis Mitte oder Ende Juni) und *Kharîf* (vom 13. Ḥadirân bis 12. Eilûl, d. h. von Mitte Juni

[1] In der Inschrift Glaser 158 kommen alle Erntezeiten mit Ausnahme von *Bikâr* vor, wie ich einer freundlichen Mittheilung des Herrn Dr. J. H. Mordtmann entnehme.

bis Mitte September orientalischer Rechnung) und (jedoch nicht bei den Kabylen) *Schitâ* (von Mitte September bis zum Beginne des *Seif*), Jahresabschnitte, die nach dem Sonnenlaufe abgegrenzt werden.

Ausser diesen Ernteperioden und Jahresabschnitten gibt es auch noch die sogenannten *Fawâkih*, d. h. Monatsbezeichnungen nach der Reife der Fruchtsorten. Diese jedoch scheinen mir ein Gemisch der beiden ersten und der später zu erörternden eigentlichen Sämannsmonate zu sein. Nur den Namen *'Yschwî* konnte ich als neu bezeichnen.

Wenn man dazu noch die sogenannten Sonnenstationen in Betracht zieht, die weiter unten besprochen werden sollen, so wird man leicht finden, dass die von den Himjaristen aus den Inschriften zusammengestellten 12 Monatsnamen nicht so ohne weiters als solche gelten können. Denn ausser den vorislamischen Jahresabschnitten *Dû Ḥidjat* und *Dû Salâm* finden sich in der von den Himjaristen (speciell von Dr. J. H. Mordtmann und Prof. D. H. Müller) zusammengestellten Liste von 12 Bezeichnungen — bei genauerer Prüfung der Inschriften wird man noch viele andere finden — folgende im Verlaufe dieser Abhandlung als Jahresabschnitte im Gegensatz zu Monaten nachzuweisende und schon oben nachgewiesene Namen: *Dithâ, Kharîf, Fer' Thaur, Dâbiḥî, Khabâja* [1] u. a.

Nach diesem Excurs sei es mir gestattet, jene Erkundigungen mitzutheilen, die ich direct aus dem Munde von Kabylen geschöpft habe. Ich beschränke mich auf Jemen, wenngleich ich auch für die übrigen Theile Arabiens fast vollständige Nachrichten besitze, und werde die Bezeichnungen genau in derjenigen vulgären Weise wiedergeben, wie ich sie selbst hörte.

Die im Jemen, besonders in den Bergen mit bewunderungswürdiger Regelmässigkeit wiederkehrenden Kälte- und Regenperioden haben eine zweifache Gliederung des Jahres zur Folge gehabt: die eine, eine einfache Eintheilung des Jahres in Monate,

[1] Die beiden letzteren dürften in den *Dû Abhi* und ﻑ٠٩٤٤ gleich خنب٠م (eigentlich خبايه vulgäre Bezeichnung für اخبيه) auf Seite 51 und 75 der „Sabäischen Denkmäler" der Herren Mordtmann und Müller stecken.

entspricht vollkommen unserem europäischen Kalender, insoferne wir es auch hier mit Sonnenmonaten zu thun haben. Die zweite hält sich strenge an die Regenzeiten. Dabei ist bemerkenswerth, dass die eigentliche arabische Astronomie mit ihren *Burûdj* und *Manâzil* des Mondes sowohl als der Sonne hier nur bei den gelehrten Städtern bekannt ist und verhältnissmässig wenig bei dem System der Kabylen mitspielt. Die beispielshalber im Nedjd sehr geläufigen Bezeichnungen *Sa'd el Bula'*, *Sa'd el Akhbîja*, *Sa'd es Su'ûd*, die dort zur Abgrenzung von Jahreszeiten dienen, sind unseren Beduinen im Jemen unter diesem Namen gegenwärtig fast unbekannt. Im Gegentheile bildet ihr System eine eigenartige Verquickung der Mond- und Sonnenrechnung.

Die Kabylen sagen: „Wir richten uns ausschliesslich nach den *Miqârene* (مقارنة).“ Unter einer *Miqrâne* (مقرانة) verstehen sie nicht etwa wie die arabischen Astronomen eine Conjunction (*Idjtimâ'*) überhaupt, sondern bloss die Conjunction des Mondes mit den Plejaden (*Thureja*). So sind denn die Plejaden der Grundpfeiler ihres Systems geworden.

Nun bezeichnen sie die einzelnen Monate wie folgt:

Tis'at'âsch (d. h. 19), *Sab'at'âsch* (17), *Khamst'âsch* (15), *Thlat'âsch* (13), *Ḥad'âsch* (11), *Tis'* (9), *Sab'* (7), *Khams* (5), *Thalâth* (3). Drei Monate bezeichnen sie gar nicht, sondern nennen nur eine innerhalb dieser drei Monate gelegene Nacht *Leilet walâsch*.

Diese Bezeichnung der Monate war mir lange ein Räthsel, zumal die Kabylen wohl die Namen, nicht aber einen Grund dafür anzugeben vermögen. Endlich scheint mir die *Leilet walâsch* den Schlüssel in die Hand gegeben zu haben. Die *Leilet walâsch* ist nämlich jener Moment, in welchem Sonne und Plejaden gleiche Rectascension haben, d. h. in Conjunction stehen; wenn also *walâsch* (wörtlich übersetzt „und nichts“) Conjunction von Sonne und Plejaden bedeutet, so dürfte z. B. *Thalâth* eine Entfernung der Sonne von diesem Gestirne im Betrage 3, *Khams* eine solche im Betrage 5 u. s. f. bedeuten. Diese Entfernungen könnten dann nichts anderes als die Zeiten sein, welche der Mond brauchen würde, um von der Sonne bis zu den Plejaden zu wandern; denn nur so erhält man als Resultat so ziemlich Monate. Weitere Erkundigungen bei den Kabylen scheinen meine Ansicht vollständig zu bestätigen.

Khams z. B. ist also derjenige Monat, in welchem Sonne und Plejaden um fünf tägliche Mondbewegungen von einander abstehen. Eine Mondbewegung, durchschnittlich zu 13 Graden gerechnet, ergäbe also einen Rectascensionsunterschied von 65 Graden oder 4 Stunden und 20 Minuten, was etwa um den 10. März herum der Fall ist. In der That begann im Jahre 1883 der *Khams* am 7. März und der *Thalâth* am 7. April. Es wird also bei den Kabylen der Anfang des Jahres mit der *Leilet walâsch* (circa 18. Mai) angesetzt, dann werden die Monate einfach zu je 30 Tagen gerechnet und nach der Entfernung der Sonne von den Plejaden oder richtiger nach der Zeit benannt, welche der Mond brauchen würde, um, von der Conjunction mit der Sonne ausgehend, die Conjunction mit den Plejaden (die sogenannte *Miqrâne*) zu erreichen.

Die im übrigen Oriente gebräuchlichen Monatsbezeichnungen (jüdisch-orientalische Namen, angewandt auf die Sonnenmonate des julianischen Kalenders), wie *Tischrîn awwal, Tischrîn thânî, Kânûn I, Kânûn II* u. s. w. bis *Eilul* sind in Südarabien nicht ins Volk, sondern nur in gelehrte *Djadâwil* (Ephemeriden, Kalender, Tabellen) eingedrungen. Sie sind bei den Kabylen noch weniger bekannt als die mohammedanischen Monate *Redjeb, Ṣafar, Rabî'* u. s. w.

Die beiden Monate oder vielmehr beinahe drei Monate, deren grössere Hälfte nach der *Leilet walâsch* liegt, heissen *Djaḥr* und bilden die regenlose und heisse Zeit.

Im Jemen unterscheidet man wie anderwärts vier Jahreszeiten, jedoch führen sie etwas geänderte Bezeichnungen. So nennt man beispielshalber den anderwärts *Rabî'a* bezeichneten Jahresabschnitt hier *Ṣeif* und die Jahreszeit nach dem *Djaḥr Kharîf*. *Ṣeif* und *Kharîf* haben Regen. Die trockene, kalte Jahreszeit heisst *Schitâ*.

Diese Ausdrücke werden jedoch von den Kabylen äusserst selten angewandt. Sie bedienen sich vielmehr der schon erörterten Monatsnamen und der sogenannten *Ma'âlim e ḍarâ'a* (Saatmarksteine), d. h. der heliakischen Auf- und Untergänge einzelner Hauptsterne und der gleichfalls schon erwähnten Bezeichnung der Jahreszeiten nach Ernten, wie *Qijâi, Dithâ, Bikâr* und *Ṣurrâb*.

Unter den Sternen, nach welchen sie sich in kleineren Zeiträumen, besonders nach dem *Djaḥr*, zu orientiren pflegen, spielen folgende eine Hauptrolle:

'Aleibe (عليبة), *'Alib* (علب), *Suheil* (سهيل), die *Rawâba'a* und zwar die *Rawâba'a el awwalîn* und die *Rawâba'a el âkhirîn*, ferner der *Khâmis*, der *Sâdis* und der *Sâbi'*.

Überdies haben die Beduinen die Eigenthümlichkeit, dass sie für jeden Abschnitt des Jahres zu 13 Tagen entweder einen wirklichen Sternnamen oder eine von Alters her ererbte Bezeichnung besitzen. Hierbei allerdings mag schon die nordarabische Astronomie, ganz besonders mit ihren sogenannten Mondstationen arg mitgespielt haben, was schon daraus folgt, dass den Beduinen nur einige dieser mit den arabischen Sonnenstationen übereinstimmenden Sterne, und zwar vorzüglich in dem Zwischenraume zwischen den Monaten *Thalâth* und *Tis'at' âsch* vollkommen geläufig sind, aber mit ganz eigenthümlichen Namen.

Nichts desto weniger will ich auch diese Namen mittheilen, weil vielleicht doch der eine oder andere aus der vorislamischen Zeit stammen könnte.

'Alib ist der von den Arabern *Schar'a* (Sirius?) bezeichnete Stern, *'Aleibe* soll bloss eine sechstägige Periode sein, die dem *'Alib* vorangeht. *Suheil* ist der Canopus, die *Rawâba'a*, ebenso wie der *Khâmis*, *Sâdis* und *Sâbi'* sind die sieben Hauptsterne des grossen Bären.

Um aber eine vollständige Orientirung in den Sternbezeichnungen der südarabischen Kabylen zu ermöglichen, will ich eine complete Tabelle der Namen der 28 dreizehntägigen Perioden hersetzen.

Diese Tabelle enthält auf der einen Seite die Sonnenstationen (*Manâzil esch schems*), in einer zweiten Columne die mit diesen Sonnenstationen der Zeit nach zusammenfallenden Saatabschnitte (*Ma'dlim e darrâ'a*), in dritter Reihe (die ebenso wie die vierte aus dem *Djidwal el auqât*[1] entnommen) die Abendaufgänge, (طالع اوّل الليل) der die Sonnenstation bildenden Constellationen, in vierter die Morgenaufgänge (فجر) und endlich in einer letzten Columne die betreffenden Daten des Jahres.

---

[1] Kalender (Zeittabellen.)

Coincidenztabelle.

Sonnenstationen منازل الشمس	Saatabschnitte معالم الذراع (Jemen)	Abendaufgänge طالع اوّل الليل	Morgenaufgänge فجر	Datum des Beginnstages
الغفر *El Ghafr*	قارع *Fâri'*	*Scharraṭein*	*El 'Awwâ*	*27. Eilûl* (27. September alten und 9. October neuen Styls)
الزبانا *Zebâna*	عشا كامه *'Aschâ Kama* Frühlingsbeginn	*El Baṭin*	*Es Samâk*	*10. Tischrin I* (10. October alten Styls)
الاكليل *Iklil*	عشا الثور *'Aschâ e thaur*	*E Thurejja*	*El Ghafar*	*23. Tischrin I*
القلب *El Qalb*	عشا النجمين *'Aschâ en nedjmein*	*Al Dabarân*	*Es Zabâna*	*5. Tischrin II* (November)
الشوله *Schûla*	عشا الصلم *'Aschâ es Ṣulm*	*El Haq'a*	*El Iklil*	*18. Tischrin II*
النعايم *Na'âim*	عشا العلب *'Aschâ el 'Alib* Winterbeginn	*El Han'a*	*El 'Alib*	*1. Kanûn I* (December)

البلده *El Belda*	عشا سهيل *'Ascha Suheil*	*E Ḍarrâ'*	*E Schûla*	*14. Kanûn I*
سعد الذابح *Sa'd e Ḍâbiḥ*	عشا الرابعين ال وّلين *'Ascha er Râbi'in el awwalin*	*En Nathra*	*En Na'âim*	*27. Kanûn I*
سعد بلع *Sa'd Bula'*	عشا الرابعين الخرين *'Ascha er Râbi'în el âkhirîn*	*E Ṭaraf*	*El Belda*	*9. Kanûn II* (Jänner)
سعد السعود *Sa'd es Su'ûd*	خامس الصواب *Khâmis es Ṣawâb*	*El Djebha*	*E Ḍâbiḥ*	*22. Kunûn II*
سعد الاخبيّه *Sa'd el Akhbija*	سادس الصواب *Sâdis es Ṣawâb*	*Ez Zabra*	*Sa'd Bula'*	*4. Schabat* (Feber)
الفرع المقدم *El Far' el muqaddim*	سابع الصواب *Sâbi' es Ṣawâb*	*Es Ṣarfa*	*Sa'd es Su'ûd*	*17. Schabat*
الفرع المؤخّر *El Far' el mu-akhkhir*	ظفر اوّل *Ṭâfir awwal*	*El 'Awwâ*	*Sa'd el Akhbija*	*2. Adâr* (März)
بطن الحوت *Baṭu el Ḥût*	ظافر ثانى *Ṭâfir thâni* Sommeranfang	*Es Samâk*	*El Muqaddim*	*15. Adâr*

Sonnenstation منازل الشمس	Saatabschnitte معالم الذراع (Jemen)	Abendaufgänge طالع اوّل الليل	Morgenaufgänge فجر	Datum des Beginnstages
الشرطين *Scharaṭein*	الفرع *El Far'*	*El Ghafar*	*El Mu-akhkhir*	*28. Adâr*
البطين *Buṭein*	غروب كامه *Ghurûb Kâma*	*Ez Zabâna*	*Er Rischâ (Baṭn Ḥût)*	*10. Nisân* (April)
الثريا *Thurejja*	غروب الثور *Ghurûb es thaur*	*Iklil*	*E Scharaṭein*	*23. Nisân*
الدبران *Al Dabarân*	طلوع كامه *Ṭulû' Kâma*	*El 'Alib*	*El Baṭein*	*6. Ijâr* (Mai)
الهقعه *El Haq'a*	طلوع الثور *Ṭulû' e Thaur*	*E Schûla*	*E Thurejja*	*19. Ijâr*
الهنعه *El Han'a*	الظلم *E Ṭulm*[1]	*E Na'âim*	*Al Dabarân*	*1. Ḥadîrân* (Juni)

[1] Vergleiche damit ثلث ظُلَم des *Bérûnî* (Sachau's Ausgabe) Seite 64.

الذراع *E Ḍarrâ'*	الصلم *Es Ṣulm*	*El Helda*	*El Haq'a*	*14. Ḥadirân*	
النثرة *En Nathra*	علب *'Alib ('Alib)* Herbstanfang	*Sa'd e Ḍâbiḥ*	*El Han'a*	*28. Ḥadirân*	
الطرف *E Ṭaraf*	سهيل *Suheil*	*Sa'd Bula'*	*E Ḍarrâ'*	*11. Tamûz* (Juli)	
الجبهة *El Djebha*	الرابعين الاوّلين *Er Râbi'in el awwalîn*	*Sa'd es Su'ûd*	*En Nathra*	*24. Tamûz*	
الزبرة *Ez Zabra*	الرابعين الاخرين *Er Râbi'in el âkhirîn*	*Sa'd el Akhbija*	*E Ṭaraf*	*6. Âb* (August)	
الصرفة *Es Ṣarfa*	خامس *Khâmis*, Zeit der *allân*-Regen	*El Muqaddim*	*El Djebha*	*19. Âb*	
العوّا *El 'Awwâ*	سادس *Sâdis*	*El Mu-akhkhir*	*Ez Zabra*	*1. Eilûl* (September)	
السماك *Es Samâk*	سابع *Sâbi'*	*Baṭu el Ḥût*	*Es Ṣarfa*	*14. Eilûl*	

Diese manchen dunklen Punkt aufhellende Tabelle stellte ich nach einer Handschrift des im Jemen ob seiner Gelehrsamkeit berühmten Astronomen des vorigen Jahrhunderts, Fedjr ed Dîn 'Abdallah ibn Hamza el Qâdhi, zusammen, welche mir von dessen Enkel Luṭfallah, meinem Freunde, für einige Tage zur Verfügung gestellt worden war.

Aus derselben dürften zunächst die Identificationen der eigentlichen südarabischen Sternnamen ohne Schwierigkeit gefolgert werden.

Nicht minder ist daraus ersichtlich, dass der heliakische Aufgang der Sternbilder im Jemen circa 25 Tage nach der Conjunction mit der Sonne gerechnet wird. Nur diese und die Abendaufgänge der ja ohnehin schon genügend bekannten arabischen Stationsgestirne mit den in derselben Reihe verzeichneten Saatkennzeichen (Saatabschnitten, *Ma'âlim e darâ'*) können zur Identification dieser letzteren verwendet werden.

So ist offenbar *Kâma* identisch mit *Baṭein*,
En Nedjmên in Beziehung zu bringen mit *Aldebarân*,
Ṣulm mit *Haq'a*,
Er Râba'în el awwalin mit *Nathra*,
'Alib mit *Han'a* u. s. w.

Im Allgemeinen wird dabei zu bemerken sein, dass man immer Sterne, die am Morgen aufgehen, zu nehmen hat, wenn nicht ausdrücklich *'aschâ* dabei steht. *'Aschâ* bedeutet nämlich Abend.

Besonders auffällig sind übrigens die Bezeichnungen *Kâma* (von den Kabylen auch für die Plejaden angewandt), *Ṫulm* und *Ṣulm*, ferner *Ṫâfir awwal* und *thânî*. Das erste *Ṫâfir* soll ein Sternviereck des südlichen Himmels sein, das zweite ein nicht weit davon entferntes Sternenpaar.

Die Kabylen behaupten, dass ihre Bezeichnungen der Sterne und ihre Eintheilungen des Jahres herrühren von 'Alî ibn Zâïd (nicht zu verwechseln mit Zeid dem Mohammedaner), kurz Abû el Qabâil, Vaṫer der Stammesaraber, genannt. Er habe lange vor dem Auftreten des Islam im Dorfe Djâhilîa im Bilâd Hamdân gelebt und sich ausschliesslich mit Ackerbau und Sternkunde befasst. Um Missverständnissen vorzubeugen, betone ich, dass ein Dorf Djâhilîa in der That existirt und von mir besucht wurde, und dass ich

dieses Wort nicht etwa irrthümlich, also in Unkenntniss des Wortes „Heidenzeit, Djâhilîa," niedergeschrieben habe. Von 'Alî ibn Zâïd existiren eine Menge südarabischer Bauernregeln, die von archäologischem Interesse sind und desshalb nicht hierher gehören.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die von mir aufgestellte Ansicht bezüglich der Kabylenmonatsnamen nicht auf absolute Gewissheit Anspruch erheben kann. Erst bis das ganze Material gesichtet sein wird, wird man eine definitive Erklärung der sonderbaren Bezeichnungen von 19 bis 3 geben können, falls nicht berufenere Fachmänner schon jetzt das Richtige herausfinden.

Über die in den bisher bekannt gewordenen himyarischen Inschriften vorkommenden Bezeichnungen von Jahresabschnitten — siehe „Sabäische Alterthümer" Seite 51 und 75 — soll an anderer Stelle eingehend gehandelt werden.

Über die Massbestimmung extensiver Grössen.

Von **E. Study.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. December 1884.)

Derjenige Begriff, durch welchen der von Hermann Grassmann geschaffene und als „Ausdehnungslehre“ bezeichnete Zweig der Mathematik mit der messenden Geometrie in Verbindung tritt, ist der des „numerischen Werthes“ einer extensiven Grösse, in Verbindung mit dem davon abhängigen Begriffe des inneren Productes.

Grassmann bezeichnet (in „A_2“ Nr. 151, wenn wir die beiden Bearbeitungen der Ausdehnungslehre kurz mit A_1 (1844, bezgl. 1878) und A_2 (1862) citiren) als „numerischen Werth“ einer aus von einander unabhängigen Einheiten mittelst reeller Zahlen binear abgeleiteten Grösse die positive Quadratwurzel aus dem „inneren Quadrate“ derselben, d. h. die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Ableitungszahlen, und er findet dann (A_2 Nr. 195 u. ff.), dass die Winkel, deren Cosinus die inneren Producte beliebiger Punkte vom numerischen Werth Eins sind, etwa im Falle eines Gebietes dritter Stufe dieselben Eigenschaften besitzen, welche in der elementaren Geometrie den Punkte einer Kugel verbindenden Bogen grösster Kreise zukommen, so dass man, von dem Begriffe des numerischen Werthes ausgehend, zur elementaren Massgeometrie des Strahlenbündels und weiter zur Euclidischen Raumgeometrie gelangt (A_2 Nr. 216 u. ff).

Es kann nicht geleugnet werden, dass in der Art der Einführung dieses Begriffes bei Grassmann eine gewisse Willkür liegt, die dadurch nicht aufgehoben wird, dass sie sich nachher als zweckmässig herausstellt; auch ist nicht sichtbar gemacht, ob die neben einander hingestellten Definitionen für die Masswerthe (beziehungsweise inneren Producte) der Grössen verschiedener Stufen nicht theilweise von einander abhängig sind, so dass die eine aus der anderen abgeleitet werden kann.

Diese Bemerkung veranlasste mich, zu untersuchen, in wie weit Grassmann's Definitionen willkürlich sind, oder aus Forderungen allgemeiner Art gefolgert werden können.

Da diese Frage für die Leser Grassmann's vielleicht nicht ohne Interesse ist, und sich bei meinem Versuche zur Lösung derselben auch einiges Neue ergeben hat, so erlaube ich mir, meine hierauf bezüglichen Betrachtungen im Folgenden dem mathematischen Publikum vorzulegen. Der in denselben verfolgte Gedankengang ist im wesentlichen der, dass zuerst ein möglichst allgemeiner Ausdruck für den Masswerth angenommen wird, und dieser dann durch Bedingungen eingeschränkt wird, welche den geometrischen Forderungen der allgemeinen Beweglichkeit der Figuren und der von Helmholtz als Monodromie bezeichneten Eigenschaft des Raumes entsprechen.

Man sieht, dass diese Fragestellung, insoweit sie von geometrischem Interesse ist, mit den Untersuchungen von Riemann, Helmholtz und F. Klein über die Grundlagen der Geometrie auf's Engste zusammenhängt. Doch decken sich die Voraussetzungen dieser Arbeit, deren Zweck ja zunächst dem Gebiete der Ausdehnungslehre angehört, nicht vollkommen mit den von Helmholtz[1] angenommenen Axiomen. Zunächst scheint die hier gemachte Annahme, dass der Raum, um den es sich handelt, ein linearer ist und die Bewegungen lineare Transformationen sind, eine viel speciellere zu sein, als diejenige ist, welche Helmholtz' berühmter Abhandlung zu Grunde liegt; es geht aber aus den Entwickelungen von Lobatschewsky hervor, dass in einem Raume mit jenen Eigenschaften die projective Geometrie gilt.

Dagegen ist hier von der Hypothese Helmholtz', dass die Beweglichkeit der Körper eine vollkommen freie sei (was analytisch darin seinen Ausdruck findet, dass die bei den Drehungen um einen Punkt fest bleibenden Elemente imaginär sein müssen), abgesehen, da von dem hier eingenommenen algebraischen Standpunkte aus reelle und imaginäre Grössen als gleichwerthig erscheinen; in Folge hiervon erhält man in der Ebene ausser der Euclidischen und Nichteuclidischen Geometrie noch

[1] „Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen". Gött. Nachr. 1868 S. 139 u. ff.

zwei weitere Arten von Massgeometrie mit allgemeiner Beweglichkeit der Figuren.

Die eine derselben bildet einen Grenzfall der Euclidischen Geometrie, indem die sogenannten „Kreispunkte" zusammenfallen, die Andere, wie es scheint bisher noch nicht beachtete, hat als ausgezeichnete Elemente einen Punkt und eine nicht durch denselben gehende Gerade, kann also nicht aus den bisher betrachteten Arten der Geometrie durch einen Grenzübergang abgeleitet werden.[1]

Für ein Gebiet von drei Dimensionen habe ich die entsprechende Untersuchung noch nicht durchgeführt, da hier die Zahl der in Betracht zu ziehenden Transformationsgruppen eine weit grössere wird; doch hoffe ich, dass es mir möglich sein wird, der vorliegenden Arbeit eine Ergänzung folgen zu lassen, welche sich auf diejenigen Fälle im Gebiet vierter Stufe beziehen würde, die sich von den hier behandelten nicht blos durch die Zahl der Veränderlichen unterscheiden.

Was die hier angewandte Terminologie anlangt, so habe ich die Gebiete erster und zweiter Stufe in Anlehnung an die einfachste der geometrischen Einkleidungen der Ausdehnungslehre kurz als „Punkt" und „Gerade" bezeichnet, ohne jedoch in den Schlüssen von geometrischen Begriffen Gebrauch zu machen.

Die auf die geometrische Verdeutlichung bezüglichen Bemerkungen sind unter den Text gestellt, obwohl sie die Vorstellung sehr erleichtern und darum nicht unwesentlich sind. — Ich musste sie von dem Übrigen abtrennen, wollte ich mich nicht einer Vermengung verschiedener Methoden schuldig machen.

In §. 1 wird gezeigt, dass die Coëfficienten der Zahlbeziehungen, welche zwischen den Punkten eines Ausdehnungsgebietes

[1] Die Gruppe von ∞^3 collinearen Transformationen, welche zwei Punkte und eine durch einen derselben gehende Gerade unverändert lassen, führt auf eine Massbestimmung, welche als in gewissem Sinne reducibel bezeichnet werden kann, und daher zu keiner eigentlichen Geometrie gehört. Man erhält nämlich für die Entfernung zweier Geraden oder Punkte zwei von einander ganz unabhängige Ausdrücke, von denen der erste mit dem für den Winkel zweier Geraden in der Euclidischen Geometrie, der andere mit dem dazu dualistischen Ausdruck zusammenfällt.

bestehen, von einer denselben zugeordneten Function, dem „Masswerth“ der extensiven Grössen abhängen, und dass die grosse Willkür, welche deren Wahl zulässt, zu unendlich vielen, an und für sich gleichwerthigen „Formen“ der Ausdehnungslehre führt.

Diese unterscheiden sich von einander in einem Theile ihrer Gesetze, während sie in einem anderen Theile, der die projektiven Eigenschaften der Mannigfaltigkeit zum Ausdruck bringt, unter einander übereinstimmen.

In §. 2 wird nachgewiesen, dass unter allen möglichen Formen der Ausdehnungslehre diejenigen ausgezeichnet sind, bei welchen das Quadrat des Masswerthes eine ganze Function zweiten Grades der Ableitungszahlen ist, indem diese allein obigen Axiomen genügen.

§. 3 und §. 4 behandeln den Fall eines Gebietes zweiter Stufe, in welchem die beiden Nullpunkte der den Masswerth darstellenden quadratischen Form getrennt sind, §. 5 den Fall, wo dieselben zusammenfallen. Es wird daselbst der Begriff des Winkels und der Entfernung abgeleitet, die beide mit den ebenso benannten Begriffen der Geometrie zusammenfallen.

In den §§. 6, 7, 8 wird das Gebiet dritter Stufe in den drei Fällen behandelt, welche aus der allgemeinen Voraussetzung entstehen, je nachdem man annimmt, dass die den Masswerth darstellende quadratische Form einer Summe von wenigstens drei oder zwei Quadraten, oder einem einzigen Quadrat gleich ist; oder, was dasselbe ist, je nachdem der Ort der Punkte vom Zahlwerthe Null ein eigentlicher Kegelschnitt, oder ein Linienpaar, oder eine Doppelgerade ist. Im letzteren Falle (§§. 8, 9, 10) ist der Ort der Geraden (Linientheile) vom Zahlwerth Null entweder ein Punktepaar, dessen Verbindungslinie die Doppelgerade ist, oder ein doppelt zählender Punkt, der aber nicht auf jener Geraden zu liegen braucht.

1.

Die Ausdehnungslehre ist die Lehre von den Grössen, welche aus einer Anzahl linear unabhängiger Grössen durch (reelle oder gewöhnliche complexe) Zahlen abgeleitet werden können. Indem man n von einander unabhängigen Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$ n beliebige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (Coordinaten) zuordnet, erhält man

ein Grössengebiet n^{ter} Stufe, dessen einzelnes Element aus der Gesammtheit der abgeleiteten Grössen $\alpha_1 . e_1$, $\alpha_2 . e_2$, .. $\alpha_n . e_n$ besteht. Der Grundgedanke der Ausdehnungslehre ist nun der, dass man eine Gesammtheit solcher Grössen, da sie bei allen auf Wechselbeziehungen derselben bezüglichen Fragen einen einfachen Begriff bildet, auch formal als solchen darzustellen habe,[1] was auf eine einfache Art ausgeführt werden kann, da die Beziehung der einzelnen abgeleiteten Grösse $\alpha_k . e_k$ zu der ursprünglichen e_k mit derjenigen der Multiplication, und die Beziehung einer Gesammtheit solcher abgeleiteten Grössen zu den einzelnen mit der der gewöhnlichen Addition übereinstimmt; so dass man — wenn für gleichbedeutende Operationen auch gleiche Zeichen gewählt werden — die Gesammtheit jener abgeleiteten Grössen als neue „extensive" Grösse unter Anwendung des Multiplicationszeichens (einfaches Nebeneinanderschreiben) und des Summenzeichens ausdrücken kann.

Jedes Element oder jeder „Punkt"

$$e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \quad \ldots + \alpha_n e_n \qquad 1)$$

der so entstandenen Mannigfaltigkeit ist durch das Werthsystem der Ableitungszahlen α_1, α_2, .. α_n eindeutig bestimmt; zwei extensive Grössen sind dann und nur dann miteinander vergleichbar, wenn sämmtliche Ableitungszahlen der einen aus den entsprechenden der anderen durch Multiplication mit derselben Zahl hervorgehen.

Für solche Fragestellungen jedoch, welche die Beziehung der Ausdehnungslehre zur messenden Geometrie vermitteln, ist es nothwendig, dass man auch solche extensive Grössen mit einander vergleichen kann, welche sich nicht nur um einen Zahlfactor unterscheiden. Dies kann allgemein erreicht werden, indem man jedem Punkte der Mannigfaltigkeit eine (in hohem Grade willkürliche) Zahl zuordnet, und zwei Punkte dann als „numerisch" gleich ansieht, wenn die beiden zugehörigen Zahlen gleich sind.[2]

Wir bezeichnen diese Zahl α, welche wir als eine Funktion der Zahlen α_1, α_2 .. α_n gegeben denken, als „Masswerth" der

---

[1] Für Grössen 1. Stufe (Punkte) hatte bereits Möbius dieses Verhältniss klar erkannt, und als Grundlage seines „barycentrischen Calculs" benutzt. Baryc. Calcul S. 16 u. ff.

[2] Es wird also die Annahme Grassmann's durch die denkbar allgemeinste Annahme ersetzt.

extensiven Grösse, und ersetzen, um für die Zuordnung derselben zur Grösse e einen einfachen analytischen Ausdruck zu gewinnen, die Gleichung 1) durch[1]

$$\alpha e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \qquad 2)$$

Hier ist α, wenn wir $e_1, e_2, \ldots e_n$ als fest gegeben annehmen, lediglich eine Function der Ableitungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, die, wenn man alle Grössen α_k in einem bestimmten Verhältnisse ändert, eine Änderung in dem nämlichen Verhältnisse erfährt.

Um nicht zu vieldeutigen Operationen zu gelangen, müssen wir von derselben ausserdem noch die Annahme machen, dass es wenigstens ein endliches (d. h. durch endliche Werthe der Ableitungszahlen $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bestimmtes) allseitig begrenztes und einfach zusammenhängendes Gebiet gibt, in welchem sowohl α als $\frac{1}{\alpha}$ eindeutige stetige Functionen der Zahlen $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind; ausserdem wollen wir noch die Stetigkeit der ersten und zweiten Differentialquotienten von α innerhalb dieses Gebietes voraussetzen.

Innerhalb desselben sind dann alle Zahlbeziehungen, welche zwischen Punkten der Mannigfaltigkeit bestehen, eindeutig bestimmt. Denn sind e, e', e'' irgend drei Punkte des Gebietes, zwischen welchen eine Zahlbeziehung besteht, so folgt aus den Gleichungen:

$$\lambda\alpha_\varkappa + \lambda'\alpha_k' + \lambda''\alpha_k'' = 0 \quad \varkappa = 1, 2, \ldots n$$

welche die Zahlbeziehungen zwischen den Ableitungszahlen ausdrücken, als Gleichung zwischen den drei Punkten selbst

$$\lambda\alpha e + \lambda'\alpha' e' + \lambda''\alpha'' e'' = 0$$

wo die Coëfficienten $\lambda\alpha$, $\lambda'\alpha'$, $\lambda''\alpha''$ eindeutig bestimmt sind, da dies nach der Voraussetzung für α, α', α'', der Fall ist.

Die Coëfficienten dieser Zahlbeziehungen sind also von der Function α abhängig, und fallen für zwei verschiedene Functionen α bei den nämlichen Werthen der Ableitungszahlen verschieden aus; so dass also jede solche zu einem geschlossenen System von Zahlbeziehungen zwischen den Punkten der Mannigfaltigkeit führt, welche eine in Bezug auf die Punkte bestimmte „Form der Ausdehnungslehre" kennzeichnet. Ebenso kann man

[1] Die Zahlen α können selbst wieder höhere complexe Zahlen sein, eine Verallgemeinerung, auf die wir hier jedoch nicht eingehen.

für die Ausdehnungsgrössen höherer Stufe eine analoge Function als Masswerth annehmen, welche die Coëfficienten der zwischen diesen bestehenden Gleichungen bestimmt. Sind α und β zwei zu verschiedenen Formen der Ausdehnungslehre gehörige Masswerthe desselben Punktes, so geschieht der Übergang von den Zahlbeziehungen der ersten zu denen der zweiten, indem man jeden Punkt mit dem zugehörigen Quotienten $\beta : \alpha$ multiplicirt.

Die Gesetze jeder der verschiedenen Arten der Ausdehnungslehre, zu welchen wir so gelangen, scheiden sich nun in zwei Gruppen: in diejenigen Gesetze, welche die betreffende Form mit allen übrigen gemein hat, und in die, welche ihr eigenthümlich sind und ihren besonderen Character bestimmen.

Die erste Gruppe enthält alle die Gesetze, welche nur von dem Vorhandensein von Zahlbeziehungen zwischen bestimmten Punkten der Mannigfaltigkeit abhängen, nicht aber von den Coëfficienten derselben, welche also lediglich lineare Constructionen ausdrücken und vom Masswerth unabhängig sind. Dieselben ändern sich nicht, wenn man jeden vorkommenden Punkt mit einer für ihn beliebigen Zahl $\beta : \alpha$ multiplicirt. (Ein besonderer Fall dieser Transformation ist die affine. S. A_1 §. 165 u. ff.)

Sie unterscheiden sich von den sogenannten symbolischen Ausdrücken der Invarianten-Theorie nicht wesentlich, und können, wie der Verfasser demnächst zu zeigen gedenkt, definirt werden, ohne dass man von willkürlichen Grundpunkten oder von dem Begriffe des Masswerthes Gebrauch macht.

Die zweite Gruppe umfasst die Gesetze, welche nicht erhalten bleiben, wenn man jeden der in dieselben eingehenden Punkte mit einer beliebigen Zahl multiplicirt. Sie beruhen wesentlich auf dem Begriffe des Masswerthes und vermitteln den Zusammenhang der Ausdehnungslehre mit der messenden Geometrie.

Die folgende Untersuchung bezieht sich auf die Gesetze der letzteren Art; es wird in derselben der Versuch gemacht, aus der unendlichen Zahl der möglichen Bildungen solche von besonders einfacher Beschaffenheit abzuscheiden.

Bevor wir jedoch hierzu übergehen, mag noch bemerkt werden, dass die über den Masswerth gemachten beschränkenden Annahmen nur innerhalb eines begrenzten Gebietes erfüllt zu sein

brauchen. Reicht das Gesetz, durch welches der Masswerth bestimmt ist, noch über die Grenzen desselben hinaus, so wird es vorkommen können, dass man zu einem und demselben Punkt auf Wegen gelangen kann, welche sich nicht stetig in einander überführen lassen. Einen solchen Punkt hat man dann, will man die Möglichkeit eindeutiger Constructionen nicht aufgeben, ähnlich wie es in der Theorie der Riemann'schen Flächen geschieht, als mehrere Mal vertreten anzusehen, so dass also bereits zwei von einander verschiedene Punkte in einer Zahlbeziehung stehen können. Jedes Gebiet höherer Stufe, welches einen gegebenen Punkt enthält, enthält dann auch alle die Punkte, welche aus dem ersten linear ableitbar sind. Es wird ferner der Masswerth für gewisse Punkte verschwinden oder unstetig werden können. Punkte der letzteren Art muss man sich, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, als in bestimmter Weise aus anderen entstanden denken; und ebenso hat man mit den Punkten vom Masswerthe Null zu verfahren, wenn es sich darum handelt, von einer Form der Ausdehnungslehre zu einer anderen überzugehen.

2.

Wir beginnen nun die allgemeinen Voraussetzungen, deren wir uns bisher bedienten, einzuschränken, um so zu ausgezeichneten Formen der Ausdehnungslehre zu gelangen. Dies geschieht, geometrisch ausgedrückt, am einfachsten durch die Forderung, dass der Raum an allen Orten und nach allen Richtungen gleich beschaffen sei, d. h. dass an allen Orten und nach allen Richtungen die nämlichen Constructionen vollzogen werden können (S. A_1 §. 22.) — und dass diese Constructionen umkehrbar seien, d. h. dass zwei Punkte a und b, die in einer Construction vorkommen, in einer der ersten gleichen Construction in umgekehrter Folge $b\ a$ vorkommen können. (Axiom der Monodromie.)

In die Sprache der Ausdehnungslehre übersetzt, nimmt diese Forderung folgende exactere Form an: Es seien $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ irgend welche $n+1$ Punkte, von welchen je n von einander unabhängig sind, zwischen welchen also eine einzige lineare Gleichung

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

besteht, deren Coëfficienten bis auf einen gemeinsamen Factor eindeutig bestimmt und sämmtlich von Null verschieden sind. Dann soll zu jedem bestimmt angebbaren Punkt a'_0 in jeder bestimmt angebbaren durch a'_0 gehenden Geraden (Gebiet zweiter Stufe) in jeder Fortschreitungsrichtung derselben ein Punkt a'_1 sich finden lassen, zu diesem Punktepaar in jeder durch $a'_0\ a'_1$ gehenden Ebene (Gebiet dritter Stufe) ein Punkt a'_2 u. s. f. sich ausfindig machen lassen, der Art, dass zwischen den Punkten $a'_0\ a'_1\ a'_2 \ldots\ a'_n$ dieselbe lineare Gleichung besteht, wie zwischen den ursprünglichen Punkten $a_0\ a_1\ a_2 \ldots\ a_n$; und zwar soll eine solche Construction auch noch möglich sein, wenn man etwa a'_0 und a'_1 vertauscht.

Enthält diese Forderung keinen inneren Widerspruch, und gelingt es, eine Form der Ausdehnungslehre zu bilden, welche ihr genügt, so hat das Ausdehnungsgebilde m^{ter} Stufe derselben die Eigenschaft, (wenigstens) auf $\frac{m.(m-1)}{2}$-fach unendlich viele verschiedene Arten so auf sich selbst bezogen werden zu können, dass alle Zahlbeziehungen entsprechender Punktgruppen dieselben bleiben.

Wir wollen im Anschluss an eine zuerst von Euler, dann von Moebius (Baryc. Calcul S. 191 u. ff.) und Grassmann in etwas engerem Sinne gebrauchte Bezeichnungsweise sagen, das Gebiet sei durch diese Operation (welche offenbar eine lineare Transformation ist) affin auf sich selbst abgebildet.

Die affine Beziehung erstreckt sich ihrer Definition nach zunächst nur auf Punktgrössen. Verlangen wir, dass sie zugleich auch eine affine Transformation für die Ausdehnungsgrössen höherer Stufe sei, so werden wir die Masswerthe der letzteren nicht mehr wie im allgemeinen Falle unabhängig von den Masswerthen der Punkte annehmen dürfen; denn es müssen die äusseren Producte in zwei Punktgruppen, wenn deren Punkte gleiche Masswerthe haben und durch eine affine Transformation in einander übergehen, nothwendig gleiche Masswerthe besitzen.

Wir werden im Folgenden sehen, inwieweit man über die Masswerthe von Grössen höherer Stufe unter der angegebenen Voraussetzung überhaupt noch willkürlich verfügen kann.

Um den analytischen Ausdruck für den Masswerth der Punkte aus der obigen Bedingung zu finden, wollen wir nun so verfahren, dass wir dieselben nur in einem besonderen Falle benutzen, wobei wir uns zunächst auf reelle Werthe der Ableitungszahlen beschränken, um dann zu zeigen, dass die so gewonnenen Ausdrücke die allgemeine Bedingung ebenfalls befriedigen.

Um dies auszuführen, können wir etwa auf einer Geraden drei Punkte $a_0\ a_1\ a_2$ derart annehmen, dass es eine affine Beziehung der Geraden auf sich selbst gibt, welche a_1 ungeändert lässt, a_0 und a_2 aber vertauscht, was nach unserer Voraussetzung möglich ist.

Dann gibt es immer (wenigstens) eine affine Transformation, welche die Punkte a_0 und a_1 in a_1 und a_2 überführt, sowie eine weitere, welche a_1 und a_2 vertauscht, a_0 aber in einen vierten Punkt a_3 verwandelt. Fügt man zu der letzteren noch die erste Transformation, welche $a_2\ a_1\ a_3$ in $a_3\ a_1\ a_2$ übergehen lässt, so ist damit $a_0\ a_1\ a_2$ in $a_1\ a_2\ a_3$ durch eine affine Transformation übergeführt worden, da zwei derselben, hinter einander angewendet, ihrem Begriffe nach wieder eine solche hervorbringen.

Schreiben wir jetzt den Punkten $a_0\ a_1\ a_2$ den Zahlwerth 1 zu, und leiten aus a_0 und a_1 bezüglich a_1 und a_2 neue Punkte b_0 und b_1 durch dieselben Zahlen ab, so können wir die letzteren durch geeignete multiplicative Änderung der Ableitungszahlen ebenfalls in Punkte vom Zahlwerth 1 verwandeln. Es ist dann b_1 aus a_1 durch dieselbe Operation hervorgegangen, wie b_0 aus a_0, und es können die Punkte a_0 und a_1 sowohl mit b_0 und b_1, als auch mit b_1 und b_0 zur Deckung gebracht werden, wobei dann die früheren Punkte b_0 und b_1 auf die Punkte a_1 und a_0 fallen.

Dies gibt uns für die Ableitungszahlen des veränderlichen Punktes b_0 aus den Punkten a_0 und a_1 eine Bedingungsgleichung, welche bereits den Ausdruck für den Masswerth im Gebiet zweiter Stufe darstellt.

Die zwischen $a_0\ a_1\ a_2$ bestehende lineare Gleichung, in welcher der letzte Coëfficient dem ersten gleich sein muss, und also mit diesem gleich der Einheit gesetzt werden kann, möge lauten:

$$a_0 - 2\beta a_1 + a_2 = 0,$$

wo β eine von Null verschiedene bestimmte Zahl ist. Es sei dann

$$\begin{aligned} \alpha b_0 &= \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 \\ \alpha b_1 &= \alpha_0 a_1 + \alpha_1 a_2 \\ &= -\alpha_1 a_0 + (\alpha_0 + 2\beta\alpha_1) a_1 \end{aligned}$$

dann wird ebenso

$$\begin{aligned} \alpha a_1 &= \alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0 \\ \alpha a_0 &= -\alpha_1 b_1 + (\alpha_0 + 2\beta\alpha_1) b_0, \end{aligned}$$

woraus, wenn man die Werthe von b_0 und b_1 einsetzt:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + 2\beta\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung gelangen wir zu dem allgemeinen Ausdruck für den Masswerth eines aus n von einander unabhängigen Punkten linear ableitbaren Punktes. Wenden wir sie z. B. auf einen Punkt e an, der aus den drei Punkten e_1 e_2 e_3 mittelst der Zahlen α_1 α_2 α_3 linear abgeleitet ist, so erhalten wir für den Zahlwerth α von e drei verschiedene Ausdrücke, entsprechend den drei Arten, wie man zwei dieser Punkte zusammenfassen und mit dem dritten verbinden kann.

Es sei

$$\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha_1' e_1';$$

dann ist

$$\alpha e = \alpha_1 e_1 + \alpha_1' e_1'.$$

Man hat aber nach obiger Formel

$$\begin{aligned} \alpha_1'^2 &= \alpha_2^2 + 2\beta_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 \\ \alpha^2 &= \alpha_1^2 + 2\gamma_1\alpha_1\alpha_1' + \alpha_1'^2, \end{aligned}$$

wo β_1 eine Constante, γ_1 dagegen eine Function von α_2 und α_3 ist.

Man erhält so die drei Gleichungen:

$$\alpha^2 = a_1^2 + 2\gamma_1\alpha_1\sqrt{\alpha_2^2 + 2\beta_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2} + \alpha_2^2 + 2\beta_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2$$

$$\alpha^2 = \alpha_2^2 + 2\gamma_2\alpha_2\sqrt{\alpha_3^2 + 2\beta_2\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1^2} + \alpha_3^2 + 2\beta_2\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1^2$$

$$\alpha^2 = \alpha_3^2 + 2\gamma_3\alpha_3\sqrt{\alpha_1^2 + 2\beta_3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2} + \alpha_1^2 + 2\beta_3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$$

in welchen die Grössen γ_1 γ_2 γ_3 beziehungsweise von den Ableitungszahlen α_1 α_2 α_3 unabhängig sind. Hieraus folgt bei

Vergleichung der drei Ausdrücke, dass die zweiten partiellen Differentialquotienten von

$$\gamma_1 \sqrt{\alpha_2^2 + 2\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3^2}$$

nach α_2 und nach α_3 genommen, verschwinden, dass also diese Grösse eine bilineare Function von α_2 und α_3 ist. Führt man dieselbe in die erste der obigen Gleichungen ein, so entsteht ein Ausdruck zweiten Grades in α_1, α_2, α_3 vermehrt um ein Glied, welches das Product $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ enthält. Dieses muss aber verschwinden, da bei gleichzeitiger Änderung von α_1, α_2, α_3 um einen bestimmten Factor α sich um denselben Factor ändern muss. In ähnlicher Weise kann man weiter schliessen, und wir haben daher den Satz gewonnen:

Erfüllt eine Form der Ausdehnungslehre die zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Bedingung, so ist das Quadrat des Masswerthes eines Punktes, wenn man ihn aus $n+1$ linear unabhängigen Punkten abgeleitet hat, eine ganze Function zweiten Grades der Ableitungszahlen,[1] in welcher die Quadrate den Coëfficienten 1 haben, falls man die ursprünglichen Punkte als mit dem Zahlwerth 1 behaftet annimmt.

Wir gehen nun dazu über, die in dem allgemeinen Ausdruck für den Masswerth enthaltenen besonderen Fälle zu behandeln, die man erhält je nach der kleinsten Zahl von Quadraten, auf welche sich derselbe zurückführen lässt, wobei wir uns, da wir zu einem algebraischen Ausdrucke gelangt sind, nicht mehr auf die Annahme nur reeller Ableitungszahlen zu beschränken brauchen.

Den Fall eines Gebietes zweiter Stufe, auf den sich die übrigen zurückführen lassen, wollen wir etwas ausführlicher erörtern, um dann als ein hinreichend allgemeines Beispiel für die Behandlungsart höherer Gebiete noch das Gebiet dritter Stufe in Betracht zu ziehen.

---

[1] Dies steht im Widerspruch mit der Entwicklung A_2 §. 227. Es folgt aber daselbst S. 150, Z. 22 v. o., nicht $A+B-C=C$, sondern nur $A+B-C\equiv C$, oder $A+B\equiv C$, was die Definition des Punktes C als Mitte von A und B ist.

3.

Im Gebiet zweiter Stufe, in welchem der Zahlwerth α eines aus zwei (vielfachen) Punkten e_0 und e_1 mittelst der Zahlen α_0 und α_1 abgeleiteten Punktes durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha^2 = a_{00}\alpha_0^2 + 2a_{01}\,\alpha_0\alpha_1 + a_{11}\alpha_1^2 \qquad 1)$$

gegeben ist, haben wir nur zwei Fälle zu unterscheiden, indem diese Gleichung sich durch Einführung anderer Grundpunkte entweder auf eine Summe von nicht weniger als zwei Quadraten, oder auf ein einziges Quadrat zurückführen lässt.

Im ersten Falle nimmt nach der Ausführung der Reduction die zwischen den Grundpunkten e_1, e_2 mit einem beliebigen Punkte e bestehende Zahlbeziehung die Form an:

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\,.\,e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\,. \qquad 2)$$

Hier sind e_1 und e_2 Punkte vom Zahlwerthe 1; der eine derselben e_1 kann willkürlich angenommen werden, der andere ist dann zweideutig bestimmt.

Ersetzt man die Punkte e_1, e_2 durch zwei andere gleicher Art, und lässt alle Punkte sich entsprechen, die aus den beiden Punktepaaren mittelst derselben Zahlen abgeleitet sind, so ist dies offenbar eine affine Transformation in dem §. 2 festgestellten Sinne und umgekehrt ist jede affine Transformation auf diese Art darstellbar, da bei jeder solchen ein Punktepaar e_1, e_2 in ein anderes von gleicher Beschaffenheit übergehen muss. Wir wollen solche Punktepaare, die in einer Gleichung von der Form 2) stehen können, als zu einander „normal“ (conjugirt) bezeichnen.[1]

Dem doppelten Vorzeichen der Quadratwurzel in 2) entsprechend ist jeder Punkt des Gebietes zweimal vertreten;

[1] Die Punkte des Gebietes lassen sich mit Rücksicht auf ihren Zahlwerth geometrisch deuten als Strecken, die von dem Mittelpunkte einer Ellipse (Kreis) [S. A_2 Nr. 154 Anm.] oder Hyperbel nach den Punkten der Curve gezogen sind, indem diesen Strecken der Zahlwerth Eins beigelegt wird. „Normale“ Punkte sind dann, wenn man die Strecken durch ihre Endpunkte ersetzt, die Endpunkte conjugirter Durchmesser (die im Falle eines Kreises normal sind); Diametralpunkte die beiden Endpunkte desselben Durchmessers.

zwischen zwei so zusammengehörigen Punkten e, e', die wir als „Diametralpunkte“ [1] bezeichnen, besteht die Gleichung

$$e + e' = 0.$$

Die Gerade ist also mit zwei Zweigen überdeckt zu denken, welche in den Punkten, deren Zahlwerth verschwindet, zusammenhängen. Diese beiden Punkte, die wir aus einem später anzugebenden Grunde als „unendlich ferne“ bezeichnen wollen, bleiben bei allen affinen Transformationen ungeändert; sie sind ihre eigenen Diametralpunkte und zu sich selbst normal.

Die Ausdehnungsgrössen zweiter Stufe sind alle Zahlgrössen und daher ohne weiteres mit einander vergleichbar. Setzen wir das äussere Product zweier zu einander normalen einfachen Punkte gleich 1, so sind dann die äusseren Producte von irgend zwei einfachen Punktepaaren, die durch eine affine Transformation in einander übergehen, mit diesem Einheitsmass verglichen gleich oder entgegengesetzt gleich, und man kann fragen, ob diese Gleichheit auch umgekehrt eine ausreichende Bedingung für die Transformirbarkeit der Punktepaare in einander sei. Um diese Frage genau beantworten zu können, ist es nothwendig, die beiden Punkte, die zu einem gegebenen normal sind, zu unterscheiden.

Bezeichnen wir für einen beliebigen Punkt e einen der beiden zu ihm normalen Punkte als seine „Ergänzung“, so ist der zweite der Diametralpunkt der Ergänzung und wir haben mit dieser willkürlich getroffenen Unterscheidung zugleich für die zu irgend einem Punkte normalen Punkte einen Unterschied festgesetzt. Führen wir nämlich den Punkt e auf einem beliebig zu wählenden Wege, welcher jedoch keinen der unendlich fernen Punkte enthält, in einen beliebigen anderen stetig über, so ändert sich auch die Ergänzung des ersten Punktes stetig, und zwar gelangt man unabhängig von dem Wege immer zu demselben Punkt. Es ist daher unter den beiden zu einem gegebenen normalen Punkten immer eindeutig einer ausgezeichnet, den wir als Ergänzung des gegebenen bezeichnen wollen.

Wir setzen nun das äussere Product, in welchem ein beliebiger (einfacher) Punkt als erster Factor, seine Ergänzung als zweiter

[1] Vergl. die vorige Anmerkung.

Factor steht, gleich Eins. Dann ist das Einheitsmass eindeutig bestimmt; die beiden affinen Transformationen, welche einen Punkt in einen anderen überführen, unterscheiden sich mit Hilfe desselben dadurch, dass bei der einen die äusseren Producte von Punktepaaren, die in einander übergehen, gleich, bei der anderen aber entgegengesetzt sind.

Um nun zu entscheiden, ob Gleichheit der äusseren Producte zweier Punktepaare auch hinreichende Bedingung für ihre Transformirbarkeit in einander ist, drücken wir aus, dass zwei Punkte b und b' mit einem und demselben Punkte a gleiche äussere Producte liefern. Dann ist, wenn

$$a = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1$$
$$b = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 \qquad b' = \beta' e_0 + \beta'_1 e_1 :$$
$$\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 = \alpha_0 \beta'_1 - \alpha_1 \beta'_0 .$$

Hier kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, noch $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ annehmen, dann aber folgt wegen der Gleichungen:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 = \beta_0'^2 + \beta_1'^2 = 1 :$$
$$\beta_1 = \beta_1' \quad \beta_0 = \pm \beta_0' .$$

d. h. b' ist entweder aus e_0 und e_1, oder aus e_0 und $-e_1$ durch dieselben Coëfficienten abgeleitet, wie b aus e_0 und e_1.

Haben daher zwei Punktepaare a, b und a', b' vom Zahlwerth 1 gleiche äussere Producte, so kann entweder a mit a', b mit b' durch eine affine Transformation zur Deckung gebracht werden, oder es ist möglich a mit b' und gleichzeitig b mit dem Diametralpunkt von a' zur Deckung zu bringen. Der obige Satz ist also im Allgemeinen nicht unbedingt umkehrbar. Es ist aber für das Folgende wesentlich zu bemerken, dass, wenn das äussere Product einen sehr kleinen Werth hat, und sich sowohl b von a, als auch b' von a' nur um ein kleines Vielfaches eines anderen Punktes unterscheidet, die zweite der beiden Möglichkeiten fortfällt, so dass dann die Gleichheit der äusseren Producte auch hinreichende Bedingung für die Transformirbarkeit zweier Punktepaare in einander wird.

Ausser dem Begriffe des äusseren Productes ist für die Massverhältnisse noch der Begriff des inneren Productes von Wichtig-

keit. Dasselbe ist von dem Begriff der Ergänzung, also zugleich mit dieser vom Masswerth abhängig. Bezeichnen wir mit Grassmann als „inneres Product“ zweier vielfacher Punkte das äussere Product des einen in die Ergänzung des anderen, so wird der Masswerth eines Punktes gleich seinem „inneren Quadrat.“

Das innere Product zweier verschiedener Punkte ändert seinen Werth nicht, wenn man dieselben vertauscht, und es ergibt sich ähnlich wie oben, dass die nothwendige und auch ausreichende Bedingung für die Transformirbarkeit zweier Punktepaare vom Masswerthe 1 in einander die ist, dass dieselben gleiche innere Producte haben.

Die Gleichung 1) dieses Paragraphes lässt sich bei Einführung dieses Begriffes (in der Grassmann'schen Bezeichnung) einfacher schreiben:

$$\alpha^2 = [\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1]^2$$
$$= \alpha_0^2 a_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 [\alpha_0 a_1] + \alpha_1^2 a_1^2$$

woraus die Bedeutung der Coëfficienten jenes Ausdruckes hervorgeht.

Man kann hiernach die Gleichung für den Ausdruck des Masswerthes unter Einführung beliebiger Grundpunkte sofort hinschreiben. Führt man z. B. die beiden unendlich fernen Punkte

$$\varepsilon = e_1 + ie_2, \quad \varepsilon' = e_1 - ie_2$$

als Grundpunkte ein, so erhält man an Stelle von 2) die Gleichung:

$$2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\, e = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon'$$

4.

Der erste der beiden im vorigen Paragraphe über die Transformirbarkeit zweier Punktepaare in einander aufgestellten Sätze führt auf einem, wie ich glaube, natürlichen Wege zu dem Begriff des Winkels[1] zweier Punkte und damit zur sogenannten Nicht-Euclidischen Massbestimmung.

[1] Ich wähle diese Bezeichnung für die transcendente Massbestimmung und gebrauche das Wort „Entfernung“ nur für den später aufzustellenden algebraischen Ausdruck.

Da nämlich für Paare benachbarter Punkte die Gleichheit der äusseren Producte ausreicht, um dieselben in einander überführen zu können, und das äussere Product, wenn die beiden Punkte zusammenfallen, verschwindet, so liegt es nahe, das Integral zu betrachten, welches der Grenzwerth einer Summe von äusseren Producten unendlich benachbarter Punkte bildet und zu untersuchen, ob dieses Integral ein ausreichendes Kennzeichen für die Transformirbarkeit zweier Punktepaare in einander abgibt.

Ist dies der Fall, so wird man auch umgekehrt das äussere und innere Product zweier Punkte als Functionen des zwischen ihnen als Grenzen genommenen Integrals darstellen können, und zugleich erhält man aus der Art, wie sich zwei von derselben Grenze aus nach entgegengesetzten Richtungen genommene Integrale zusammensetzen, in einfachster Form die Beziehung, welche zwischen den äusseren und inneren Producten von drei Punkten des Gebietes stattfindet.

Zunächst ist ersichtlich, dass dieses Integral sich mit seiner oberen Grenze stetig und eindeutig ändert, so lange diese keinem der unendlich fernen Punkte unendlich nahe kommt.

Denn seien a_0, a_1, a_2, .— a_n eine Reihe von Punkten, welche (in dem durch das Verhältniss der Ableitungszahlen $\alpha_0 : \alpha_1$ dargestellten Werthgebiet) durch einen geschlossenen Weg verbunden sind, der keinen der unendlich fernen Punkte einschliesst, so convergirt nach einem bekannten Satze die Summe

$$(a_0 a_1) + (a_1 a_2) + \ldots + (a_n a_0)$$

gegen Null, wenn man zwischen die ursprünglichen Punkte immer neue so einschaltet, dass jedes einzelne Glied $(a_k a_{k+1})$ sich schliesslich der Null nähert.

Seien λ_1 und λ_2 bezüglich μ_1 und μ_2 die Ableitungszahlen der Grenzen a und b, zwischen welchen das Integral genommen wird, so genügen diese, wenn man als Grundpunkte normale einfache Punkte wählt den Gleichungen

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^1 = 1 \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$$

und das Integral ist nach Obigem die Differenz der Werthe,

welche eine analytische Function des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ oder des Winkels

$$\text{arc}\,(\lambda_1, \lambda_2) = \text{arc}\sin\lambda_1 = \text{arc}\cos\lambda_2$$

für die Werthepaare λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 annimmt. Das Differential dieser Function:

$$\lambda_1 d\lambda_2 - \lambda_2 d\lambda_1$$

ist aber gleich dem Differential von arc (λ_1, λ_2) selbst, dieselbe kann also, da es sich nur um die Differenz ihrer Werthe handelt, gleich arc (λ_1, λ_2) angenommen werden.

Der unmittelbare Ausdruck der Werthdifferenzen durch das äussere und innere Product der Grenzpunkte der Integration ergibt sich dann aus der Formel

$$\text{arc}(\lambda_1, \lambda_2) - \text{arc}(\mu_1, \mu_2)$$
$$= \text{arc}\sin(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \text{arc}\cos(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)$$

Bezeichnet man dasselbe als den „Winkel" seiner Grenzpunkte, so ergibt sich:

Der Winkel zweier Punkte hat als Sinus das äussere und als Cosinus das innere Product derselben (über seine Vieldeutigkeit vgl. die citirte Abhandlung von Klein). Es erhält den Werth $\frac{\pi}{2}$ für Paare normaler Punkte, den Werth π für Diametralpunkte; er wird unendlich, wenn einer der beiden Punkte in einen der bereits unter dem Namen „unendlich ferne Punkte" eingeführten Punkte vom Zahlwerth Null fällt. Er ist mit der in der Nichteuclidischen Geometrie als „Entfernung" zweier Punkte bezeichneten Zahl identisch. Die affinen Transformationen der Geraden in sich decken sich mit den congruenten und symmetrischen Umformungen der Nichteuclidischen Geometrie.

Die oben erwähnte Gleichung zwischen den äusseren Producten von je drei Punkten ist:

$$\text{arc}\sin[bc] + \text{arc}\sin[ca] + \text{arc}\sin[ab] \equiv 0 \bmod 2\pi$$

Sie ist characteristisch für die der Nichteuclidischen Geometrie entsprechende Form der Ausdehnungslehre.

5.

Ich wende mich nun zu dem zweiten Fall, wo sich das Quadrat des Zahlwerthes durch ein einziges Quadrat ausdrücken lässt.[1]

Man kann dann die Wurzel ausziehen, wodurch der Ausdruck eines beliebigen Punktes e durch die Grundpunkte die Form annimmt:

$$\alpha e = \alpha e_0 + \beta e.$$

Hier ist e_0 ein beliebig anzunehmender Punkt vom Zahlwerthe 1, e_1 aber ein ausgezeichneter Punkt vom Zahlwerth Null, eine sogenannte „Strecke", welche die Eigenschaft hat, dass beliebige Vielfache derselben, zu einem gegebenen Punkte addirt, denselben in neue Punkte überführen, die alle den nämlichen Zahlwert haben. (Eine Eigenschaft, die den unendlich entfernten Punkten des vorigen Paragraphes, aus denen die Strecke durch Zusammenrücken entsteht, nicht zukommt.) Es ergibt sich sogleich, dass die Summe der Coëfficienten einer Zahlbeziehung, die zwischen beliebig vielen einfachen Punkten besteht, Null ist, und dass es hier nicht wie im allgemeinen Falle einfach unendlich viele, sondern zweifach unendlich viele affine Transformationen gibt. Die Strecke ist der einzige Punkt, der bei allen affinen Transformationen ungeändert bleibt, denn eine solche ist bestimmt, indem man zwei beliebigen Punkten zwei andere willkürlich zuordnet.

Führt man das äussere Product eines Punktes vom Zahlwerthe 1 und der Strecke als Masseinheit für die Grössen zweiter Stufe ein, so ändern sich die äusseren Producte aller Punkte, auf dieses Mass bezogen, bei einer beliebigen affinen Transformation um einen allen gemeinsamen Factor; ist derselbe gleich ± 1, so erhält man eine ausgezeichnete Gruppe von Transformationen, welche bereits bestimmt sind, indem man einem Punkt einen anderen zuordnet. Statt der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehung zwischen den äusseren Producten dreier Punkte

[1] Den Grenzübergang, durch welchen dieser Fall aus dem vorigen entsteht, kann man sich geometrisch z. B. so deutlich machen, dass man den §. 3. Anm. erwähnten Kegelschnitt in ein Paar paralleler Geraden ausarten lässt.

erhält man jetzt einfach:

$$[bc] + [ca] + [ab] = 0;$$

die äusseren Producte werden unmittelbar addirbar; das Integral über die äusseren Producte benachbarter Punkte ist gleich dem äusseren Product seiner Grenzen und dieses, die „Entfernung" der beiden Punkte vertritt daher die Stelle des Winkels im allgemeinen Falle. Man sieht sogleich, dass die Entfernung zweier Punkte mit der in der Elementargeometrie ebenso genannten Grösse zusammenfällt, und dass die ∞^2 affinen Transformationen mit den Ähnlichkeitsformationen, und die darin enthaltenen ausgezeichneten mit den Verschiebungen, bezüglich symmetrischen Umformungen derselben sich decken; die Strecke ist der unendlich ferne Punkt, der bei allen diesen Transformationen erhalten bleibt.

Die zwischen den äusseren Producten dreier Punkte einer Geraden bestehende Gleichung

$$[bc] + [ca] + [ab] = 0$$

ist characteristisch für diejenigen Formen der Ausdehnungslehre, welchen im Gebiet zweiter Stufe die parabolische Massbestimmung zugehört.

6.

Wir betrachten jetzt das Gebiet dritter Stufe, und zwar zunächst den Fall, wo sich die Gleichung für den Masswerth auf die Form:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \qquad 1)$$

bringen lässt, ohne dass sich zugleich α^2 als Summe von nur zwei Quadraten darstellen liesse,[1] wo dann also der Ausdruck

[1] Man erhält wieder eine geometrische Deutung, indem man die Punkte des Gebietes auf die Punkte eines Ellipsoides oder Hyperboloides bezieht. Der Fall eines Ellipsoides entspricht der elliptischen, der eines zweischaligen (nicht geradlinigen) Hyperboloides der sogenannten hyperbolischen Geometrie. Die Grenzfälle der beiden folgenden Paragraphen entstehen, wenn die Fläche in einen Cylinder, bezüglich ein Paar paralleler Ebenen ausartet.

eines beweglichen Punktes durch die Grundpunkte die Form

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}\; e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad 2)$$

annimmt. Jeder Punkt ist, dem doppelten Vorzeichen der Wurzel entsprechend, auch hier wieder durch zwei „Diametralpunkte" vertreten, und das Gebiet dritter Stufe ist demnach mit zwei Blättern überdeckt zu denken, welche längs des Ortes der Punkte vom Zahlwerth Null zusammenhängen. Die Letzteren, die wir auch hier als unendlich ferne Punkte bezeichnen, erfüllen eine Curve II. Ordnung, d. h. ihr Ort hat mit jeder Geraden zwei Punkte gemein.

Leitet man alle Punkte der Geraden aus zweien derselben ab, so kann man den Ausdruck für den Masswerth eines auf der Geraden beweglichen Punktes auf die Form 2) des §. 3 bringen, und man kann daher die dort gemachten Schlüsse ohne Weiteres übertragen. Da die Gesammtheit der unendlich fernen Punkte bei jeder affinen Transformation ungeändert bleibt, und auch Paare normaler Punkte wieder in solche übergehen, so ergibt sich:

„Auf jeder Geraden, welche zwei getrennte unendlich ferne Punkte enthält, gibt es ein natürliches Einheitsmass, das äussere Product zweier normaler einfacher Punkte. Zwei Punkte können dann und nur dann durch eine affine Transformation in zwei andere übergeführt werden, wenn ihre Winkel, bezogen auf die zugehörigen Einheitsmasse, in beiden Fällen dieselben sind."

Die Punkte e_0, e_1, e_2 der Gleichung 2) sind paarweise zu einander normal, und je drei paarweise zu einander normale Punkte besitzen die Eigenschaft, als Grundpunkte eingeführt mit einem beliebigen Punkte durch eine Gleichung von der Form 2) verbunden zu werden. Jedes solche Punkttripel (Poldreieck der Curve II. O.) kann durch eine affine Transformation in jedes andere verwandelt werden, denn die Gleichung 2) nimmt für alle dieselbe Form an, und man erhält die Gesammtheit aller affinen Transformationen, indem man ein beliebiges derselben der Reihe nach allen andern zuordnet.

Es gibt einfach unendlich viele Gerade, deren unendlich entfernte Punkte zusammenfallen, und deren Gesammtheit daher bei allen affinen Transformationen in sich selbst übergeführt wird.

Die unendlich fernen Punkte derselben besitzen die Eigenschaft der Strecken des §. 5, zwei Punkte einer solchen Geraden können durch eine affine Transformation (des Gebietes dritter Stufe) immer in zwei beliebige andere übergeführt werden.

Auf ihnen gibt es also kein natürliches Einheitsmass, und man darf auch kein solches einführen (vgl. §. 5), wenn man nicht, die Zahl der anzuwendenden Transformationen willkürlich einschränken will.

Alle zu einem gegebenen Punkte a normalen Punkte erfüllen eine Gerade, da, wie man sich leicht überzeugt, ein zu zwei anderen normaler Punkt auch normal ist zu jedem Punkte des die letzteren verbindenden Gebietes. Wir bezeichnen nun das äussere Product zweier zu einander normaler einfacher Punkte dieses Gebietes als „Ergänzung" $|a$ des einfachen Punktes a, und dem entsprechend als Ergänzung des vielfachen Punktes αa die Grösse $\alpha a = |\alpha a$, wobei wir das Vorzeichen derselben für einen Punkt willkürlich annehmen und die Vorzeichen aller übrigen dann wie in §. 3 durch die Bedingung bestimmen, dass mit stetiger Änderung von a auch die Ergänzung dieses Punktes sich stetig ändern soll.

Dann bestehen zwischen den Ergänzungen beliebiger Punkte dieselben Zahlbeziehungen, wie zwischen den Punkten selbst.

Sind nämlich $\alpha_0 a_0$, $\alpha_1 a_1$, $\alpha_2 a_2$ drei Punkte einer Geraden, so stehen diejenigen drei zu ihnen normalen Punkte $\alpha_0 b_0$, $\alpha_1 b_1$, $\alpha_2 b_2$ der Geraden, welche sie in dem §. 3 festgesetzten Sinne ergänzen, in derselben Zahlbeziehung wie $\alpha_0 a_0$, $\alpha_1 a_1$, $\alpha_2 a_2$ selbst. Ist nun c der zu der Geraden normale einfache Punkt, so sind $[cb_0]$, $[cb_1]$, $[cb_2]$ die Ergänzungen der Punkte a_0, a_1, a_2 da c zu b_0, b_1, b_2 normal ist und bei stetiger Überführung von a_0 in a_1 und a_2 $[cb_0]$ in $[cb_1]$ bezüglich $[cb_2]$ übergeht. (§. 3). Man erhält also die zwischen $|\alpha_0 a_0$, $|\alpha_1 a_1$, $|\alpha_2 a_2$ bestehende Zahlbeziehung, indem man die zwischen $\alpha_0 b_0$, $\alpha_1 b_1$, $\alpha_2 b_2$ bestehende Gleichung äusserlich mit c multiplicirt: woraus hervorgeht, dass die Coëfficienten der zwischen den ursprünglichen Punkten und ihren Ergänzungen bestehenden Zahlbeziehungen dieselben sind.

Alle für die ursprünglichen Punkte aufgestellten Begriffe und Sätze lassen sich daher auf deren Ergänzungen unmittelbar übertragen. Es übertragen sich also die Begriffe des Normalen, des

inneren Productes, des Winkels u. s. w. nunmehr auch auf Grössen zweiter Stufe (Linientheile).

Als Ausdruck für den Masswerth einer Grösse zweiter Stufe, welche mittelst der Zahlen $\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2$ aus drei paarweise zu einander normalen Linientheilen abgeleitet ist, erhält man aus dem entsprechenden Ausdrucke für Punkte:

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Es gibt also auch unendlich viele Linientheile vom Masswerthe Null, die Ergänzungen der Punkte vom Masswerth Null: Sie stellen die bereits betrachteten Geraden dar, für welche die unendlich fernen Punkte zusammenfallen.

In dem obigen Satze ist die vollkommene Reciprocität aller Verhältnisse ausgesprochen, in welcher Punkte einerseits und Linientheile anderseits zu einander treten können.

Dieselbe erstreckt sich aber auch noch auf solche Beziehungen, in welchen Punkte und Linientheile gleichzeitig vorkommen, ein Verhältniss, das in den Eigenschaften der hier sich naturgemäss darbietenden regressiven Multiplication [1] seinen einfachsten Ausdruck findet.

Wählt man nämlich nicht die Punkte, sondern die Linientheile des Gebietes als Ausgangselemente, so wird man auch auf diese (wie auf alle extensiven Grössen) den Begriff der äusseren Multiplication anwenden können.

Das äussere Product zweier Linientheile wird dann ein vielfaches ihres Durchschnittspunktes; es ist dualistisch zu dem äusseren Product der Punkte, deren Ergänzungen jene Linientheile sind. Betrachtet man nun die zu multiplicirenden Linien-

---

[1] Die zweckmässigere Darstellung dieser Operation hat Grassmann in der ersten Bearbeitung seiner Ausdehnungslehre gegeben, da dort der lineare (projective) Character dieser Multiplicationsart unmittelbar hervortritt und nicht nachträglich bewiesen zu werden braucht. Die hier benutzte Definition des regressiven Productes stimmt mit der von Grassmann in A_2 angegebenen überein. Der letztere Weg ist der pädagogisch einfachere, und wahrscheinlich derjenige, auf welchem Grassmann zu diesem für die Ausdehnungslehre und ihre geometrischen Anwendungen so wichtigen Begriffe gelangt ist.

theile selbst wieder als durch äussere Multiplication von Punkten entstanden, und dehnt den Begriff der Ergänzung (wie es bei der Dualität aller Verhältnisse möglich ist) auch auf Linientheile aus, so geht diese Art der Multiplication in eine (formell) andere über, die „regressive" Multiplication, welche dadurch bestimmt ist, dass die Ergänzung des regressiven Productes zweier Linientheile gleich dem äusseren („progressiven") Producte der Ergänzungen der Linientheile gesetzt wird.

Wir haben bisher den Ausdruck für den Winkel zweier Punkte nur dadurch erhalten, dass wir das dieselben verbindende Gebiet zweiter Stufe als Hauptgebiet einführten, und dann die Bestimmungen von §. 3 und §. 4 anwendeten. Als Ausdruck des Winkels zweier Punkte ergab sich so ein Bogen, dessen Cosinus das auf jenes Hauptgebiet bezogene innere Product der beiden Punkte war.

Es wird nun möglich, den Winkel unmittelbar zu bestimmen durch die Bemerkung, dass der Werth dieses inneren Productes gleich ist dem äusseren Producte des einen der Punkte in die Ergänzung des anderen, wenn man wieder das Gebiet dritter Stufe als Hauptgebiet annimmt und das äussere Product dreier zu einander normaler einfacher Punkte (oder, was dasselbe ist, eines Punktes und seiner Ergänzung) gleich der Einheit setzt.

Als inneres Product zweier Punkte bezeichneten wir nämlich im Gebiet zweiter Stufe das äussere Product des einen und der Ergänzung des anderen, wobei als Masseinheit das äussere Product eines beliebigen Punktes und seiner Ergänzung diente.

Diese beiden äusseren Producte sind aufeinander fallende Linientheile und die zwischen ihnen bestehende Zahlbeziehung bleibt erhalten, wenn man beide äusserlich mit der Ergänzung des letzteren im Gebiet dritter Stufe multiplicirt.

Führt man für das äussere Product einer Grösse und der Ergänzung eines anderen die Bezeichnung „inneres Product" ein, so ergibt sich demnach, dass der „Winkel" zweier einfacher Punkte oder Linientheile einem Bogen gleich ist, dessen Cosinus von dem inneren Producte derselben gebildet wird. Der Masswerth eines Punktes oder Linientheiles wird gleich dessen innerem Quadrat. Da dasselbe für die unendlich fernen Punkte und Geraden verschwindet, findet man den Winkel zweier Punkte, die

auf einer unendlich fernen Geraden liegen, gleich Null, ebenso wie der Winkel zweier Geraden, die sich in einen unendlich fernen Punkt schneiden. („Parallele" Punkte und Gerade.)

Wir brauchen nach alledem kaum noch ausdrücklich hervorzuheben, dass die sich so ergebende, auf dem Begriffe des inneren Productes beruhende Massgeometrie mit der gewöhnlichen Geometrie auf der Kugel, oder der allgemeinen auf einen irreducibeln Kegelschnitt sich beziehenden projectiven Massbestimmung zusammenfällt.

Die affinen Transformationen des Gebietes entsprechen den Drehungen der Kugel, beziehungsweise den Bewegungen der nichteuclidischen Ebene. Es sind dies die „circulären Änderungen" Grassmann's.

7.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Falles, wo sich der Masswerth eines Punktes durch eine Summe von zwei Quadraten ausdrücken lässt, ohne dass schon ein einziges Quadrat hierzu ausreichte.[1]

Wir nehmen an, es sei

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}\, e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \qquad 1)$$

wo also der Masswerth des beweglichen Punktes e von der Ableitungszahl eines der drei Grundpunkte unabhängig wird.

Er wird gleich dem Masswerth der Zurückleitung des Punktes auf das Gebiet der beiden anderen Grundpunkte, wenn man für diese die §. 3 getroffene Bestimmung einführt, und alle Punkte, die sich nur um Vielfache des letzten Punktes e_2 unterscheiden, haben daher denselben Masswerth.

Der „Winkel" zweier Punkte wird gleich dem Winkel ihrer bezüglichen Zurückleitung auf das Gebiet der Punkte e_0 und e_1:

Alle Punktepaare, für welche diese Zurückleitungen gleich sind, bilden mit einander denselben Winkel und man kann daher aus irgend zwei Punkten unendlich viele andere Paare ableiten,

---

[1] Es ist vielleicht nützlich, schon hier zu bemerken, dass dieser Fall der elementaren Geometrie dualistisch gegenübersteht. Es konnte die letztere selbst hier nicht zur Betrachtung kommen, wollten wir nicht an dieser Stelle statt der Punkte die Linientheile als Ausgangselemente einführen.

die alle denselben Winkel haben, indem man sie um beliebige Vielfache von e_2 linear ändert.

Zwischen den Winkeln von irgend drei Punkten besteht die nämliche Beziehung wie zwischen denen von drei Punkten einer Geraden, ihre Summe ist also congruent Null mod. 2π.

[In der elementaren Geometrie ist die Summe der „Winkel" im Dreieck $= \pi$. Unterscheidet man aber die Richtungen einer Geraden — was der hier getroffenen Unterscheidung der Diametralpunkte entspricht — und bezeichnet als „Winkel" zweier Geraden diejenigen beiden Winkel, welche von positiven Richtungen begrenzt werden, so ergänzen sich dieselben zu 2π; ordnet man dann den drei Seiten eines Dreieckes beliebige Richtungen zu, so tritt entweder an Stelle eines der drei Innenwinkel des Dreiecks sein Nebenwinkel oder alle drei Winkel werden durch ihre Nebenwinkel ersetzt; und die Summe der Winkel wird dann gleich Null oder 2π. Dass die letztere Bezeichnungsart zweckmässiger ist als die in der elementaren Geometrie immer noch übliche, ist, wenn ich nicht irre, bereits von Möbius, dann von Grassmann (A_2 Nr. 340 Anmerkung) hervorgehoben worden.]

Die unendlich entfernten Punkte vom Masswerth Null erfüllen zwei gerade Linien, welche den Punkt e_2 enthalten.

Die Gesammtheit aller affinen Transformationen erhält man, indem man den Ausdruck eines beweglichen Punktes durch drei feste auf alle möglichen Arten auf die Form der Gleichung 1) bringt und dann irgend eines der so entstehenden Punkttripel e_0 e_1 e_2 nach einander allen anderen zuordnet. Man erhält daher, weil e_2 allen diesen Tripeln gemeinsam ist, und das Paar normaler Punkte e_0, e_1 wieder in ein solches übergehen muss, alle affinen Transformationen, in dem man zuerst das Gebiet von e_0 und e_1 affin transformirt, zu jedem der hierdurch aus e_0 und e_1 entstehenden Punkte ein beliebiges Vielfaches von e_2 fügt und den Punkt e_2 selbst mit einer beliebigen Zahl multiplicirt. Leitet man aus den auf diese Weise neu entstandenen Punkten e'_0 e'_1 e'_2 alle Punkte des Gebietes ab, und setzt zwei Punkte e und e' entsprechend, wenn e mit e_0 e_1 e_2 durch dieselbe Gleichung verknüpft ist, wie e' mit e'_0 e'_1 e'_2, so ist durch diese Beziehung die allgemeinste affine Transformation hergestellt.

Man sieht sogleich, dass man auf diese Art bewirken kann, dass drei gegebene Punkte in drei beliebige andere übergehen, welche paarweise mit einander dieselben Winkel bilden. Die äusseren Producte von drei entsprechenden Punkten erhalten hierbei im Allgemeinen einen constanten Factor und man kann auch hier wieder, wie im Gebiet zweiter Stufe diejenigen Transformationen auszeichnen, für welche derselbe gleich Eins ist. Es sind dies dieselben, für welche der Factor, mit welchem der Punkt e_2 multiplicirt wird, den Werth Eins hat. Da bei ihnen demnach je zwei Punkte, welche um ein Vielfaches des Punktes e_2 verschieden sind, in zwei andere übergehen, welche sich um dasselbe Vielfache von e_2 unterscheiden, so kann man, wenn man sich auf diese besonderen Transformationen beschränkt, auch für die den Punkt e_2 enthaltenden Gebiete zweiter Stufe eine Massbestimmung einführen, in welcher der Punkt e_2 offenbar den Character einer Strecke hat.

Wir bezeichnen solche Punktepaare als „parallel“ und das Vielfache von e_2, um welches sie sich unterscheiden, als die „Entfernung“ oder den „Abstand“ der parallelen Punkte.

Der Ausdruck für den Masswerth der Grössen zweiter Stufe hat (§. 2) der Bedingung zu genügen, dass er bei allen affinen Transformationen ungeändert bleibt.

Es müssen also, wenn zwei Punktepaare vom Masswerth 1 in einander transformirt werden können (gleiche Winkel haben), auch die Masswerthe der entsprechenden äusseren Producte einander gleich sein — eine Bedingung, durch welche der Masswerth bereits völlig bestimmt ist, wenn wir noch hinzufügen, dass das äussere Product zweier normaler Punkte den Masswerth 1 erhalten soll.

Wählen wir nämlich als Grundeinheiten zweiter Stufe die äusseren Producte der oben angeführten Grundpunkte e_0, e_1, e_2 also die Linientheile $[e_0\ e_1]$, $[e_0\ e_2]$ $[e_1\ e_2]$, so ist nach unserer Annahme der Masswerth von $[e_0\ e_1]$ gleich Eins; weil aber auch e_0 und $e_1+\lambda e_2$ ein Paar normaler Punkte bilden, ist auch der Masswerth von $[e_0\ (e_1+\lambda e_2)]$ unabhängig von λ gleich Eins, also der Masswerth von $[e_0\ e_2]$ und ebenso von $[e_1\ e_2]$ gleich Null.

Irgend ein Linientheil g wird daher mit den Grundeinheiten durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha g = \alpha[e_0\, e_1] + \beta[e_0\, e_2] + \gamma[e_1\, e_2] \qquad 2)$$

verbunden: Lässt sich der Ausdruck für das Quadrat des Masswerthes der Grössen erster Stufe im Gebiete dritter Stufe als eine Summe von zwei Quadraten darstellen, so wird der entsprechende Ausdruck für Grössen zweiter Stufe ein einziges Quadrat.

Alle „unendlich fernen" Geraden vom Masswerthe Null:

$$\beta[e_0\, e_2] + \gamma[e_1\, e_2)$$

deren Ort der Punkt e_2 ist, besitzen in diesem Falle die Streckeneigenschaft, und die Massbestimmung für alle Geraden desselben Büschels fällt zusammen mit der in §. 5 aufgestellten.

Da nämlich, wie man leicht sieht, durch eine affine Transformation zwei gegebene Gerade in zwei beliebige andere übergeführt werden können, so ist hier wie dort die Entfernung zweier Geraden unbestimmt, so lange man die Gesammtheit aller affinen Transformationen zu Grunde legt. Zeichnet man dagegen die schon oben betrachteten Transformationen aus, für welche das Product $[e_0\, e_1\, e_2]$ seinen Werth (Eins) beibehält,[1] so ist damit für irgend zwei Gerade eine Zahl bestimmt, deren Gleichheit für zwei Geradenpaare die Bedingung dafür ist, dass dieselben durch eine jener besonderen Transformationen in einander übergeführt werden können, und welche demselben Gesetze folgt wie der in §. 5 aufgestellte Begriff der Entfernung zweier Punkte. Seien nämlich c der Schnittpunkte der beiden (einfachen) Geraden g' und g'', e' und e'' die zu c ergänzenden Punkte derselben, so sind die letzteren zu einander parallel, und ihr Abstand ist eine Grösse, die bei diesen Transformationen erhalten bleibt (s. oben), welche also für je zwei in einander überführbare Geradepaare denselben Werth haben muss.

Dieselbe ist aber für alle Geraden $[ee']$, $[ee'']$, $[ee''']\ldots$ eines Büschels e den äusseren Producten $[e'e''].[e'e''']\ldots$ proportional, diese aber den Masswerthen der regressiven Producte $[g'.g''] = [ee'.ee''] = [ee'\, e'']e$.

[1] Dies ist an sich willkürlich. Die allgemeinere Annahme würde zu dem dualistischen Gegenstück der Helmholtz'schen Geometrie führen, welche ja mit der elementaren Geometrie die Massbestimmung im Strahlenbüschel gemein hat. Wir erhalten aber das Axiom der Monodromie auch für die Massbestimmung der Grössen zweiter Stufe aufrecht.

Zwischen diesen Producten selbst besteht daher die Gleichung

$$[g''.g'''] + [g'''.g'] + [g'g''] = 0$$

und wir dürfen (§ 5) den Masswerth des Productes $[g'.g'']$ unmittelbar als „Entfernung“ der Geraden g' und g'' einführen. [1]

Dieselbe verschwindet, wenn die beiden Geraden sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden (falls nicht eine der Geraden eine „unendlich ferne“ vom Masswerth Null ist).

Aus der Gleichheit aller analytischen Ausdrücke geht hervor, dass die hier kurz gekennzeichnete Geometrie sich von der elementaren ebenen Geometrie nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des Punktes die Gerade und umgekehrt getreten ist. Zu derjenigen Form der Ausdehnungslehre im Gebiet dritter Stufe, bei welcher das Quadrat des Masswerthes der Linientheile durch eine Summe von zwei ($n-1$ im allgemeinen Fall) Quadraten ausgedrückt wird, gehört eine Massgeometrie, welche in ihren Gesetzen mit der Euclidischen zusammenfällt.

Den ∞^4 (für die Linientheile) affinen Transformationen des Gebietes entsprechen die Ähnlichkeitstransformationen, der Untergruppe von ∞^3 Transformationen die congruenten und symmetrischen Umformungen der elementaren ebenen Geometrie.

8.

Nehmen wir endlich an, das Quadrat des Masswerthes sei ein vollständiges Quadrat. Dann können wir die Wurzel ausziehen und erhalten bei Einführung geeigneter Grundpunkte die einen veränderlichen Punkt mit drei festen Punkten verbindende Gleichung in der Form:

$$\alpha_0 e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2. \qquad 1)$$

[1] Auf etwas mehr rechnerischem Wege kann man zu demselben Resultat auch so gelangen:

Es sei $e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_2$ $(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1)$ der Schnittpunkt von g' und g'', ferner etwa

$$e' = -\alpha_1 e_0 + \alpha_0 e_1 + \alpha'_2 e_2$$
$$e'' = -\alpha_1 e_0 + \alpha_0 e_1 + \alpha''_2 e_2$$

die zu e ergänzenden Punkte e' und e'' beider Geraden. Dann wird

$$g' = [ee'] = [e_0 e_1] + (\alpha_0 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha_1)[e_0 e_2] + (\alpha_1 \alpha'_2 - \alpha_2 \alpha_0)[e_1 e_2]$$
$$g'' = [ee''] = [e_0 e_1] + (\alpha_0 \alpha''_2 + \alpha_2 \alpha_1)[e_0 e_2] + (\alpha_1 \alpha''_2 - \alpha_2 \alpha_0)[e_1 e_2]$$
$$[g'g''] = [ee'e''] e = (\alpha''_2 - \alpha'_2) e,$$

woraus unmittelbar die im Text angegebene Gleichung folgt.

Hier sind e_1 und e_2 Strecken, deren beliebige Vielfache zu einem gegebenen Punkt hinzugefügt, diesen in einen neuen Punkt vom gleichen Zahlwerth verwandeln, und welche innerhalb ihres Gebietes durch lineare Verbindungen derselben ersetzt werden können; e_0 ist dagegen ein beliebiger Punkt vom Masswerth Eins, der auch durch eine beliebige lineare Verbindung derselben mit den Strecken vertreten werden kann.

Die Anzahl der affinen Transformationen ist, wie in den früheren Fällen, so gross als die Zahl der möglichen Punktetripel e_0, e_1, e_2, auf welche als Grundpunkte bezogen der Ausdruck für den beweglichen Punkt die Form der Gleichung 1) annimmt, also ∞^6: Man erhält dieselben, indem man drei Punkten drei beliebige andere zuordnet. Ähnlich wie im Gebiet zweiter Stufe im entsprechenden Falle (§. 5) wird auch hier die Summe der Coëfficienten jeder Zahlbeziehung, welche zwischen einfachen Punkten besteht, gleich Null.

Der Masswerth der Grössen zweiter Stufe wird auch hier unbestimmt, falls man die Gesammtheit der affinen Transformationen zu Grunde legt; man kann aber wie früher zu bestimmten Ausdrücken für deren Masswerth gelangen, wenn man eine in der Gesammtheit enthaltene Untergruppe auszeichnet.

Es ist nun leicht zu sehen, dass dies nur auf zwei Arten geschehen kann.

Der Ausdruck für den Masswerth der Grössen zweiter Stufe ist nämlich nach §. 2 durch eine Function zweiten Grades der Ableitungszahlen gegeben, welche entweder auf eine Summe von drei oder zwei Quadraten oder auf ein einziges Quadrat sich zurückführen lässt. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, da dann nach §. 6 der Ausdruck für den Masswerth der Punkte kein vollständiges Quadrat sein kann. Die zweite Annahme, welche möglich ist, führt uns auf die Untersuchung des vorigen Paragraphes zurück, und wir haben daher allein noch den durch die dritte Annahme gegebenen Fall zu untersuchen, in welchem der Ausdruck für den Masswerth sowohl der Punkte als auch der Linientheile linear ist.

Derselbe kann nach dem Früheren auf die Form gebracht werden, dass er unmittelbar gleich der Ableitungszahl eines der drei Grundpunkte, beziehungsweise einer der drei Grundlinien

wird; und wir haben wieder zwei Möglichkeiten zu unterscheiden, je nachdem der ausgezeichnete Punkt und die ausgezeichnete Gerade — die wir als „Hauptpunkt“ und „Hauptlinie“ bezeichnen wollen, in einander fallen oder nicht.

Die letztere Annahme, welche wir als die allgemeinere zuerst untersuchen wollen, können wir analytisch dadurch ausdrücken, dass wir einen beweglichen Punkt e und eine bewegliche Gerade g mit drei festen Punkten e_0, e_1, e_2 durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \alpha_0 e &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ \beta_0 g &= \beta_0 [e_1 e_2] + \beta_1 [e_2 e_0] + \beta_2 [e_0 e_1] \end{aligned} \qquad 1)$$

in Verbindung setzen.

Es gibt dann augenscheinlich noch ∞^6 affine Transformationen, welche man erhält, indem man die Punkte e_1 und e_2 durch beliebige lineare Verbindungen derselben ersetzt. Sie sind eindeutig bestimmt, sobald man zwei gegebenen Punkten irgend zwei andere zuordnet. Unter ihnen sind diejenigen ausgezeichnet, für welche das Product des Hauptpunktes e_0 und der Hauptlinie $[e_1 e_2]$ seinen Werth, den wir gleich der Einheit annehmen dürfen, beibehält; es sind diejenigen, bei welchen das die Punkte e_1 und e_2 in der Gleichung 1) vertretende Punktepaar aus e_1 und e_2 durch lineare Änderung (A_2. Nr. 76) entstehen kann.

Hierbei geht ein Punktepaar a, b in ein anderes a', b' über, dessen äusseres Product mit dem Hauptpunkte e_0 denselben Werth hat, wie das entsprechende der ersten Punkte; und umgekehrt ist die Gleichheit dieser Producte auch hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Punktepaare durch eine Transformation der letzteren Art zur Deckung gebracht werden können.

Da nun zwischen den äusseren Producten von irgend drei Punkten einer Geraden a, b, c die Beziehung

$$[bc] + [ca] + [ab] = 0$$

besteht, so erhält man eine Gleichung derselben Form auch zwischen den Producten der drei Punktepaare mit e_0, und wir können daher die Zahl $[e_0 ab]$ unmittelbar als „Entfernung“ des Punktes b vom Punkte a einführen. Diejenigen Transforma-

tionen, bei welchen dieselbe für alle Punktepaare ungeändert bleibt, bezeichnen wir als „Bewegungen“ der Ebene, diejenigen, welche sie in ihren entgegengesetzten Werth verwandeln, als „symmetrische“ Umformungen.

Im Folgenden wollen wir nun die unter Zugrundelegung dieser Begriffe sich ergebende Massgeometrie etwas ausführlicher untersuchen, als die bisher behandelten Geometrieen, da sie nicht wie diese aus anderen Gesichtspunkten bereits untersucht worden ist.[1]

Der für die Entfernung zweier Punkte angenommene Ausdruck, welcher in dieser Geometrie auch seinem Vorzeichen nach unzweideutig bestimmt ist, zeigt sofort, dass der Ort aller Punkte, welche von einem beliebigen Punkte, der weder der Hauptpunkt ist, noch auf der Hauptlinie liegt, eine gegebene Entfernung besitzen, eine gerade Linie ist.

Dieselbe geht, wenn die Entfernung Null ist, sowohl durch den gegebenen Punkt als auch durch den Hauptpunkt; letzterer besitzt von allen Punkten des Gebietes die Entfernung Null. Jeder Punkt der Hauptlinie ist von allen Punkten des Gebietes unendlich entfernt, mit Ausnahme derjenigen Punkte, welche seiner Verbindungslinie mit dem Hauptpunkte angehören; von diesen ist er um eine unbestimmte Grösse entfernt.

Die beiden Geraden, deren Punkte von einem gegebenen Punkt e entgegengesetzt gleiche Entfernungen $+k$ und $-k$ haben:

---

[1] Man kann sich von dieser Geometrie eine anschauliche Vorstellung mit Hilfe einer auf die euclidische Geometrie bezüglichen Deutung derselben bilden. Man erhält dieselbe, wenn man einen festen Punkt auszeichnet, und als „Entfernung“ zweier Punkte a, b (mit Rücksicht auf das Vorzeichen) den Inhalt des Dreieckes definirt, welches dieselben mit dem festen Punkte zusammen einschliessen. Die „Bewegungen“ und „symmetrischen Umformungen“ der Ebene sind dann diejenigen im Sinne der elementaren Geometrie affinen Transformationen (d. h. lineare Transformationen, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen), die den Punkt e_0 ungeändert lassen und alle Figuren in flächengleiche Figuren verwandeln. Mit Hilfe dieser Vorstellung kann man sich die im Text angegebenen Sätze leicht constructiv deutlich machen. Ebenso die im §. 10 angegebenen Sätze, wenn man als Hauptlinie und Hauptpunkt die unendlich ferne Gerade und einen Punkt auf derselben wählt.

$$[e_0 e] - k[e_1 e_2]$$

und

$$[e_0 e] + k[e_1 e_2],$$

schneiden sich auf der Hauptlinie in dem Punkt $[e_0 e \,.\, e_1 e_2]$, welcher von e unbestimmt entfernt ist.

Bezeichnen wir ein solches Linienpaar als „Kreis", ihren Durchschnittspunkt als „Scheitel" des Kreises, den Punkt e als „Mittelpunkt" sowohl des Kreises, als auch jeder der beiden Geraden, aus welchen der Kreis besteht, die zugehörige Entfernung als „Radius", endlich Gerade, welche sich auf der Hauptlinie schneiden, als „parallel", so ergibt sich:

„Alle Geraden, die einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkt haben, bilden die Strahlen eines Büschels paralleler Geraden, welches die Hauptlinie und die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Hauptpunkt enthält. Jede Gerade hat unendlich viele Mittelpunkte, deren Ort diejenige gerade Linie ist, welche den Schnittpunkt der gegebenen Geraden und der Hauptlinie mit dem Hauptpunkte verbindet."

Bezeichnen wir den Ort der letzteren als „Mittellinie", so folgt weiter:

„Jeder Kreis zerfällt in zwei parallele gerade Linien, welche durch die Hauptlinie und die Mittellinie des Kreises — oder der beiden Geraden, aus denen er besteht — harmonisch getrennt sind."

„Alle Kreise mit demselben Mittelpunkt haben auch eine gemeinschaftliche Mittellinie, und also alle ihre Mittelpunkte gemeinsam; sie bilden einen Büschel von Kreisen mit gemeinschaftlichem Scheitel, unter dessen Kreisen sich zwei doppelt zählende Gerade befinden, die Mittellinie des Büschels und die Hauptlinie."

9.

Von der Entfernung zweier Geraden können wir, bei der vollkommenen Dualität der Bestimmungsgleichungen 1) im §. 8 im Voraus sagen, dass ihr analytischer Ausdruck dem regressiven Product der Geraden mit der Hauptlinie proportional sein muss. Und in der That erhält man, wenn man

den Begriff der Entfernung gerader Linien aus dem der Entfernung von Punkten ableitet, diesen Ausdruck.

Zunächst nämlich geht aus der Definition der Entfernung von Punkten sofort hervor, dass das äussere Product $[ab]$ zweier Punkte, wenn b von a die Entfernung $+1$ hat, eine Gerade vom Masswerth 1 ist, und dass umgekehrt jede Gerade, wenn der Punkt a in ihr gegeben ist, auf nur eine Art so dargestellt werden kann.

Sind also g, g', g'' drei Gerade, die durch denselben Punkt a gehen, so kann man die Punkte b, b', b'' eindeutig so bestimmen, dass sie von a die Entfernung $+1$ haben, und

$$g = [ab] \quad g' = [ab'] \quad g' = [ab'']$$

wird. Die Entfernungen der Punkte b, b', b'' nun bleiben bei allen Bewegungen ungeändert und man hat in der Gleichheit der entsprechenden Entfernungen die Bedingung dafür, dass ein Geradenpaar in ein anderes durch eine Bewegung übergeführt werden kann. Da aber b, b', b'' in einer Geraden liegen, so ist die Summe der Entfernungen dieser Punkte gleich Null, und die Entfernungen der zugehörigen Geraden werden den Entfernungen dieser Punkte gleich oder doch proportional.

Man hat also unter der ersten Annahme als Ausdruck für die Entfernung der Geraden g und g' die Grösse

$$\begin{aligned}[e_0 b b'] &= [a b b'] = [a b b'] [a e_1 e_2] \\ &= [a b . a b' . e_1 e_2] = [g g' . e_1 e_2]\end{aligned}$$

Man kann daher Alles, was von der Entfernung von Punkten gesagt wurde, sofort dualistisch auf die von geraden Linien übertragen, wobei natürlich der Hauptpunkt und die Hauptlinie ihre Stelle wechseln. Bezeichnen wir die zum Kreis dualistische Figur als „Zirkel“ und übertragen wir ebenso die andern bisher aufgestellten Begriffe, so erhält man neue Eigenschaften der als „Kreis“ bezeichneten Figur:

„Der Ort aller Geraden, welche von einer beliebigen Geraden, die weder die Hauptlinie ist, noch durch den Hauptpunkt geht, eine gegebene Entfernung besitzen, ist ein Punkt, dessen Verbindungslinie mit dem Hauptpunkt durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden und der Hauptlinie geht. Die Hauptlinie hat von den anderen Geraden die Entfernung Null, mit Ausnahme

der Geraden des Hauptpunktes, welche von ihr um eine unbestimmte Grösse entfernt sind. Jede Gerade des Hauptpunktes ist von den anderen Geraden unendlich entfernt, wiederum mit Ausnahme derjenigen, welche mit ihr und der Hauptlinie in einem Büschel liegen. Je zwei Punkte einer Geraden, deren Strahlen von derselben entgegengesetzte Entfernungen $+k$ und $-k$ haben, sind Mittelpunkte der Geraden in dem §. 8 definirten Sinne. Sie bilden zusammen einen Zirkel, dessen „Scheitellinie" durch den Hauptpunkt geht. Alle zu derselben Geraden gehörigen Zirkel bilden eine involutorische Punktreihe, deren Träger ihre gemeinsame Scheitellinie ist (welche zugleich die Mittellinie der Geraden vorstellt) und deren Doppelelemente der Schnittpunkt der letzteren mit der Hauptlinie und der Hauptpunkt sind."

Endlich können wir auch die Construction, durch welche wir zum Begriff der Entfernung zweier Geraden gelangten, dualistisch übertragen: „Construirt man diejenigen beiden Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, und von der Verbindungslinie derselben die Entfernung $+1$ haben, so ist ihre Entfernung gleich der in demselben Sinne genommenen Entfernung der beiden Punkte."

In dem Vorstehenden sind alle Hilfsmittel gegeben, um die Gesetze dieser Art von Geometrie in einer ähnlichen Weise zu entwickeln, wie es in der elementaren Geometrie geschieht.

Als einfachste Anwendung seien nur noch die Formeln angegeben, welche aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes die übrigen zu berechnen gestatten.

Es seien a, b, c; α, β, γ die Entfernungen der Ecken, beziehungsweise der Seiten des Dreiecks; dann sind bei gehöriger Wahl der Vorzeichen diese Grössen untereinander und mit dem Inhalt J des Dreiecks und der zu dem Inhalt dualistischen Grösse J' (dem halben regressiven Product der Seiten) durch die Formeln verbunden:

$$2J = a + b + c = bc\alpha = ca\beta = ab\gamma$$
$$2J' = \alpha + \beta + \gamma = \beta\gamma a = \gamma\alpha b = \alpha\beta c,$$

woraus noch:

$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma = J : J'$$
$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{4J^2}{abc}.$$

Diese Formeln reichen aus, um von den sechs Stücken $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ aus drei gegebenen die übrigen und J, J' eindeutig zu berechnen.

Aus der ersten derselben geht hervor, dass die gerade Linie in dieser Geometrie nicht der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist, indem das Problem der geodätischen Linien hier gegenstandslos wird.

10.

Die zweite der im §. 8 gemachten Annahmen endlich können wir allgemein durch die Voraussetzung befriedigen, dass die Ausdrücke für den Masswerth der Punkte und Linientheile durch Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} \alpha_1 e &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ \beta_0 g &= \beta_0 [e_1 e_2] + \beta_1 [e_2 e_0] + \beta_2 [e_0 e_1] \end{aligned} \qquad 1)$$

gegeben seien.

Die Gesammtheit der für Punkte und Linientheile gleichzeitig affinen Transformationen erhält man, wenn man in diesen Gleichungen den Punkt e_0 ungeändert lässt, e_2 durch eine lineare Verbindung von e_0 und e_2, e_1 endlich durch eine lineare Verbindung von e_0, e_1, e_2 ersetzt. Unter diesen sind aber wiederum diejenigen ausgezeichnet, bei welchen die Masswerthe der Grössen zweiter und dritter Stufe ungeändert bleiben, bei denen also die äusseren Producte $[e_0 e_2]$ und $[e_0 e_1 e_2]$ ihre Werthe beibehalten. Diese Transformationen, die wir als „Bewegungen" des Gebietes bezeichnen, werden, wenn man das letztere Product gleich Eins setzt, erhalten, indem man an Stelle der Punkte e_0, e_1, e_2 der Gleichungen 1) neue Punkte einführt, deren Ausdrücke beziehungsweise die Form

$$e_0;\ e_1 + \lambda e_0 + \mu e_2;\ e_2 + \nu e_0$$

haben, (wo λ, μ, ν beliebige Zahlen sind).

Das äussere Product des Hauptpunktes $[e_0\ ab]$ mit zwei beliebigen Punkten a und b bleibt bei allen Bewegungen ungeändert, und kann als „Entfernung" der beiden Punkte eingeführt werden.

Alle Punkte, die von einem gegebenen Punkte dieselbe Entfernung besitzen, sind zu einander „parallel", d. h., sie liegen

auf einer durch den Hauptpunkt gehenden Geraden. Dieselbe geht ausserdem durch den gegebenen Punkt, wenn die Entfernung gleich Null wird, und fällt für eine unendliche Entfernung mit der Hauptlinie zusammen.

Die Punkte der Hauptlinie sind von allen nicht auf ihr gelegenen Punkten unendlich entfernt, die Entfernung zweier Punkte der Hauptlinie selbst dagegen ist unbestimmt; ebenso auch die Entfernung des Hauptpunktes von den übrigen Punkten.

Die beiden Geraden

$$[e_0\, e] + k[e_0\, e_2] \text{ und } [e_0\, e] - k[e_0\, e_2],$$

welche von einem beliebigen Punkte e entgegengesetzt gleiche Entfernungen $+k$ und $-k$ haben, bezeichnen wir auch hier wieder als „Kreis“,[1] e als einen Mittelpunkt desselben. Dann ergibt sich:

„Jeder Kreis besteht aus einem Paar von parallelen durch den Hauptpunkt gehenden Geraden und umgekehrt bildet jedes solche Linienpaar einen Kreis. Jeder Kreis besitzt unendlich viele Mittelpunkte, deren Ort eine ebenfalls durch den Hauptpunkt gehende Gerade ist, welche von der Hauptlinie durch die beiden Geraden, aus denen der Kreis besteht, harmonisch getrennt wird. — Je zwei parallele Punkte besitzen von irgend einem anderen Punkte dieselbe Entfernung.“

Um zu dem Begriff der Entfernung zweier Geraden zu gelangen, stellen wir dieselben als äussere Producte ihres Schnittpunktes e mit zwei anderen Punkten e' und e'' dar, die von e um die Länge $+1$ entfernt sind, also der Gleichung

$$[e_0\, e\, e'] = [e_0\, e\, e''] = 1$$

genügen. Dann wird die Differenz $e'' - e'$ ein Vielfaches des Hauptpunktes, weil die Gerade $[e'e'']$ nach Obigem durch diesen Punkt geht und $e'' - e'$ wegen des Bestehens der Gleichung $[e_0\, e\, (e'' - e')] = 0$ auch der Geraden $[e_0 e]$ angehört.

Man sieht leicht, dass wenn

$$e' - e'' = \lambda e_0,$$

die Zahl λ als „Entfernung“ der beiden Geraden einzuführen ist.

---

[1] Diese Figur ist ein Grenzfall des Kreises der euclidischen Geometrie.

Da $[e_0 ee'] = 1$ ist, erhält man für dieselbe den Ausdruck

$$\lambda = -[ee'e''] = [ee' . ee'' . e_0 e_2]$$

d. h. die Entfernung zweier Geraden ist gleich ihrem regressiven Product mit der Hauptlinie.

Alle Geraden, welche von einer bestimmten Geraden eine gegebene Entfernung besitzen, bilden einen Büschel paralleler Geraden, dessen Scheitel auf der Hauptlinie liegt, und, wenn die gegebene Entfernung Null oder unendlich ist, in den Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit der Hauptlinie, bezüglich in den Hauptpunkt fällt.

Alle parallelen Geraden sind von einer beliebigen Geraden gleichweit entfernt.

Die Scheitelpunkte von zwei Büscheln paralleler Geraden bilden zusammen einen „Zirkel". Construirt man denjenigen Punkt, welcher vom Hauptpunkt durch die beiden Punkte des Zirkels harmonisch getrennt ist, und zieht durch ihn eine beliebige Gerade, so hat diese von zwei Geraden, die auf der Hauptlinie die Punkte des Zirkels ausschneiden, entgegengesetzt gleiche Entfernungen.

Es seien endlich auch hier noch die Beziehungen angegeben, welche die Entfernungen der Ecken und Seiten eines Dreiecks verbinden.

Man erhält, mit Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen:

$$a + b + c = 0 \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$2J = bc\alpha = ca\beta = ab\gamma$$
$$2J' = \beta\gamma a = \gamma\alpha b = \alpha\beta c$$
$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma = J : J'$$

In dieser Geometrie sind also alle Wege zwischen denselben beiden Punkten gleich lang.

Zur Lehre von den Modulargleichungen der elliptischen Functionen.

Von Dr. G. Pick,
Privatdocent in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1885.)

Im Verlaufe von Untersuchungen über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen haben sich mir gewisse zahlentheoretische Eigenschaften der Coëfficienten der Modulargleichungen dargeboten, welche trotz ihrer einfachen Gesetzmässigkeit und der geringen Schwierigkeiten ihrer Herleitung noch nicht bemerkt worden zu sein scheinen. Ich theile dieselben im Folgenden mit und schicke nur eine kurze Übersicht über die wenigen, übrigens wohlbekannten Sätze und Entwickelungen voraus, welche zu ihrer Aufstellung nöthig erscheinen.

1.

Als Modul verwenden wir ausschliesslich die Grösse

$$x(\omega) = 4^4 \frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}$$
$$= 1728 \cdot J,$$

wo k den gewöhnlich so genannten Modul des Legendre'schen Normalintegrals

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

also J die „absolute Invariante“ [1] bedeutet. Die Grösse $x(\omega)$ hängt von dem Periodenquotienten ω des Integrals

---

[1] Die Grösse $\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$ nach der von Herrn Weierstrass eingeführten Bezeichnungsweise. Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. 14, S. 112 ff.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2u)}}$$

derartig ab, dass sie ungeändert bleibt, wenn man ω durch

$$\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$$

ersetzt, wofern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind mit der Determinante

$$\alpha\delta-\beta\gamma = 1.^1$$

Bedeuten a, b, c, d vier ganze Zahlen, deren Determinante

$$ad-bc = n$$

positiv und grösser als 1 ist, so bezeichnet man den Übergang von ω zu

$$\bar{\omega} = \frac{c+d\omega}{a+b\omega}$$

als Transformation n^{ter} Ordnung. Denkt man sich alle möglichen (unendlich vielen) Transformationen n^{ter} Ordnung ausgeführt, und von jedem erhaltenen $\bar{\omega}$ die Function $x(\bar{\omega})$ gebildet, so ergibt sich doch nur eine endliche Zahl von einander verschiedener Grössen $x(\bar{\omega})$, welche man sämmtlich, und zwar jede nur einmal erhält, indem man $\bar{\omega}$ alle Werthe von der Form

$$\frac{C+D\omega}{A}$$

ertheilt, wobei A und D positive ganze Zahlen bedeuten, deren Product

$$A.D = n$$

ist, und C jeden Werth eines vollständigen Restsystems (mod. A) erhält, also am einfachsten jedesmal die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, A-1$$

durchläuft.[2]

---

[1] Vgl. F. Klein, a. a. O.

[2] Vgl. z. B. Königsberger, Theorie der elliptischen Functionen (Leipzig), Bd. II., S. 43 ff.

Die sämmtlichen Grössen

$$x(\bar{\omega}) = x\left(\frac{C+D\omega}{A}\right)$$

bilden die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$F_n(x, y) = \prod_{\bar{\omega}} [y - x(\bar{\omega})] = 0,$$

deren höchster Coëfficient gleich Eins, deren übrige ganze rationale Functionen von x sind. Diese Gleichung kann als „reducible" Modulargleichung[1] für den n^{ten} Transformationsgrad bezeichnet werden im Gegensatze zu jenen eigentlichen (irreduciblen) Modulargleichungen, welche man erhält, indem man von den „Repräsentanten"

$$\frac{C+D\omega}{A}$$

alle jene ausschliesst, in welchen A, C, D einen gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Function $x(\omega)$ besitzt eine Reihenentwickelung nach Potenzen von

$$Q = e^{2\pi i\omega}$$

von der Form

$$(1) \qquad x(\omega) = \frac{1}{Q}(1+\gamma_1 Q+\gamma_2 Q^2+\ldots),$$

in welcher $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ganze rationale Zahlen bedeuten, auf deren specielle Werthe es übrigens im Folgenden nicht ankommt.

Ausser diesen der Theorie der elliptischen Functionen angehörigen Begriffen und Entwickelungen werden im Folgenden noch zwei der Zahlentheorie entnommene Sätze zur Verwendung gelangen, welche kurz Erwähnung finden mögen.

1. Wenn $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung bedeuten, deren höchster Coëfficient gleich Eins, deren

[1] Vgl. Hurwitz, Göttinger Nachrichten, 1883, 21. Nov.

übrige ganze rationale Zahlen sind, so ist bekanntlich jede ganze, mit ganzzahligen Coëfficienten versehene symmetrische Function jener Wurzeln

$$s(\alpha, \beta, \ldots, \mu)$$

eine ganze Zahl.

Bedeutet nun p eine beliebige Primzahl, so findet die Congruenz statt:

$$s(\alpha^p, \beta^p, \ldots, \mu^p) \equiv s(\alpha, \beta, \ldots, \mu) \pmod{p}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes erhält man:

$$s(\alpha^{p^k}, \beta^{p^k}, \ldots, \mu^{p^k}) \equiv s(\alpha, \beta, \ldots, \mu) \pmod{p}.$$

Den höchst einfachen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in der Abhandlung von Herrn Dedekind: „Beweis für die Irreducibilität der Kreistheilungsgleichungen“ (Crelle's Journal, Bd. 54, S. 28).[1]

2. Bedeutet $f(x, y, \ldots, t)$ eine mit ganzzahligen Coëfficienten versehene Function der unbestimmten Grössen $x, y, \ldots, t$, so findet die identische Congruenz statt:

$$f(x^p, y^p, \ldots, t^p) \equiv f(x, y, \ldots, t,)^p \pmod{p},$$

aus welcher sich durch wiederholte Anwendung ergibt:

$$f(x^{p^k}, y^{p^k}, \ldots, t^{p^k}) \equiv f(x, y, \ldots, t)^{p^k} \pmod{p}.$$

Dieser Satz ist in kaum weniger allgemeiner Form schon von Gauss angewendet worden. (Gauss'Werke, Bd. II, S. 227.)

2.

Es soll nun vor Allem bewiesen werden, dass das im vorigen Paragraphen mit $F_n(x, y)$ bezeichnete Polynom lauter ganze rationale Zahlen zu Coëfficienten besitzt.

Es sei

$$\bar{Q} = e^{2\pi i \bar{\omega}};$$

[1] Vgl. auch Gauss' Werke, Bd. II, S. 224.

dann ist

$$x(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{Q}}(1+\gamma_1\bar{Q}+\gamma_2\bar{Q}^2+\ldots),$$

und folglich

$$F_n(x,y) = (-1)^{\Sigma\Delta}.\prod_{\bar{Q}}\frac{1}{\bar{Q}}(1+[\gamma_1-y]\bar{Q}+\gamma_2\bar{Q}^2+\ldots),$$

führt man nun für $\bar{Q}$ seinen Ausdruck

$$e^{2\pi i\frac{C+D\omega}{\Delta}} = e^{\frac{2\pi iC}{\Delta}}.Q^{\frac{D}{\Delta}}$$

ein, so kann das Product in der folgenden Weise ausgeführt werden. Man multiplicire zunächst bei festgehaltenem Δ über alle Werthe $0, 1, \ldots \Delta-1$ der Grösse C. Hiedurch erhält man für jeden Werth von Δ je ein Theilproduct, welches nur mehr ganze Potenzen von Q enthält, und offenbar nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen dieser Grösse; die Coëfficienten der einzelnen Potenzen aber sind ganze und ganzzahlige Functionen von y. Insbesondere wird das erste Glied der Entwickelung (also dasjenige mit der niedrigsten Potenz von Q)

$$\prod_{C=0}^{\Delta-1}\frac{1}{e^{\frac{2\pi iC}{\Delta}}.Q^{\frac{D}{\Delta}}} = (-1)^{\Delta+1}.\frac{1}{Q^D}.$$

Alles dies folgt aus den elementarsten Betrachtungen über symmetrische Functionen, und ist aus dem blossen Anblick jedes solchen Theilproductes klar.

Multiplicirt man nun alle auf solche Weise gebildeten Theilproducte mit einander, so resultirt eine Gleichung von der Form

$$F_n(x,y) = (-1)^g\frac{1}{Q^N}\{1+Y_1.Q+Y_2.Q^2+\ldots\};$$

hierin bedeutet g die Anzahl aller Theiler der Zahl n, $N = \Sigma D$ die Summe aller dieser Theiler; durch $Y_1, Y_2, \ldots$ endlich sind ganze Functionen von y bezeichnet mit ganzzahligen Coëfficienten. Auch dies ist aus der Entstehungsweise jenes Ausdrucks unmittelbar ersichtlich.

Es gelten nun für jede Potenz der Grösse $x = x(\omega)$ Entwickelungen von folgender Gestalt:

$$x^m = \frac{1}{Q^m}(1+\gamma_1^{(m)}Q+\gamma_2^{(m)}Q^2+\ldots),$$

(worin $\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \ldots$ ganze Zahlen bedeuten), wie aus Formel (1) der vorigen Paragraphen hervorgeht. Bringt man also die Grösse $(-1)^g . x^N$ von $F_n(x, y)$ in Abzug, so ergibt sich

$$F_n(x, y)-(-1)^g x^N = \frac{1}{Q^{N-1}}\{Y'+Y_1'.Q+Y_2'Q^2+\ldots\},$$

wo nun Y', Y_1', Y_2' wieder ganze und ganzzahlige Functionen von y bedeuten. Man wird nun weiter den Ausdruck

$$F_n(x, y)-(-1)^g x^N - Y'x^{N-1} = \frac{1}{Q^{N-2}}\{Y''+Y_1''Q+Y_2''Q^2+\ldots\}$$

bilden, wobei Y'', Y_1'', Y_2'' abermals Grössen von der Eigenschaft der Y sein werden und in derselben Weise fortfahren, um endlich eine Gleichung von der Form zu erhalten:

$$F_n(x, y)-(-1)^g x^N - Y' . x^{N-1} - \ldots - Y^{(N-1)} . x$$
$$= Y^{(N)}+Y_1^{(N)}.Q+Y_2^{(N)}.Q^2+\ldots$$

Nun aber ist leicht zu zeigen, dass sich die rechte Seite auf $Y^{(N)}$ allein reduciren muss. Denn linkerhand steht eine ganze rationale Function von x (welche ausserdem den Parameter y enthält), die also nur für $x = \infty$, das heisst für $Q = 0$, einen unendlich grossen Werth erlangen kann. Für $Q = 0$ aber convergirt die rechte Seite unserer Gleichung gegen einen endlichen Werth, weil negative Potenzen von Q nicht vorhanden sind. Also muss sie überhaupt von Q unabhängig sein. Unser Resultat lautet somit

$$F_n(x, y) = (-1)^g x^N + Y'x^{N-1} + Y''x^{N-2} + \ldots + Y^{(N)};$$

aus der wiederholt angegebenen Beschaffenheit der Functionen Y ergibt sich der im Eingang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz.

Es sei noch bemerkt, dass $(-1)^{\varphi}$ dann und nur dann gleich -1 ist, wenn n eine Quadratzahl ist. Denn die Theiler von n lassen sich so in Paare ordnen, dass jedes Paar n selbst als Product ergibt; nur in dem Falle eines vollständigen Quadrats bleibt ein Theiler $(\sqrt{n})$ übrig.

3.

Wir wollen nun die Modulargleichung vom n^{ten} Transformationsgrade mit derjenigen für die Transformation von der Ordnung $p^{\lambda}n$ in Beziehung setzen, wobei p eine in n nicht enthaltene Primzahl, λ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Bildet man ein vollständiges System von Repräsentanten für die Transformation $p^{\lambda\text{ter}}$ Ordnung, und unterwirft jeden derselben sämmtlichen Transformationen n^{ter} Ordnung, so erhält man bekanntlich ein vollständiges Repräsentantensystem für den Transformationsgrad $p^{\lambda}n$.

In der That, setzt man in dem Ausdrucke

$$\bar{\omega} = \frac{C+D\omega}{A}$$

für ω irgend eine Grösse von der Form

$$\frac{K+p^{\lambda-\rho}.\,\omega}{p^{\rho}},$$

so geht $\bar{\omega}$ über in

$$\bar{\omega} = \frac{(Cp^{\rho}+DK)+p^{\lambda-\rho}D.\omega}{p^{\rho}A}.$$

Hierin ist

$$(p^{\rho}A)\times(p^{\lambda-\rho}D) = p^{\lambda}n;$$

und lässt man C die Werthe

$$0, 1, \ldots, A-1,$$

und unabhängig davon K die Werthe

$$0, 1, \ldots, p^{\rho}-1$$

durchlaufen, so nimmt der Ausdruck

$$Cp^\rho + DK$$

jeden Werth eines vollständigen Restsystems (mod. Ap^ρ) einmal und nur einmal an, wie in den Elementen der Zahlentheorie gezeigt wird.

Um also aus der Modulargleichung

$$F_n(x, y) = 0$$

die neue

$$F_{p^{\lambda_n}}(x, y) = 0$$

zu erhalten, hat man in $F_n(x, y)$ für x sämmtliche Grössen

$$x\left[\frac{K + p^{\lambda-\rho}\omega}{p^\rho}\right]$$

einzusetzen, und die entstandenen Polynome miteinander zu multipliciren.

So erhält man

$$F_{p^{\lambda_n}}(x, y) = \prod_{\rho,\, K} F_n\left(x\left[\frac{K + p^{\lambda-\rho}\omega}{p^\rho}\right],\ y\right)$$

$$= (-1)^{\varphi(\lambda+1)} \prod_{\rho,\, K} \frac{1}{Q^N_{\rho,\, K}} \{1 + Y_1 Q_{\rho,\, K} + Y_2 Q^2_{\rho,\, K} + \ldots\}.$$

Hierin bedeutet $Q_{\rho,K}$ die Grösse

$$e^{2\pi i \frac{K + p^{\lambda-\rho}\omega}{p^\rho}} = e^{\frac{2\pi i K}{p^\rho}} \cdot Q^{p^{\lambda-2\rho}}.$$

Wir zerlegen nun den gefundenen Ausdruck für $F_{p^{\lambda_n}}(x, y)$ in Theilproducte, indem wir zunächst bei festgehaltenem ρ über alle

$$K = 0, 1, \ldots, p^\rho - 1$$

multipliciren. Hier treten nun die beiden am Schlusse des ersten Paragraphen aufgeführten zahlentheoretischen Sätze in Kraft.

Nach dem ersten derselben ersetzen wir die in den Factoren vorkommenden Einheitswurzeln

$$e^{\frac{2\pi i K}{p^\rho}}$$

sämmtlich durch ihre p^{ρ}ten Potenzen, das heisst durch

$$+1.$$

Hiedurch geht das Product über in

$$(-1)^{g(\lambda+1)} \prod_{\rho} \left\{ \frac{1}{Q^{Np^{\lambda-2\rho}}} [1 + Y_1 Q^{p^{\lambda-2\rho}} + Y_2 Q^{2p^{\lambda-2\rho}} + \ldots] \right\}^{p^{\rho}}.$$

Nun führen wir mit Hilfe des zweiten Satzes die Potenz unter dem Productzeichen aus, wodurch wir erhalten:

$$(-)^{g(\lambda+1)} \prod_{\rho} \left\{ \frac{1}{Q^{Np^{\lambda-\rho}}} [1 + Y_1^{p^{\rho}} Q^{p^{\lambda-\rho}} + Y^{p^{\rho}} Q^{2p^{\lambda-\rho}} + \ldots] \right\}.$$

Der jetzt unter dem Productzeichen stehende Ausdruck entsteht nun augenscheinlich aus

$$(-1)^g F_n(x, y) = \frac{1}{Q^N} [1 + Y_1 Q + Y_2 Q^2 + \ldots],$$

indem man hierin für y überall $y^{p^{\rho}}$, für Q aber $Q^{p^{\lambda-\rho}}$ einsetzt. Denkt man also jenen Ausdruck nach Potenzen von $y^{p^{\rho}}$ geordnet, so sind die einzelnen Coëfficienten dieser Potenzen nach dem zweiten Hilfssatze durch die $p^{\lambda-\rho}$ten Potenzen der entsprechenden Coëfficienten in $(-1)^g F_n(x, y)$ zu ersetzen. Das heisst aber, wir werden auf die Grösse

$$(-1)^g F_n(x^{p^{\lambda-\rho}}, y^{p^{\rho}})$$

geführt. Fassen wir alle diese Umgestaltungen zusammen, so können wir sagen: das zum Index ρ gehörige Theilproduct weicht von der Grösse

$$(-1)^g F(x^{p^{\lambda-\rho}}, y^{p^{\rho}})$$

um eine Reihe in Q ab, deren Coëfficienten ganze Functionen von y sind, welche selbst ganzzahlige Coëfficienten tragen, deren jeder durch p theilbar ist.

Führen wir nun auch die Multiplication nach ρ aus, so ergibt sich

$$F_{p^{\lambda}n}(x, y) = \prod_{\rho=0}^{\lambda} F_n(x^{p^{\lambda-\rho}}, y^{p^{\rho}}) + p \cdot \{Q, y\},$$

worin durch $\{Q, y\}$ eine Reihe nach Q bezeichnet ist, deren Coëfficienten ganze und ganzzahlige Functionen von y sind.

Aber diese Reihe muss selbst eine ganze Function von x und y sein, weil sowohl $F_{p^{\lambda}n}(x, y)$ als auch das rechts stehende Product solche Functionen sind. Sie muss ferner durchaus ganze Zahlen als Coëfficienten der einzelnen Posten besitzen, was augenscheinlich in Uberlegungen genau derselben Art seinen Grund hat, wie sie im zweiten Paragraphen an $F_n(x, y)$ durchgeführt worden sind.

Wir haben es also in unserer Schlussgleichung mit lauter ganzen und ganzzahligen Polynomen in x und y zu thun, und können daher mit Benützung des Congruenzzeichens einfacher schreiben:

$$F_{p^{\lambda}n} \equiv \prod_{\rho=0}^{\lambda} F_n(x^{p^{\lambda-\rho}}, y^{p^{\rho}}) \pmod{p}.$$

Unter abermaliger Benützung jenes zweiten zahlentheoretischen Hilfssatzes können wir diese Formel für ungerade λ in die Gestalt setzen

$$F_{p^{\lambda}n}(x, y) \equiv \prod_{0 \leqq \rho < \frac{\lambda}{2}} \{F_n(x^{p^{\lambda-2\rho}}, y) \cdot F_n(x, y^{p^{\lambda-2\rho}})\}^{p^{\rho}};$$

für gerade λ tritt zu dem Producte rechterhand noch der Factor

$$F_n(x, y)^{p^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

4.

Der im vorigen Paragraphen gefundene Satz verliert seine Giltigkeit nicht, wenn $n = 1$ gesetzt wird.

An Stelle der Modulargleichung $F_n(x, y) = 0$ tritt dann einfach die Gleichung

$$y - x = 0.$$

Wir erhalten also die Formel

$$F_{p\lambda}(x, y) \equiv \prod_{\rho=0}^{\lambda} (y^{p^\rho} - x^{p^{\lambda-\rho}}) \pmod{p}.$$

Ist insbesondere $\lambda = 1$, so wird

$$F_p(x, y) \equiv (y - x^p)(y^p - x) \pmod{p}.$$

Es gibt also nur vier Glieder in der Modulargleichung von der Primzahlordnung p, deren Coëfficienten nicht durch p theilbar sind, nämlich die Glieder mit

$$y^{p+1},\ x^p y^p,\ xy,\ x^{p+1}.$$

Wir fügen nun noch eine Bemerkung hinzu. Dasselbe Verfahren, welches uns gedient hat, um zahlentheoretische Eigenschaften der Coëfficienten der reduciblen Modulargleichungen aufzufinden, kann angewendet werden, um in gleicher Weise über die Beschaffenheit der irreduciblen Modulargleichungen ins Klare zu kommen.

Aber man kann auch von den hier gefundenen Congruenzen direct zu solchen übergehen, welche für die irreduciblen Modulargleichungen Geltung haben. Bedeutet nämlich $\Phi_n(x, y)$ die gewöhnlich so genannte Modulargleichung für den n^{ten} Transformationsgrad, so ist bekanntlich

$$F_n(x, y) = \prod_{a} \Phi_{\frac{n}{a^2}}(x, y),$$

wobei das Product über alle Zahlen a zu erstrecken ist, deren Quadrate in n aufgehen. Aus dieser Gleichung erhält man nach einer allgemeinen Auflösungsmethode, welche von Herrn Dedekind angegeben worden ist,[1] umgekehrt Φ_n ausgedrückt durch verschiedene Polynome F_n. Durch geeignete Verbindung der oben gefundenen Congruenzen können dann offenbar analoge für Φ_n gefunden werden.

---

[1] Crelle's Journal, Bd. 54, S. 25 f. oder Dirichlet-Dedekind Zahlentheorie (3. Aufl.), S. 362.

Ohne auf diese Ableitung, welche vollkommen elementar ist und kein weiteres Interesse bietet, näher einzugehen, setze ich noch die Hauptformel her, welche man zum Schlusse erhält. Es ergibt sich

$$\Phi_{p^{\lambda}n}(x, y) \equiv \prod_{0 \leqq \rho < \frac{\lambda}{2}} \{\Phi_n(x^{p^{\lambda-2\rho}}, y) \cdot \Phi_n(x, y^{p^{\lambda-2\rho}})\}^{\varphi(p^{\rho})}$$

für ungerade λ; für gerade λ tritt auf der rechten Seite noch der Factor

$$\Phi_n(x, y)^{\varphi\left(p^{\frac{\lambda}{2}}\right)}$$

hinzu. $\varphi(k)$ bedeutet dabei die bekannte Gauss'sche Function.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. Band. II. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

IV. SITZUNG VOM 5. FEBRUAR 1885.

In Verhinderung des Vicepräsidenten führt Herr Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Se. Excellenz der Herr Minister für Cultus und Unterricht übermittelt das im Wege des k. und k. Ministeriums des Äussern als Geschenk der königl. grossbritannischen Regierung für die kaiserliche Akademie der Wissenschaften eingelangte grosse Werk: „Report of the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger during the Years 1873—1876."

Herr Vicepräsident Hofrath Ritter v. Brücke übermittelt im Namen des Verfassers den Jahrgang 1884 der von dem ausländischen c. M. Herrn Geheimrath Dr. C. Ludwig herausgegebenen „Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig".

Herr Prof. Dr. C. B. Brühl, Vorstand des zootomischen Institutes der Wiener Universität, übermittelt die Lieferungen 31 bis 33 seines illustrirten Werkes: „Zootomie aller Thierclassen".

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Arbeit aus dem physiologischen Institute der deutschen Universität zu Prag: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. XVII. Mittheilung. Über die elektrische Erregung des Schliessmuskels von Anodonta", von Herrn Prof. Dr. Wilh. Biedermann.

Das c. M. Herr Prof. R. Maly in Graz übersendet eine Abhandlung: „Untersuchungen über die Oxydation des Eiweisses mittelst Kaliumpermanganat."

Herr C. A. Purschke in Wien übersendet eine Abhandlung, betitelt: „*Clemmys sarmatica* n. sp. aus dem Tegel von Hernals bei Wien".

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, eingesendet von Herrn Arthur Prüsker, k. k. Landwehrhauptmann in Wien, vor. Dasselbe führt die Aufschrift: „Flugbahn-Aufsatz und daraus resultirende Methode des indirecten Schiessens."

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Petzval überreicht eine von Herrn Dr. Oskar Simony, a. o. Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur, verfasste Arbeit, betitelt: „Über zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen."

Das w. M. Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine Notiz des Herrn Prof. Dr. Karl Exner unter dem Titel: „Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze."

Das w. M. Herr Hofrath Prof. v. Langer überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. J. Janošik, Privatdocent an der medicinischen Facultät der böhmischen Universität zu Prag, betitelt: „Histologisch-embryologische Untersuchungen über das Uro-Genitalsystem."

Herr Dr. Norbert Herz in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Entwicklung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalien in independenter Form".

Herr Dr. Richard v. Wettstein überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Untersuchungen über einen neuen pflanzlichen Parasiten des menschlichen Körpers."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin, 49ᵉ année, 2ᵉ série, tome XIV, Nos. 1—3. Paris, 1885; 8°.

Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XIX, Disp. 1ª, 5ª—7ª. Torino; 1883—84); 8°.

— — Memorie. Serie 2ª, tomo XXXV. Torino, 1884; gr .4°. — Il primo Secolo della R. Accademia delle scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783—1883.) Torino, 1883; gr. 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl.: Öfversigt af Förhandlingar. 41 Årg. 1884 Nr. 5. Stockholm, 1884; 8°.

Alumni Association: Twentieth annual Report. Philadelphia, 1884; 8°.

Archivio per le scienze mediche. Vol. VIII, fascicolo 3°. Torino, 1884; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome C, 1er semestre. Nos. 2 & 3. Paris, 1885; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. VI. Jahrgang, 1885. Heft II. Januar. Berlin, 1885; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte, XVIII. Jahrgang, Nr. 1. Berlin, 1885; 8°.

— naturforschende in Bamberg: XIII. Bericht. Festschrift zur Halbsäcular-Feier. Bamberg 1884; 8°.

— Wetterauische, für die gesammte Naturkunde zu Hanau. Hanau, 1883; 8°.

Göttingen, Universität: Akademische Schriften pro 1884. — 58 Stücke 4° und 8°.

Johns Hopkins University: American Chemical Journal. Vol. VI. Nr. 5. Baltimore 1884; 8°.

Instituto y Observatorio de Marina de la ciudad de San Fernando: Almanaque náutico para 1886. Barcelona, 1884; 8°.

Instituut, koninklijk voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie: Bijdragen. VIII. Deel. 2te Stuk. 's Gravenhage, 1884; 8°. — 4e Volgreeks. Deel X. 1. Stuk. 's Gravenhage, 1885; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Steiermark: Landwirthschaftliche Mittheilungen für Steiermark. Nr. 1 bis 12. Graz, 1884; 8°. — Nr. 1. Graz, 1885; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXXI. Band, 1885. I. Gotha, 1885; 4°.

Observatory, the: a monthly review of Astronomy. Nr. 93 London, 1885; 8°.

Societas regia scientiarum upsalensis: Nova Acta. Ser. 3a, Vol. XII, Fasc. I. 1884. Upsaliae, 1884; 4°.

Societät, physikalisch-medicinische zu Erlangen: Sitzungsberichte. 16. Heft. Erlangen, 1884; 8°.

Société de Biologie: Comptes rendus hebdomadaires. 7e série, tome V, Nos. 1—44. Paris, 1884; 8°. — 8e série, tome VI, Nos. 1 et 2. Paris, 1885; 8°.

— royale des sciences de Liège: Douze tables pour le calcul des reductions stellaires; par F. Folie. Bruxelles, 1883; 4°.

Society, the royal astronomical: Memoirs. Vol. XVIII, part I, 1884. London, 1884; 4°.

— — Monthly notices. Vol. XLV, Nr. 2. London 1884; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. VII, Nr. 1. London, 1885; 8°.

— the seismological of Japan: Transactions. Vol. VII, part I, 1883—84. Tokio, 1884; 8°.

Utrechtsche Hoogeschool: Onderzoekingen gedan in het physiologisch Laboratorium. 3e Reeks IX. Utrecht, 1884; 8°.

Vereeniging, Nederlandsche dierkundige: Catalogus der Bibliothek. 3e Ausgabe. Leiden, 1884; 8°.

Verein, naturforschender in Brünn: Bericht der meteorologischen Commission im Jahre 1882. Brünn, 1884; 8°.

— — Verhandlungen. XXII. Band, 1. und 2. Heft. 1883. Brünn, 1884; 8°.

— naturhistorisch-medicinischer zu Heidelberg: Verhandlungen. N. F., III. Band, 3. Heft. Heidelberg, 1884: 8°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften: Originalabhandlungen und Berichte. Halle a. S., 1884; 8°.

— für physiologische Chemie. IX. Band. 2. Heft. Strassburg, 1885; 8°

Untersuchungen über die Oxydation des Eiweisses mittelst Kaliumpermanganat.

Von **Richard Maly** in Graz.

Den vielen Untersuchungen über die Zerspaltung des Eiweisses durch Säuren und Alkalien, sowie durch Fermente, stehen nur wenige Arbeiten gegenüber, bei denen das einwirkende Reagens ein directes Oxydationsmittel ist, und auch diese Arbeiten sind meist der früheren Zeit angehörig.

Guckelberger[1] hat im Jahre 1847 in Liebig's Laboratorium die trockenen Eiweisssubstanzen, wie Albumin, Fibrin, Caseïn, mit Braunstein und verdünnter Schwefelsäure sowie auch mit Chromsäuremischung behandelt und die dabei entstandenen flüchtigen Producte untersucht; er fand im ersten Falle die fetten Säuren von der Ameisensäure bis zur Capronsäure, Benzoësäure und die Aldehyde der Essig-Propion-Butter- und Benzoësäure. Bei Anwendung des Chromsäuregemisches wurden ziemlich dieselben Substanzen nebst Blausäure und einem zimmtartig riechenden Öle erhalten.

Keller[2] hat, die Identität der Thier- und Pflanzeneiweissstoffe betonend, das Verfahren Guckelberger's auf Kleber angewandt und die gleichen Oxydationsproducte erhalten und Fröhde[3] hat, die Chromsäureversuche nach verschiedenen Richtungen fortsetzend, sie auch auf das Zersetzungsproduct des Eiweisses, das Tyrosin selbst ausgedehnt. Immer sind dabei die genannten, verhältnissmässig einfach constituirten Oxydationsproducte erhalten worden, und zwar vorwiegend stickstofffreie Substanzen, während der Stickstoff nur in Form von Blausäure,

---

[1] Liebig's Annal. d. Chem. u. Pharm. **64.** 39.

[2] Daselbst **72.** 24.

[3] Erdmann's Journ. **79.** 303 und 483; **77.** 290 und **80.** 314.

flüchtigen Nitrilen oder rückständigem Ammoniumsulfat erhalten wurde.

Gorup-Besanez[1] hat durch die Einwirkung von Ozon auf die Eiweisskörper keine wohl characterisirten Substanzen erhalten können.

Oxydationen in alkalischer Lösung sind einige Male mittelst Kaliumpermanganat versucht worden. Die älteren derlei Versuche rühren von Bechamp[2] her, welcher zu verschiedenen Malen darauf zurückkam, indem er die Idee verfolgte, die Zerfallsproducte des Eiweisses im thierischen Organismus, speciell den Harnstoff durch künstliche Eiweissoxydation herzustellen, ein Resultat, das erhalten zu haben er auch wiederholt behauptet. Bechamp beschreibt in seiner Strassburger These die Einwirkung folgendermassen. 10 Grm. Albumin werden in der 30-fachen Menge Wasser gelöst und allmählig mit 75 Grm. Kaliumpermanganat versetzt. Die anfangs lebhafte Reaction hört bald auf, worauf man bis auf 40° erwärmt und den grösseren Theil des Alkalis mit Schwefelsäure abstumpft. Nach vollendeter Entfärbung wird filtrirt, mit Schwefelsäure neutralisirt, eingeengt und der Rückstand mit starkem Alkohol versetzt, wobei sich die Sulfate von K und NH_4 abscheiden. Nach wiederholter Behandlung des Alcoholextractes mit neuem Alkohol wird ein Rückstand erhalten, in dem Harnstoff leicht nachweisbar ist. Dabei ist stärkste Oxydation, also grosser Überschuss von Permanganat nöthig. Quantitative Versuche mit dem als Harnstoff betrachteten Körper hat Bechamp nicht angestellt. Übereinstimmend mit Bechamp gibt später Ritter[3] an, bei gleicher Reaction Harnstoff erhalten zu haben und zwar 0·09 Grm. aus 30 Grm. Albumin.

---

[1] Liebig's Annal. **110.** 96.

[2] Essai sur les substances albuminoides et sur leur transformation en urée. Thèse, Strassburg 1856. Bekannt durch: Cannstatt's Jahresb. ü. d. Fortschritte der Pharmazie 1856. Ferner Bechamp: Recherches sur les produits de l'oxydation des substances albuminoides par l'hypermanganate de potasse, Annal. de Chim. et de Phys. **57.** 291 durch Cannstatt's Jahresb. für 1859; Sur la formation de l'urée par l'action de l'hypermanganate de potasse sur les matières albuminoides, Compt. rend. **70.** 866 und Compt. rend. **78.** 1323.

[3] Compt. rend. 1871 und Jahresb. d. Thierchemie **1.** 13.

Den Angaben dieser beiden Chemiker steht eine Reihe völlig abweichender Resultate gegenüber. Sofort nach dem Erscheinen von Bechamp's These im Jahre 1857 hat Städeler,[1] die fundamentale Wichtigkeit des künstichen Abbaues von Eiweiss zu einfachen Stoffwechselproducten erkennend, in seinem Laboratorium unter Einhaltung von Bechamp's Vorschrift ebenfalls Albumin mit Kaliumpermanganat behandelt, aber keinen Harnstoff, sondern nur etwas Benzoësäure im letzten Alkoholextract auffinden können. Zu ebensolchen negativen Resultate kamen später Loew[2] und Tappeiner,[3] welcher letztere in vier genau Bechamp nachgeahmten Versuchen keinen Harnstoff erhalten konnte. Damit können Bechamp's Angaben als definitiv widerlegt angesehen werden, wozu noch kommt, dass neuestens F. Lossen[4] bei Einwirkung einer mässigen Menge des Permanganates zwar ebenfalls keinen Harnstoff, aber eine kleine Menge Guanidin erhielt, das als Goldchloriddoppelsalz analysirt werden konnte.

Haben demnach die besprochenen Oxydationsversuche das gewünschte und gesuchte specielle Ziel nicht erreicht, so sind sie anderseits noch mehr schuldig geblieben, nämlich anzugeben, was aus dem Eiweiss entsteht, denn die kleine Guanidinmenge Lossen's, so bemerkenwerth das Auftreten dieses Körpers ist, steht zur Menge des oxydirten Albumins in keinem Verhältniss.

Nun findet sich in Bechamp's erster Arbeit von 1856 aber doch eine Andeutung über ein Product, das Bechamp jedoch nur nebenbei erwähnte und als mit der Aufsuchung des Harnstoffs in keiner Beziehung stehend, nicht näher beachtete. Er sagt nämlich, dass bei der ersten Einwirkung des Kaliumpermanganates die Eiweissflüssigkeit gallertartig, mit fortschreitender Oxydation aber wieder flüssig werde und dass, wenn das Permanganat nur allmälig und in unzureichender Menge zugesetzt wird, im farblosen Filtrat vom Braunsteinschlamm auf Zusatz von verdünnter Schwefelsäure ein weissflockiger Niederschlag einer

---

[1] Erdmann's Jour. prakt. Chem. **72.** 251.

[2] Journ. f. prakt. Chem. N. F. **2.** 289.

[3] Sep. Abd. aus den Bericht. d. mathem. naturw. Classe d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. vom 6. Mai 1871.

[4] Liebig's Annalen **201.** 369.

Substanz entstehe, die dem Eiweiss ähnlich sieht. In einer späteren Mittheilung bezeichnet Bechamp[1] den Niederschlag als eine in Wasser völlig unlösliche, vom Albumin verschiedene Substanz, und gibt an, dass sie nach intensiverer Oxydation mit dem Permanganat nicht mehr auffindbar sei, dass dann hingegen eine lösliche Substanz als Kalisalz vorhanden sei, die mit dem Geruch nach verkohltem Horn verbrennt.

Auch Lossen, welcher 500 Grm. käufliches Hühnereiweiss mit nur 375 Grm. Kaliumpermanganat behandelte, gedeckt der voluminösen Fällung, welche Schwefelsäure in seinem Braunsteinfiltrate erzeugte, während Städeler, welcher auf 1 Theil Albumin $3^1/_2$ Theile Permanganat anwandte und Tappeiner, welcher auf 20 Grm. trockenes Hühnereiweiss 200 Grm. übermangansaures Kalium einwirken liess, von dem durch Schwefelsäure voluminös fällbaren Körper nichts erwähnen und denselben wohl auch nicht erhielten.

Dieses durch Säure fällbare Product mässiger Oxydation des Albumins durch Kaliumpermanganat war, da es niemals auch nur einigermassen untersucht und nur als unerwünschtes Nebenproduct erhalten worden war, völlig in Vergessenheit gekommen, bis es kürzlich E. Brücke[2] wieder von neuem auffand und qualitativ so weit untersuchte, dass er den Körper mit Sicherheit als vom Eiweiss verschieden, mit Wahrscheinlichkeit als reine Substanz, und zwar als eine „stickstoff und schwefelhaltige unkrystallisirbare Säure" bezeichnen konnte. Brücke stellte vor Allem durch eine Reihe von Reactionen fest, dass die fragliche Substanz, die er aus dem Filtrate vom Manganniederschlag immer mittelst Essigsäure ausfällte, keine Eiweisssubstanz mehr sei, denn sie gab die für die Eiweisssubstanzen als generell bezeichneten Reactionen nicht mehr; sie färbte sich mit Salpetersäure und Kali nicht gelb, mit Millon's Reagens nicht roth, sie gab nicht die Probe mit Zucker und Schwefelsäure, nicht jene mit Eisessig und Schwefelsäure und wurde endlich beim Kochen mit Salzsäure nicht violett. Auch enthielt die Substanz keinen durch

[1] Ann. de Chim. et de Phys. 57. 291 durch Cannstatt's Jahresb. d. Pharm. pro 1859.

[2] Sitzungsb. d. k. Akademie 1881 II. Abth. und Monatshefte f. Chemie, 2. 23.

Kochen mit Kali und Bleizuckerlösung nachweisbaren Schwefel. Brücke gibt ferner noch von seiner Substanz an, dass sie in alkalischer Lösung Kupferoxyd mit violetter Farbe aufnimmt, dass sie Stickstoff und durch Schmelzen mit Kali und Salpeter nachweisbaren Schwefel enthält. Sie hat die Eigenschaften einer schwachen Säure und ist in Ammoniak und Alkalien löslich. Auch in starken Mineralsäuren löst sie sich auf, aus welchen Lösungen Wasser einen Niederschlag fällt. In den neutralen oder schwach sauren Lösungen bringen Metallsalze Fällungen hervor. In ihren physikalischen Eigenschaften ist die Substanz dem Eiweiss noch einigermassen ähnlich; sie dreht links.

Brücke hat ferner angedeutet, welches Interesse dieser Substanz gebührt, die durch einen Oxydationsprocess aus dem Hühneralbumin entstehend, leicht in relativ grosser Menge gewinnbar ist, hat aber gleichzeitig auch darauf verzichtet, den Körper weiter zu studieren.

Die in den folgenden Blättern von mir mitgetheilten Untersuchungen sollen die Kenntnisse über jenes Gebiet erweitern, das Brücke durch die genannte Abhandlung aufgeschlossen hat.

Eigene Versuche.

Es war mir zunächst daran gelegen zu erfahren, ob ausser dem Hühnereiweiss auch andere, oder ob alle Eiweisssubstanzen mit Permanganat diese eigenthümliche Brücke'sche Säure geben. Ich habe daher die wichtigeren Repräsentanten der Eiweissstoffe der Reihe nach mit dem genannten Reagens behandelt und davon die coagulirbaren sowohl im flüssigen als im coagulirten Zustande. Dabei war von quantitativen Verhältnissen abgesehen und nur überhaupt untersucht, ob sich die anderen Eiweissstoffe ebenso verhalten, wie es Brücke für flüssiges Hühnereiweiss beschrieben hat.

Wenn Eiereiweiss flockig coagulirt und der abfiltrirte Niederschlag zum Brei zerrührt mit Kaliumpermanganat behandelt wird, tritt unter anfänglicher Erwärmung und Verdickung bis zur Gallerteconsistenz später wieder Verflüssigung ein, genau wie bei dem nicht coagulirten Eiweiss, und aus dem farblosen

Filtrate wird die erwartete Säure, in so weit ersichtlich, gleicher Menge und mit allen den von Brücke angegebenen Eigenschaften ausgefällt. Das Gleiche gilt für Serumalbumin vom Rind im flüssigen, wie im coagulirten Zustande. Diese vier Eiweissformen zeigen also ein ganz übereinstimmendes Verhalten.

Fibrin vom Rind (das früher in Alkohol aufbewahrt gewesen, dann 24 Stunden lang ausgewässert worden war) imbibirt sich, mit Kaliumpermanganatlösung übergossen rasch mit Braunstein und zerfällt. Es wurde noch so viel Reagens hinzugefügt, dass das Ganze zwei Tang röthlich gefärbt blieb, dann mit ein paar Tropfen Alkohol entfärbt und filtrirt. Das klare, farblose Filtrat gab mit Säure eine reichliche, flockig weisse Fällung, die mit verschiedenen Reagentien geprüft, sich gerade so verhielt wie die aus Eiweiss erhältliche Substanz.

Caseïn gab gleichfalls nach vorgängiger Gallertebildung ein farbloses Filtrat, aus dem die fragliche Säure ausgefällt werden konnte. Da auch Caseïn aus seiner Lösung in alkalischen Mitteln durch Säuren weiss und flockig gefällt wird, so war es nothwendig, sich vor Täuschung zu bewahren; dies war schon dadurch möglich dass die Fällung mit Kali und Bleiacetat gekocht, sich nicht mehr schwärzte, es wird aber später noch weiter angegeben werden, wie man sogleich und scharf die Caseïnfällung von der der neuen Substanz unterscheiden kann.

Kleber und Conglutin (letzteres aus süssen Mandeln erhalten) verhielten sich den vorher genannten Körpern ebenfalls ähnlich, nur war nach dem Augenschein in beiden Fällen die ausfällbare Säuremenge beträchtlich geringer als bei den Eiweissstoffen thierischer Abkunft.

Anders verhielten sich dagegen Pepton und Propepton (Hemialbumose); beides waren sehr reine Präparate. Weder nach mässiger, kurzdauernder, noch nach intensiver Einwirkung vom Permanganat, wobei die Gallertebildung allerdings immer beobachtet wurde, konnte aus den Filtraten durch stärkere Säuren die Fällung erhalten werden. Die beiden Peptonformen des Eiweisses zeigen sich also auch der Oxydation gegenüber nur in löslichen Gestalten, sie geben nichts Ausfällbares mehr. Gleichwohl sind sie oxydirt und verändert worden; denn während die angewandten Peptone bei der bekannten Bleioxydkaliprobe

leicht und stark Schwefelblei bildeten, konnten die betreffenden Filtrate vom Braunstein andauernd mit Lauge und Bleioxyd gekocht werden ohne sich im Geringsten zu schwärzen.

Aus dem Bisherigen folgt, dass nur die unpeptonisirten Eiweissstoffe die neue fällbare Säure geben; die peptonisirten liefern sie nicht mehr.

Eine zweite Vorversuchsreihe beschäftigte sich damit, den Einfluss steigender Mengen von Kaliumpermanganat zu untersuchen, um festzustellen, wie weit die Bildung der unlöslichen neuen Säure dadurch beeinflusst wird, und bei welchem Verhältniss behufs Darstellung im Grossen, die Ausbeute sich am günstigten gestaltet.

Es wurde dazu trockenes Eiereiweiss genommen, und zwar bei der Reihe I ein käufliches, bei der Reihe II ein von mir selbst sehr sorgfältig durch Trocknen bis 30° dargestelltes Präparat.

I. Reihe.

Angewandte Verhältnisse:

a) 10 Grm. trockenes Eiweiss + 6 Grm. $KMnO_4$.
b) 10 „ „ „ 10 „ „
c) 10 „ „ „ 14 „ „

Nachdem das Eiweiss in gleichen Mengen Wassers gelöst und die gewogene Menge Permanganat hinzugefügt war, blieben alle drei Proben bei gewöhnlicher Temperatur stehen. Nach vier bis fünf Tagen ist in *a* und *b* alles Permanganat reducirt und über dem Manganniederschlag steht die klare farblose Flüssigkeit. In *c* ist keine solche Scheidung eingetreten und auch nach neun Tagen ist die Flüssigkeit noch roth, also jene Quantität de Permanganates überschritten, welche bei Zimmertemperatur leicht und völlig reducirt wird. Nachdem *c* durch einige Tropfen Alkohol entfärbt worden, werden alle drei Proben filtrirt, die Filtrate durch die Waschwässer auf je ein Liter gebracht und mit verdünnter Schwefelsäure versetzt. In *a* und *b* entstehen sofort voluminöse flockige Fällungen, in *a* noch etwas mehr als in *b*, während die Probe *c* klar bleibt und erst nach mehreren Stunden einige Flocken absetzt, die gesammelt sich gegen Reagentien ebenso verhielten, als die aus *a* und *b* erhaltene Säure.

Um noch weiter den Einfluss überschüssigen Permanganates zu erkennen, wird der grösste Theil der Säurefällung aus *b* in Wasser vertheilt, mit etwas Lauge in Lösung gebracht, dann mit Permanganat versetzt und weitere acht Tage stehen lassen. Nach Beseitigung den letzten Röthung durch einige Tropfen Alkohol und des Braunsteinschlammes durch Filtration, gab das farblose Filtrat nach starkem Ansäuern mit Essigsäure oder Schwefelsäure nicht die geringste Fällung mehr, aber sie gab noch mit Kali und Kupfervitriol intensive sogenannte Biuretreaction.

Reihe II.

Bei diesem Versuche wurde eine Stufenleiter von sieben Gliedern angesetzt, und die Filtrate vom Braunstein ausser auf die relative Menge der ausfällbaren Brücke'schen Säure auch auf das Vorhandensein von noch unverändertem Eiweiss geprüft. Ferner sollte untersucht werden, ob und in welchen Proben nach dem Ausfällen der Brücke'schen Säure noch ein die Biuretreaction gebender Körper vorhanden ist.

Angewandte Verhältnisse:

a)	10	Grm.	trockenes	Eiweiss	+	3 Grm.	$KMnO_4$.
b)	10	„	„	„		4 „	„
c)	10	„	„	„		5 „	„
d)	10	„	„	„		6 „	„
e)	10	„	„	„		8 „	„
f)	10	„	„	„		11 „	„
g)	10	„	„	„		14 „	„

Am andern Tage sind *a* und *b* sowie *f* und *g* flüssig, die mittleren Proben *c*, *d*, *e* gallertig; nach acht Tagen Zimmertemperatur sind *a* und *b* noch immer braune Flüssigkeiten ohne Scheidung, die theerartig durchs Filter laufen; in allen übrigen ist nach dieser Zeit deutliche Scheidung eingetreten und die Filtrate laufen klar vom Braunstein ab. Die folgende kleine Tabelle zeigt das nähere Verhalten der Filtrate.

Nr. des Versuches	Farbe d. Filtrates	Reaction auf Eiweiss[1]	Fällung mit Essigsäure	Fällung mit Schwefelsäure	Biuretprobe im Filtrate der Schwefelsäurefällung
a und *b*	unfiltrirbar und theerig	—	—	—	—
a und *b*		—	—	—	—
c	gelb	einige Flocken	sehr viel	sehr viel	überall sehr starke Biuretreaction.
d	gelblich	sehr wenig	detto	detto	
e	farblos	detto	beträchtlich weniger	weniger	
f	detto	nichts	sehr wenig	noch weniger	
g	detto	detto	nichts	einige Flocken	

[1] Die Reaction auf Eiweiss wurde so angestellt, dass die Flüssigkeit mit Essigsäure bis zur sauren Reaction, aber ohne dass noch ein Niederschlag eintrat, versetzt, und darauf nach Zusatz von Natriumsulfat erhitzt wurde.

Aus den beiden Versuchsreihen ergibt sich Folgendes: Bei Einwirkung von geringen Mengen Permanganat, etwa 30—40% vom trockenen Eiweiss (*a* und *b* von Reihe II), bleiben die reducirten Manganverbindungen in dem noch unveränderten Eiweisss gelöst und fassbare Producte sind nicht erhältlich. Das Eiweiss verschwindet bis auf Spuren bei Manganatmengen von 50% des angewandten Eiweisses. Von da an sind in der Oxydation

des Eiweisses zwei gut erkennbare Stadien zu unterscheiden, die durch die Leichtigkeit des Ablaufes und durch die Natur der dabei gebildeten Producte verschieden sind. Bei mittleren Mengen von 50 bis etwa 100% Kaliumpermanganat vom Eiweissgewichte tritt rasch, d. h. binnen zwei Tagen bei gewöhnlicher Temperatur völlige Reduction ein und in diesem Stadium ist eine grosse Menge der fällbaren Brücke'schen Säure gebildet, die also innerhalb einer beträchtlichen Breite der Oxydationswirkung erhältlich ist, am reichlichsten bei Mengen von 50—60%. Bei 80% ist die Ausbeute schon etwas kleiner.

Ist die Mischung reicher an Permanganat, so wird dieses, immer gewöhnliche Temperatur vorausgesetzt, nur mehr träge reducirt, es beginnt ein neues Stadium der Einwirkung und sobald circa 140% des Oxydationsmittels verbraucht worden sind, ist die unlösliche Säure bis auf Spuren verschwunden (Reihe I*c*; Reihe II*g*) und nur lösliche unfällbare Körper sind noch vorhanden, die aber durch die Eigenschaft bei Gegenwart von Kali Kupferoxyd violett zu lösen, mit der Brücke'schen Säure so wie mit der ganzen Eiweissgruppe noch verwandtschaftliche Beziehungen zeigen. Eine dieselbe Reaction gebende Säure wird aber immer von Anfang an im ersten Stadium der Oxydation neben der fällbaren Säure gebildet, denn sie ist schon vorhanden, wenn mit nur 50% Permanganat oxydirt wird, wobei die Ausbeute der fällbaren Säure die höchst erreichbare ist.

Demnach wird sich die folgende Arbeit gliedern:

I) in die Untersuchung der zuerst entstehenden, ausfällbaren Brücke'schen Säure, welche ich schon jetzt als Oxyprotsulfonsäure bezeichnen will, eine Bezeichnung, die später ihre nähere Begründung finden wird;

II) in die Untersuchung der neben der Oxyprotsulfonsäure entstehenden löslichen Säure;

III) in die Untersuchung der aus der Oxyprotsulfonsäure bei weiterer Permanganatoxydation entstehenden Körper.

Dabei muss ich aber bemerken, dass ich in dieser Abhandlung zwar auch zu II und III Beiträge bringe, aber fertige Resultate nur über die Oxyprotsulfonsäure, die vorwiegend der Gegenstand meines Programmes war.

I.

Darstellung und Eigenschaften der Oxyprotsulfonsäure.

Das verarbeitete Material war seltener Eier- oder Serumeiweiss, meist lösliches Eiereiweiss, von dem nach und nach viele Kilo käuflichen trockenen Präparates verarbeitet wurden. In der Mehrzahl der Fälle kamen, entsprechend den Voruntersuchungen über die günstigste Ausbeute, 300 Grm. in Wasser gelösten Eiweisses und die Lösung von 160 bis 180 Grm. Permanganat in eine sieben bis acht Liter fassende Flasche, die unter öfterem Schütteln stehen blieb. Dem dabei von Brücke Beobachteten habe ich nichts Neues hinzufügen; ich kann also nur wiederholen, dass sich bald eine steife Gallerte bildet, die beim Umkehren der Flasche als schwarzer gelatinöser Kuchen von verjüngter Flaschengestalt herabrutscht. Später wird alles dünnflüssig und nach zwei bis drei Tagen steht eine klare fast farblose Flüssigkeit über dem Braunsteinschlamm, der nun auf leinernen Spitzbeuteln zurückgehalten, dann mit lauem Wasser drei bis vier Mal, oder so oft, als ein Auszug noch durch Säure fällbar ist, aufgerührt, und auf die Spitzbeutel zurückgebracht wird. Nachdem das mit den Waschwässern vereinigte Filtrat noch durch Papier filtrirt worden ist, hat man nur mehr mit Säure zu fällen, wobei Salz- oder Schwefelsäure den gleichen Dienst thun, während Essigsäure weniger vollständig fällt und keine so klaren Filtrate gibt. Brücke hat schon aufmerksam gemacht, dass der bei anfänglichem Säurezusatz entstehende Niederschlag sich beim Mischen wieder löst, auch dann noch, wenn die ganze Flüssigkeit bereits stark sauer reagirt, eine Erscheinung, auf die ich alsbald zurückkommen werde. Es wird desshalb die Mineralsäure zugesetzt, bis in einer abfiltrirten Probe keine weitere Fällung mehr entsteht, wobei ein Überschuss ohne Belang ist. Der voluminöse Niederschlag ist grob flockig, gefälltem Thonerdehydrat ähnlich, aber noch etwas mehr weiss; er setzt sich binnen wenigen Stunden gut ab, so dass die überstehende Flüssigkeit abgehebert werden kann. Man wäscht noch einige Male durch Decantation, später auf grossen Papier- oder Filzfiltern bis das Waschwasser keine Salz- oder Schwefelsäure mehr anzeigt und legt den weissen kleisterartigen Niederschlag auf dicke Lagen Papiers. Grössere Mengen

kann man aber dadurch allein nicht trocken bringen, denn die Oxyprotsulfonsäure ist ein vortrefflicher Boden für die Entwicklung von Schimmelpilzen, die nach ein paar Tagen selbst im Vacuum rasenbildend sich einstellen. Ich habe desshalb meinen oft ein halb bis ein Kilo betragenden nassen Niederschlag auf Porzellanschalen ausgebreitet und in einem grossen Blechkasten, wie er mir bei Verdauungsversuchen dient, bei 35—40° getrocknet. Er schrumpft dann stark und wird binnen 24 Stunden zu einer zerbröckelnden, spröden, weissgelben, durchscheinenden, gummi- oder dextrinähnlichen Masse, die sich leicht zu einem weissen Pulver zerreiben lässt. Wenn auch das Trocknen immer in gelinder Wärme vorgenommen worden ist, um in dem feuchten Niederschlag Zersetzungen zu vermeiden, so muss ich doch schon jetzt sagen, dass die Substanz gegen Wärme keineswegs empfindlich ist und dass sie, wenigstens im trockenen Zustande ohne die geringste Veränderung zu erleiden, 100 bis 120° C. aushält, wofür später mehrfach Belege sich finden werden. Gut ausgewaschen, enthält der Körper nur Spuren von Asche, ist er vorher einer weiteren Reinigung durch Lösen in Ammoniak und Ausfällen mit Salzsäure unterzogen worden, oft gar keine Asche mehr.[1]

Die Oxyprotsulfonsäure ist in reinem Wasser so wenig löslich, dass man sie fast als unlöslich bezeichnen könnte, wie folgende Bestimmung ergibt. Eine Portion mit verdünnter Salzsäure, aus alkalischer Lösung gefällter Substanz, wurde so lange gewaschen, bis im Filtrate keine Spur einer Chlorreaction mehr eintrat, dann in Wasser suspendirt und unter öfterem Schütteln 24 Stunden stehen gelassen.

Vom Filtrate gaben 250 CC. in der Platinschale abgedampft und bei 100° getrocknet, einen Rückstand von 0·0145 Grm.

Also lösen 100 Theile Wasser nur 0·0058 Theile Säure, oder ein Theil Säure braucht 17242 Theile Wasser von Zimmertemperatur zur Lösung.

---

[1] Ist die Verbindung nicht mit Mineralsäure, sondern mit Essigsäure gefällt worden, so geht das in letztere Säure unlösliche Ferriphosphat des Eiweisses mit in den Niederschlag.

Bei solcher Verdünnung ist eine Lösung der Oxyprotsulfonsäure durch kein Reagens mehr fällbar; weder Tannin, noch Silbernitrat, noch Nessler'sche Flüssigkeit, noch Taurocholsäure erzeugen eine Trübung. Hingegen bekommt man noch, wenn auch sehr schwach, die Biuretreaction, die also auch hier ihre Empfindlichkeit zur Geltung bringt; in grösserer Flüssigkeitsmenge, oder wenn man durch das Proberohr von oben herabsieht, ist violette Färbung gut erkennbar.

Salzlösungen, namentlich saure, nehmen etwas mehr Oxyprotsulfonsäure auf, wie man daran erkennt, dass die ersten Filtrate der aus alkalischer Lösung gefällten Säure stärkere Biuretreaction geben, als die späteren Waschwässer.

Dass unsere Säure sich in concentrirten Mineralsäuren leicht auflöst und dass durch Verdünnen mit Wasser wieder ein flockiger Körper ausfällt, der noch die Biuretaction gibt, hat schon früher Brücke gefunden; es wird später gezeigt werden, dass dies völlig unveränderte Säure ist. Die alkalischen Mittel, einbegriffen die kohlensauren Alkalien und Ammoniak, dann Kalk- und Barytwasser lösen sämmtlich die Säure leicht und klar auf. Vertheilt man frisch gefällte Säure in Wasser und setzt so viel von einem der genannten Mittel dazu, als nöthig ist um klare Lösung zu erzeugen, so reagirt die erhaltene Flüssigkeit noch stark sauer, enthält also ein sauer reagirendes, lösliches Salz. Um neutrale Reaction hervorzubringen, was unbeschadet der Klarheit der Lösung geschehen kann, muss man dann noch in beträchtlicher Menge vom alkalischen Mittel hinzufügen und dabei lässt sich leicht und recht genau der Punkt der Neutralisation finden, wie er durch Lakmus angezeigt wird.

Man kann daher auch umgekehrt, wie Brücke ausgeführt hat, zu der neutralen oder alkalischen Lösung eine solche Menge Essig- oder Mineralsäure zusetzen, dass schon stark saure Reaction aber noch keine bleibende Fällung eingetreten ist. Dies entspricht wieder dem Stadium, bei dem die Basisentziehung erst bis zur Bildung des sauren, sauer reagirenden Salzes gelangt ist.

Noch eine viel auffallendere und für unsere Säure charakteristische Eigenthümlichkeit ist hier hervorzuheben, da sie ebenfalls auf der besonderen Neigung, saure, lösliche Salze zu bilden, beruht. Die Oxyprotsulfonsäure ist nämlich

auch in den Lösungen neutraler (organischer) Salze löslich, besonders leicht, wenn sie im frisch gefällten, flockigen Zustande sich befindet. So z. B. nimmt eine neutrale Lösung von essigsaurem Natron, die frisch gefällte Säure reichlich unter fast augenblicklicher Bildung einer wasserklaren, aber stark, ja intensiv sauer reagirenden Flüssigkeit auf. Man hat Ähnliches, wenn auch nicht in so auffallender Weise an anderen wasserunlöslichen Säuren beobachtet, wofür die oft citirte Löslichkeit der Harnsäure in gewöhnlichem Natriumphosphat unter Bildung einer sauren Lösung ein bekanntes Beispiel ist. Auch die Oxyprotei̇nsulfonsäure löst sich im Dinatriumphosphat, diesem ein Atom Natrium entziehend; aber sie vermag, wie der obige Versuch lehrt, mehr denn sie zerlegt selbst des neutrale Natriumacetat, scheidet also daraus freie Essigsäure aus und bildet ihr eigenes saures Natriumsalz. Es ist gar keine andere Auffassung möglich, als die, dass die Oxyprotsulfonsäure die Essigsäure partiell austreibt, woraus allerdings noch nicht folgt, dass die erhaltene Lösung wirklich freie Essigsäure enthält, denn die Alkalien geben auch saure Acetate [z. B. $C_2H_3NaO_2 + 2C_2H_4O_2$] und diese müssen bei genug zugesetztem Acetat vorhanden sein. Die Analogie mit der Lösung in Dinatriumphosphat ist vollkommen: es bildet sich in beiden Fällen saures, oxyprotsulfonsaures Natrium und daneben entweder das saure Natriumphosphat oder das saure Natriumacetat. Dass dieses letztere Salz vorhanden ist, geht daraus hervor, dass in der Lösung von Oxyprotsulfonsäure im Natriumacetat hinzugefügte Essigsäure die Säure ausfällt, und das Gleiche thun noch vollkommener die Mineralsäuren. Man kann leicht mittelst Natriumacetat so concentrirte Lösungen der Oxyprotsulfonsäure herstellen, dass auf Salz- oder Schwefelsäurezusatz die thonerdeartige Fällung die Flüssigkeit gestehen macht und das Proberohr umgekehrt werden kann, ohne dass etwas ausfliesst.

Ebenso wie Natriumacetat verhalten sich noch oxalsaures Ammonium, ameisensaures, benzoësaures, stearinsaures und dreibasich citronsaures Natrium; etwas weniger leicht lösen die neutralen Tartrate. Es sind die genannten Salze solche, wie ich sie eben zur Hand hatte, so dass sich wohl die Angabe von der Löslichkeit der Oxyprotsulfonsäure in neutralen Alkalisalzen

organischer Säuren verallgemeinert hinstellen lässt. Die Alkalisalze der starken Mineralsäuren verhalten sich natürlich nicht so, diese werden nicht mehr zerlegt; in Kochsalz und Glaubersalz ist die Oxyprotsäure daher bis auf Spuren unlöslich. Jedoch ist erwähnenswerth, dass die Anwesenheit dieser Salze das Verhalten zu den organischen Salzen nicht beeinträchtiget. Vertheilt man also z. B. die Oxyprotsulfonsäure in Kochsalzlösung und wirft Krystalle von Natriumacetat hinein, so tritt sofortige Lösung ein.

Hier kann ich auf die unterscheidenden Merkmale von Oxyprotsulfonsäure und Caseïn, wovon ich schon früher pag. 162, gesprochen, zurückkommen. Beide haben zwar gemeinsam, dass sie durch Säuren gefällt werden, allein das gefällte Caseïn löst sich in kleinem Säureüberschuss wieder auf, die Oxyprotsulfonsäure nicht. Ferner, die durch etwas überschüssige Essigsäure bewirkte Caseïnlösung wird durch essigsaures Natron gefällt, während umgekehrt die durch Essigsäure (oder Mineralsäure) gefällte Oxyprotsulfonsäure sich in essigsaurem Natron leicht wieder löst.

Das beschriebene Verhalten bot endlich auch ein erwünschtes Mittel, die Oxyprotsulfonsäure neben Eiweisskörpern aufzufinden und davon zu trennen, denn man weiss ja, dass bei saurer Reaction und Anwesenheit von viel Chlornatrium oder anderen Salzen die Eiweisskörper schon in der Kälte gefällt werden. Es war nämlich denkbar, dass die Oxyprotsulfonsäure auch im thierischen Organismus vorkommen könnte als erstes Product der Oxydation des Eiweisses. Ich habe daher mit einer grösseren Menge Rindsblutserum einen einschlägigen Versuch gemacht, von der Meinung ausgehend, dass einer durch Kochsalz und Säure entstandenen Fällung die eventuell darin enthaltene Oxyprotsulfonsäure durch Natriumacetat wieder entzogen werden müsste. Es wurde dabei aber ein negatives Resultat erhalten; der Körper kommt im Blutserum nicht vor.

Bei der trockenen Destillation verkohlt die Oxyprotsulfonsäure, dabei übelriechende Producte gebend, wie unverändertes Eiweiss.

Die specifische Drehung der in verdünntem Alkali aufgelöeten Substanz war $\alpha = -75 \cdot 8$.

Fractionirte Fällung; die einheitliche Natur und Zusammensetzung der Oxyprotsulfonsäure.

Schon Brücke hat auf Grund einer Reihe von Umwandlungen, welche er mit seiner Substanz unbeschadet ihrer Eigenschaften durchmachen konnte, ihre einheitliche Natur in Erwägung gezogen. Die endgiltige Entscheidung war nur durch Analysen der in Fractionen zerlegten Säure möglich, eine Mühe, der man sich bei unkrystallisirbaren Substanzen nicht entziehen kann. Die Zusammensetzung der rohen Säure als Ganzes konnte zunächst dabei unermittelt bleiben, nachdem in zwei verschieden ausgestellten Versuchsreihen, die zuerst beschrieben werden sollen, die Analyse der einzelnen Fractionen ausgeführt wurde. Daran schliesst sich eine Reihe vereinzelnter Analysen.

I. Fractionirte Fällung.

Eine grössere Partie von aus coagulirtem Hühnereiweiss erhaltener Oxyprotsulfonsäure wurde noch feucht in Ammoniak aufgelöst, und in drei Fractionen mit verdünnter Salzsäure gefällt. Dazu diente anfangs eine solche von etwa 1% HCl, welche bei jedem Zugiessen eine in grossen Flocken und Klumpen sich ausscheidende Fällung veranlasste, die beim Bewegen der Flüssigkeit erst schnell, später, als das Ganze bereits sauer reagirte, sich nur langsam wieder löste. Von nun an setzte ich nur ganz verdünnte Salzsäure, solche von $^1/_4$ Procent hinzu, um einen locker flockigen Niederschlag zu bekommen, und zwar so lange, als nach dem Augenscheine für die erste Fraction, die etwa ein Drittel der angewandten Substanz ausmachen sollte, passend war. Der Niederschlag liess sich gut abfiltriren. Aus dem klaren Filtrat, welches stark sauer reagirte, wird dann mit $^1/_4$ procentiger Salzsäure die Fraction zwei, und aus dem Filtrate davon durch complete Ausfällung mit überschüssiger Säure Fraction drei gewonnen. Alle drei Fractionen, welche in ihrem Aussehen nicht zu unterscheiden sind, werden dann jede für sich nochmals in Ammoniak aufgelöst, mit Salzsäure gefällt und so lange gewaschen bis das Waschwasser von jeder Spur Chlor frei ist. Dieses letztere Wiederauflösen und Ausfällen hatte den Zweck, die einzelnen Fractionen unter denselben Bedingungen in die Fällung zu bekommen, denn es wäre ja denkbar, dass man es

zwar mit einer einheitlichen Substanz zu thun hat, dass aber bei geringerem Säurezusatz ein schwer lösliches saures Salz in den Niederschlag geht und erst später die freie Säure selbst. Dieser Möglichkeit ist durch das letztangewandte gleichsinnige Wiederausfällen, wobei jede Fraction überschüssiger Salzsäure gegenüberstand, vorgebeugt.

Die drei Fractionen werden auf Papier, dann in Vacuum über Schwefelsäure getrocknet und sind von der nicht fractionirten Substanz nicht zu unterscheiden. Sie lösen sich leicht und klar in Ammoniak, Barytwasser und Lauge und geben gleich intensiv die Biuretprobe.

Behufs Analyse werden sie, wie alle Präparate, von denen Analysen in dieser Arbeit mitgetheilt werden, bei 105° C. bis zu constantem Gewicht getrocknet, was sich immer in wenigen Stunden erreichen lässt. Doch ist die getrocknete Substanz ziemlich hygroskopisch. Die Verbrennungen geschahen im Schiffchen, die Asche war unwägbar, falls nicht ihr Gewicht angegeben erscheint.

Analysen.

Fraction 1.

0·2053 Grm. Substanz; 0·3862 Grm. CO_2 und 0·1223 Grm. H_2O.

Fraction 2.

0·1603 Grm. Substanz; 0·3009 Grm. CO_2 und 0·0978 Grm. H_2O.

0·4005 Grm. Substanz gaben 50·0 CC. N von 23° und 738 Mm.

Fraction 3.

0·2377 Grm. Substanz; 0·4475 Grm. CO_2 und 0·1517 Grm. H_2O.

0·5055 Grm. Substanz; 65·2 CC. N. von 23·6° und 730 Mm.

Daraus die procentische Zusammensetzung:

	Fraction 1.	Fraction 2.	Fraction 3.
Kohlenstoff	51·30%	51·20%	51·35%.
Wasserstoff	6·62%	6·78%	7·05%.
Stickstoff	—	14·04%	14·30%.

II. Fractionirte Fällung.

Hiebei ist ausser den andern Elementen auch der Schwefel bestimmt worden; die Substanz ist desshalb mit Salzsäure gefällt, und niemals mit Schwefelsäure in Berührung gekommen. Auch sonst bildet der vorliegende Versuch einige Ergänzungen zur Reihe I dadurch, dass die Oxyprotsulfonsäure dieser Reihe aus löslichem Eiweiss dargestellt worden ist, dann aber noch dadurch, dass die fractionirte mit der wiederholten Fällung combinirt worden ist, wobei eine Zerlegung auch dann zu erwarten war, wenn es sich um zwei Substanzen von gegen einander nur geringen Löslichkeitsunterschieden handeln sollte.

Es wurde also die aus 200 Grm. trockenem, käuflichem Eiereiweiss erhaltene Oxyprotsulfonsäure in Ammoniak gelöst und mit Salzsäure in zwei Portionen gefällt, einer ersten grossen und einer zweiten kleinen, wovon ich die letztere nicht weiter berücksichtigte. Die erste Portion, die Hauptmasse darstellend, theilte ich in zwei Theile, davon wurde der eine Theil aus vorher erwähntem Grunde nochmals in Ammoniak gelöst, mit Salzsäure ausgefällt, gewaschen und getrocknet (Fraction α), der andere Theil ebenfalls gelöst und gefällt, doch nicht getrocknet, sondern nach dem Ablaufen des Filtrates neuerdings gelöst, wieder mit Salzsäure gefällt, gewaschen und so fünfmal nacheinander gelöst und wiedergefällt, dann endlich bis zum Verschwinden der Chlorreaction ausgesüsst und getrocknet (Fraction β). Das Wegwaschen der letzten Spuren Chlorwasserstoff währt lange, lässt sich aber immer bewerkstelligen. Die erhaltenen Präparate zeigten das schon beschriebene Aussehen; sie sind bei 105° C. getrocknet worden. Die kleine Aschenmenge ist bei der Procentberechnung in Abzug gebracht worden. Der Stickstoff ist immer als Gas mit dem Schiff'schen Apparate, der Schwefel durch Verschmelzen mit Ätzkali und Salpeter in der Silberschale bestimmt worden.

Analysen.

Fraction α.

1. 0·2261 Grm. Substanz; 0·4193 Grm. CO_2, 0·1350 Grm. H_2O und 0·003 im Schiffchen gebliebener Asche.

2. 0·4390 Grm. Substanz; 57·3 CC. N von 21° C. und 739·5 Mm.
3. 0·5625 Grm. Substanz; 73 CC. N von 22° C. und 732 Mm.
4. 0·934 Grm. Substanz; 0·1184 Grm. $BaSO_4$ oder 0·0163 Grm. S.

Fraction β.

1. 0·2370 Grm. Substanz; 0·4452 Grm. CO_2, 0·1440 Grm. H_2O und 0·0005 Grm. Asche = 0·2 Perc.
2. 0·3010 Grm. Substanz; 0·561 Grm. CO_2; 0·1865 Grm. H_2O und 0·0006 Grm. Asche.
3. 0·6110 Grm. Substanz; 78·3 CC. N von 18° C. und 736 Mm. Dabei in Abzug zu bringende Asche 0·0013 Grm.
4. 0·9880 Grm. Substanz; 0·1277 Grm. $BaSO_4$

Daraus die procentische Zusammensetzung:

	Fraction α	Fraction β
Kohlenstoff	51·37	51·31 und 50·92
Wasserstoff	6·73	6·77 „ 6·88
Stickstoff	14·80 und 14·64	14·60
Schwefel	1·75	1·76

III. Weitere Analysen.

Bei diesen war theils das Material ein anderes, als bei den vorhergehenden Analysen, theils die spätere Behandlung der Oxyprotsulfonsäure.

1. Präparat aus coagulirtem Rinderblutserum dargestellt und wiederholt mit verdünnter Schwefelsäure gefällt.

0·3870 Grm. 50 CC. N bei 17° C. und 735 Mm.

0·4948 Grm. 64·5 CC. N bei 21° C. und 732 Mm.

Daraus:

Stickstoff ..... 14·73%; 14·64%.

2. Aus löslichem Eiweiss dargestelltes Präparat, welches nach dem Trocknen, gepulvert, in concentrirter Salzsäure gelöst, daraus mit Wasser ausgefällt und bis zur Entfernung aller Salzsäure gewaschen wurde.

0·3580 Grm. Substanz; 0·6705 Grm, CO_2.

0·1982 Grm. Substanz; 0·3684 Grm. CO_2, 0·1248 und 0·001 Grm. Asche.

0·5372 Grm. Substanz; 70·4 CC. N von 18·5° C. und 729 Mm.
1·1235 Grm. Substanz; 0·1460 Grm. $BaSO_4$.

Daraus:

Kohlenstoff.....51·10% und 51·00%
Wasserstoff ..... 7·03 „
Stickstoff .....14·77 „
Schwefel ..... 1·78 „

3. Aus Eiereiweiss dargestelltes Präparat, das im frisch gefällten Zustande in einer concentrirten Lösung von essigsaurem Natron aufgelöst und daraus mit Salzsäure wieder gefällt worden ist.

0·2467 Grm. Substanz; 0·4645 Grm. CO_2 und 0·1613 Grm. H_2O.
0·5725 Grm. Substanz; 74·2 CC. bei 15° C. und 728 Mm.
1·372 Grm. Substanz mit Soda und Kaliumchlorat in einer Verbrennungsröhre geglüht, von Kieselsäure befreit etc. gaben 0·173 Grm. $BaSO_4$.

Daraus:

Kohlenstoff .....51·35%
Wasserstoff ..... 7·26
Stickstoff.....14·76 „
Schwefel..... 1·73 „

4. Endlich sind noch zwei Schwefelbestimmungen mit einem aus löslichem Eiweiss stammenden Präparate, das niemals mit Schwefelsäure in Berührung gekommen war, die eine in der Silberschale mit Ätzkali und Salpeter, die andere im Verbrennungsrohre mit Soda und Kaliumchlorat ausgeführt worden.

0·6700 Grm. Substanz; 0·0807 Grm. $BaSO_4$.
0·6960 Grm. Substanz; 0·1007 Grm. $BaSO_4$.

Daraus:

Schwefel.....1·65%; 1·98%.

Eine Übersicht des vorstehenden analytischen Materials zeigt zunächst aus der Betrachtung der beiden Reihen mit den fractionirten Fällungen, dass die vorliegende Säure in der That ein völlig einheitlicher Körper ist, und dass sie

in gleicher Zusammensetzung aus coagulirtem wie flüssigem, aus Eier- wie Serumeiweiss erhalten wird. Sie und die anderen Analysen zeigen, dass es gleichgiltig ist, ob die Substanz mit Salzsäure oder Schwefelsäure gefällt wird, dass sie nicht empfindlich für verdünnte Alkalien ist, denn sie kann darin wiederholt aufgelöst und daraus unbeschadet ihrer Zusammensetzung gefällt werden und ferner, dass sie sehr resistent gegen (kalte) starke Mineralsäuren ist, denn sie wird aus der Lösung in rauchender Salzsäure durch Wasser wieder unverändert abgeschieden. Endlich ist die Säure in der durch essigsaures Natron vermittelten Lösung noch unverändert enthalten und durch Mineralsäuren daraus fällbar.

Die geringen analytischen Differenzen gestatten ein Mittel zu rechnen, das möglichst treu die procentische Zusammensetzung der Oxyprotsulfonsäure ausdrücken wird.

C %	H %	N %	S %	O %
51·30	6·62	14·04	1·75	—
51·20	6·78	14·30	1·76	—
51·35	7·05	14·80	1·78	—
51·37	6·73	14·64	1·73	—
51·31	6·77	14·60	1·65	—
50·92	6·88	14·73	1·98	—
51·10	7·03	14·64	—	—
51·00	7·26	14·77	—	—
51·35	—	14·76	—	—
Mittel 51·21%	**6·89%**	**14·59%**	**1·77%**	**25·54%**

Wer die durchschnittliche Zusammensetzung der Eiweissstoffe in Erinnerung hat, wird sofort bemerken, dass unsere Säure davon verhältnissmässig wenig verschiedene Zahlen gibt und dass sie, obwohl alle generellen Eiweissreactionen versagen, doch noch kein Spaltungsproduct, sondern ein oxydirtes Eiweiss selbst ist. Das wird sich bestimmter ergeben, wenn obige Procentzahlen

neben jene des Eiweisses gestellt werden. Um den Vergleich so genau als möglich anzustellen, will ich keine einzelne Eiweissanalyse auswählen, sondern aus allen verlässlichen Analysen ein Mittel ziehen.

Eiereiweiss.

	Hammarsten[1]	Dumas und Cahours[2]	Wurtz[3]	Rüling[4]	Schützenberger[5]	Loew[6]	Lieberkühn's[7] gefälltes Eiweiss
C	52·25	53·37	52·79	52·81	52·80	—	53·33
H	6·90	7·10	7·13	7·26	7·20	—	7·08
N	15·25	15·77	15·55	—	[16·60][8]	—	15·74
S	1·93	—	—	1·77	—	1·79	1·83

Serumeiweiss.

	Dumas u. Cahours[9] Mittel	Starke-Hammarsten[10] Pferdeserum
C.....	53·50	53·05
H	7·20	6·85
N	15·75	16·04
S.....	—	1·80.

[1] Jahresber. f. Thierchemie **11.** 19.

[2] Gmelin-Kraut, Handbuch etc. VII. 3. Abth. 2228.

[3] Daselbst.

[4] Daselbst.

[5] Beilstein, Handbuch II. 2073.

[6] Jahresb. f. Thierchem. **18.** 25.

[7] Poggend. Annal. **86.** 117.

[8] Diese abnorm hohe Zahl ist nicht bei der Berechnung des Mittels berücksichtigt.

[9] Handwörterbuch d. Chemie. **2.** 1141.

[10] Jahresber. d. Thierchemie. **11.** 19. (Die anderen daselbst von Hammarsten mitgetheilten Serumalbuminanalysen sind pathologischen Flüssigkeiten entnommen; ich lasse sie weg, zumal H. selbst sie von auffallendem Gehalte an Schwefel bezeichnet.)

Wir haben daher folgende zwei Zahlenreihen zur Vergleichung:

	Eiweiss (Mittel sämmtl. Zahlen)	Oxyprotsulfonsäure
Kohlenstoff	52·98%	51·21%
Wasserstoff	7·09 „	6·89 „
Stickstoff	15·70 „	14·59 „
Schwefel	1·82 „	1·77 „
Sauerstoff	22·41 „	25·54 „

Die Oxyprotsulfonsäure enthält 3·13 Proc. Sauerstoff mehr als ihre Muttersubstanz das Eiweiss, die anderen Elemente aber in dem Verhältnisse wie im letzteren, nur durch den Sauerstoffeintritt vermindert. Die Intactheit des Eiweisscomplexes in der Oxyprotsulfonsäure ergibt sich ganz besonders aus dem Schwefelgehalte, der nur um ein halbes Zehntel eines Procentes gegenüber jenem des Eiweisses herabgesetzt ist. Schwefel ist nicht ausgetreten. Die neue Säure erscheint als ein oxydirtes Albumin.

Man kann auch leicht die Menge des bei der Oxydation aufgenommenen Sauerstoffs atomistisch ausdrücken.

Das Atomenverhältniss von Schwefel : Sauerstoff ist in

der Oxyprotsulfonsäure wie 1 : 28·8
dem Eiweiss „ 1 : 24·6

d. h. auf jene Menge Eiweiss, welche ein Atom Schwefel enthält, sind in runder Zahl vier Atome Sauerstoff eingetreten, und wenn man wie gewöhnlich annimmt, dass im Eiweissmolekül ein Atom Schwefel enthalten sei, so folgt weiter, dass auch auf ein Molekül Eiweiss vier Atome Sauerstoff eingetreten sind.

Daran schliesst sich die Frage, wo im Eiweissmolekül die gefundenen vier Atome Sauerstoff ihren Angriffspunkt haben.

Auch darüber lässt sich etwas Bestimmtes aussagen, denn es gehört zu den auffallendsten Differenzen, die man zwischen nativem Eiweiss und der Oxyprotsulfonsäure beobachtet, das Verhalten beider zur heissen alkalischen Bleilösung. Das Eiweiss gibt sofort zur Bildung von schwarzem Schwefelblei Veranlassung,

unsere Säure, obwohl sie nahezu ebenso viel Schwefel noch enthält, gibt eine ganz farblose Flüssigkeit. Der Schwefel muss also darin im oxydirten Zustande enthalten sein; die bleischwärzende Schwefelgruppe — SH des Eiweisses ist in die Sulfonsäuregruppe — SO_2OH, jene Gruppe, die sich bei jeder stärkeren Oxydation daraus zu bilden pflegt, übergegangen.

Dafür sprechen noch folgende Gründe. Die Sulfosäuren sind starke und beständige Körper, die durch Mineralsäuren nicht zersetzt werden. Beides stimmt. Dass die Oxyprotsulfonsäure Acetate zerlegt, ist beschrieben worden, ebenso dass sie aus ihrer Lösung in rauchender Salzsäure mit Wasser unverändert wieder ausgefällt werden kann. Auch heisse Mineralsäuren spalten keine Schwefelsäure ab; dieses Factum war schon Brücke bekannt, welcher mit Salzsäure von 1·14 specifisches Gewicht erhitzte, zum Theil neutralisirte, und das saure Filtrat mit negativem Erfolge auf Schwefelsäure prüfte. Ich kann dem hinzufügen, dass auch nach forcirterer Einwirkung starker Salzsäure, nämlich nach Erhitzen im geschlossenen Rohre bis auf 130° durch 12 Stunden, keine Spur freier Schwefelsäure gefunden wird. Demgegenüber gelingt, übereinstimmend mit dem Verhalten der Sulfonsäuren, eine Herauslösung des Schwefels als schwefelige Säure durch starke Alkaliwirkung. Schmilzt man mit Ätzkali, bis die organische Substanz zur Hauptsache verbrannt ist, so gibt die Schmelze mit Salzsäure übergossen reichlich Schwefeldioxyd, das, abgesehen vom Geruch, auch durch die Reductionswirkungen nachgewiesen wurde. Auch durch Erhitzen der Substanz mit heiss gesättigtem Barytwasser im eisernen Rohre bei Überdruck wird schwefelige Säure abgespalten; man findet nach mehrstündigem Erhitzen einen Niederschlag, der aus Baryumcarbonat und dem bekanntlich fast unlöslichen Baryumsulfit besteht.

Indem die neue Säure sich als Sulfonsäure zu erkennen gibt, sind von den vier Atomen Sauerstoff, die bei ihrer Bildung eingetreten sind, drei Atome untergebracht. Ich werde später Gelegenheit haben zu zeigen, an welcher anderer Stelle des Eiweissmoleküls das vierte Sauerstoffatom einen Angriffspunkt gefunden hat. Damit rechtfertigt sich der Name Oxyprotsulfonsäure.

Salze der Oxyprotsulfonsäure.

Die Salze der Alkalimetalle, Erdmetalle und des Ammoniums sind in Wasser leicht löslich; kein einziges scheint zu krystallisiren.

Das Ammoniumsalz ist am leichtesten neutral zu erhalten, indem man die Säure in wässerigem Ammoniak auflöst, und die Lösung über Schwefelsäure verdunsten lässt, bis sich die klare, farblose Substanz von den Wänden abblättert. Die damit hergestellte Lösung erzeugt Fällungen mit Silbernitrat, Kupfersulfat, Bleizucker, Chlorcadmium und Nickelsulfat. Keinen Niederschlag geben Zinksalze und Sublimat. Das Silbersalz ist zur Analyse nicht geeignet, denn es löst sich schon beim Auswaschen ziemlich rasch auf und ist stark lichtempfindlich. Quantitative Bestimmungen sind mit den Salzen des Baryums, Natriums uud Kupfers ausgeführt worden.

Baryumsalz.

Auf die Darstellung eines möglichst reinen und neutral reagirenden Barytsalzes ist viel Mühe verwendet worden. Löst man die frisch gefällte und sorgfältig ausgewaschene Säure in Barytwasser und entfernt den überschüssigen Baryt mit Kohlensäure, so fällt im Filtrat auf Zusatz von Alkohol das Barytsalz als schwerer schneeweisser Niederschlag, der in Alkohol so unlöslich ist, dass das alkoholische Filtrat von Schwefelsäure nur mehr opalisirend wird. So einfach dieses Verfahren erscheint, so stellen sich demselben Schwierigkeiten dadurch entgegen, dass nach Ausfällung des überschüssigen Baryts mit Kohlensäure die ganze Flüssigkeit trübe wird, und sich einer brauchbaren Filtration widersetzt. Man musste etwas Alkohol zusetzen, dadurch einen Theil des Barytsalzes fällen, das dann die unfiltrirbare Suspension des Baryumcarbonates mitriss. So erhielt man klare Filtrate, aus denen durch mehr Alkohol das Barytsalz auf einmal oder fractionirt gefällt wurde. Getrocknet ist es weiss, zerreiblich. Seine Lösung ist völlig neutral auf Pflanzenpigmente aber noch immer trüblich von etwas mitgefallenem Carbonat. Um diesen Rest zu entfernen, muss man das ein- oder zweimal mit Alkohol gefällte Salz in Wasser gelöst, in schmalen, hohen Cylindern stehen und der feinen Trübung acht Tage Zeit lassen zum Niedersinken. Dann

bekommt man Präparate, die sich völlig klar lösen, und absolut neutral sind, Sie wurden zur Analyse bei 105° getrocknet. Beim Erhitzen geben sie voluminöse, blasige, langsam verbrennende Kohle und Destillationsproducte von dem Geruch verkohlten Eiweisses.

Die folgenden Präparate sind von drei verschiedenen Darstellungen.

1.	0·6147	Grm.	lieferten	0·1275	Grm. $BaSO_4$
2.	0·5105	„	„	0·1062	„ „
3.	0·8010	„	„	0·1635	„ „
4.	0·6790	„	„	0·1370	„ „
5.	0·6852	„	„	0·1422	„ „
6.	0·5925	„	„	0·1152	„ „
7.	0·7740	„	„	0·1350	„ „

Daraus Baryum in Procenten:

12·20; 12·23; 12·00; 11·87; 12·20; 11·40; 10·26.

Mittel: 11·73%.

Kupfersalz.

Neutrales, durch Eintrocknen über Schwefelsäure erhaltenes Ammoniumsalz wird in Wasser gelöst und mit essigsaurem Kupfer ausgefällt. Die Fällung wird in zwei Theile getheilt, der eine Theil sorgfältig ausgewaschen und getrocknet (Analyse 1), der andere in verdünntem Ammoniak gelöst und die lasurblaue Flüssigkeit mit sehr verdünnter Essigsäure unter Zusatz von ein paar Tropfen Kupferacetat wieder ausgefällt, hierauf filtrirt und gewaschen (Analyse 2). Die frisch gefällten Niederschläge sind flockig, im trockenen Zustande sind sie dunkelgrün, glasartig, spröde.

Die lasurblaue ammoniakalische Lösung gibt auf Zusatz von Schwefelammonium keine Fällung von Schwefelkupfer, sondern bleibt klar und wird roth.

Die Kupferbestimmungen sind durch Verkohlen im Platintiegel und häufige Befeuchtung des Rückstandes mit Salpetersäure als Kupferoxyd gemacht worden.

Die Analysen 3 und 4 rühren von einer zweiten Darstellung her und beziehen sich auf die directe Fällung.

Kupfer in Procenten:

1	2	3	4	Mittel
5·20	5·70	5·47	5·49	5·46.

Natriumsalz; titrimetrische Versuche.

Da das Natriumsalz zur Gewichtsanalyse nicht herstellbar war, sollte eine gewogene Menge der Säure genommen und untersucht werden, mit wie viel einer genau titrirten Lauge sich eine neutrale Lösung herstellen lässt, und weil sich die Säure dazu besonders gut im frisch gefällten flockigen Zustande eignen musste, so wurde die getrocknete (105°) und gewogene Säure in einer beliebigen Menge Lauge gelöst und mit einer dieser Lauge genau äquivalenten Menge Salzsäure wieder vollständig gefällt. Nun hatte man eine bekannte Menge Oxyprotsulfonsäure als flockigen Niederschlag. Lässt man jetzt von der titrirten Lauge zufliessen, so findet zuerst unter Fortbestand der sauren Reaction der Mischung, Lösung des Niederschlages und viel später Eintritt der neutralen Reaction statt, deren Erkennung mittelst Lakmus am besten gelingt. Meist habe ich zu dem Versuch eine etwas grössere Menge Säure genommen, die Lösung in Alkali auf ein bestimmtes Volum gebracht und in mehrere gleiche Portionen für die Titrirung getheilt.

1. Versuch.

6·366 Grm. bei 105° getrockneter (analysirter) Oxyprotsulfonsäure werden im 500 CC. Kölbchen mit 50 CC. Lauge aufgelöst. (Die Lauge und die dazu gehörige Salzsäure neutralisirten sich genau nach gleichen Raumtheilen: 10 CC. = 0·100 Grm. HCl und 0·0630 Grm. Na.)

Von der 500 CC. betragenden Gesammtlösung habe ich je 100 CC. abgemessen, in ein Becherglas gespült, mit 10 CC. der titrirten Salzsäure und dem Indicator versetzt, dann mit der Lauge die Oxyprotsulfonsäure austitrirt. Es wurden verbraucht auf 100 CC. Lösung:

	a)	*b)*	Mittel
1. bis zum Verschwinden der Fällung	2·30	2·25	2·27 CC. Lauge

	a)	*b)*	Mittel
2. bis zur neutralen Reaction (Lakmus)	9·35	9·50	9·42 CC. Lauge.

Die Berechnung des Versuches gestaltet sich in folgender Weise:

In 100 CC. CC. Lösung sind 1·2732 Grm. Oxyprotsulfonsäure, welche zur Neutralisation 9·42 CC. Lauge = 0·059346 Grm. Na brauchten. Daraus ergibt sich der procentische Natriumgehalt des entstandenen oxyprotsulfonsauren Natriums:

1·27320 Oxyprotsulfonsäure
0·05934 Natrium
1·33254 Summe
0·00256 Minus Wasserstoffäquivalent vom Na
1·32998 oxyprotsulfonsaures Natrium,

welches 0·05934 Grm. oder **4·46%** Natrium enthält.

2. Versuch.

Hiezu diente die analysirte Säure (Reihe II, Fraction α, pag. 174) von der ich 1·3025 Grm. in Lauge löste und mit der äquivalenten Säuremenge fällte. Nun waren wieder 2·2 CC. Lauge nöthig, um alles bis zur Opalescenz zu lösen, und noch 6·1 CC. im Ganzen also 8·3 CC. Lauge oder 0·0520 Grm. Na um lakmusviolette Reaction hervorzubringen. Daraus berechnet sich in der beim ersten Versuch angegebenen Weise 1·3522 Grm. Oxyprotsulfonsaures Natrium mit 0·052 Grm. Natrium oder ein Procentgehalt von **3·84%** Natrium.

3. Versuch.

4·266 Grm. bei 105° getrockneter Substanz werden in 50 CC. Lauge (1 CC. Lauge = 0·0066098 Grm. Na) gelöst auf 500 CC. gebracht.

Im Mittel von drei Einzelnversuchen wurden zur Neutralisation von je 100 CC. Lösung, worin 0·8532 Grm. Substanz enthalten, verbraucht 5·3 CC. Lauge = 0·03503 Grm. Natrium. Daraus berechnet sich für das oxyprotsulfonsaure Natrium ein Gehalt von **3·95%** Natrium.

Natriumgehalt im Mittel aller drei Versuche: **4·08%**.

Im Anschluss daran sei noch erwähnt, dass ein Theil der Lösung von Versuch 3 im zugeschmolzenen Glasrohr ein paar Stunden auf 120° erhitzt, nach dem Erkalten noch fast genau denselben Werth beim Titriren als vorher gab.

Inwieferne die analytischen Resultate über die Baryum- und Kupfersalze und die auf ganz anderem Wege für das Natriumsalz gefundenen zusammenstimmen, ergibt sich bei dem Mangel einer aufgestellten Formel aus der folgenden Zusammenstellung, bei der alle Metalle auf Natrium umgerechnet sind. Sie zeigt, dass die Basismengen einander bis auf die üblichen Versuchsfehlergrössen äquivalent sind.

	Gefundenes Mittel	Daraus berechnetes Natriumsalz verlangt
1. Baryumsalz.....	11·73% Ba	4·24% Na
2. Kupfersalz	5·46 „ Cu	4·06 „ „
3. Natriumsalz	4·08 „ Na (direct gefunden).	

Verdauung der Oxyprotsulfonsäure.

Die Oxyprotsulfonsäure zeigt sich als dem Eiweiss nahe stehend dadurch, dass sie noch einer typischen Verdauung unter dem Einflusse von Pepsin fähig ist.

Vertheilt man die frisch gefällte Säure in verdünnter Salz-, Schwefel- oder Phosphorsäure, worin sie, wie schon erwähnt, so gut wie unlöslich ist, und stellt sie nach Zusatz von Pepsin in ein Verdauungsbad von 40°, während eine zweite Probe ohne Pepsin zum Vergleiche daneben gestellt wird, so sieht man bald die erste Probe durchscheinend, später bis zur Opalescenz klar werden und nur einige lockere Flocken bleiben am Boden liegen. Die pepsinfreie Probe ist unverändert, weiss geblieben. Der Versuch ist in seinem Verlaufe von der Verdauung feinflockig geronnenen Eiweisses nicht zu unterscheiden und nimmt beiläufig auch dieselbe Zeit in Anspruch. Die drei genannten Säuren sind von anscheinend gleicher Wirksamkeit; aber man kann sogar die Oxyprotsulfonsäure ohne Zusatz einer Verdauungssäure verdauen, wenngleich etwas langsamer: setzt man zur Suspension derselben in Wasser neutrale Pepsinlösung (sie war nach der combinirten

Methode Brücke-Krasilnikoff bereitet), so tritt auch Verdauung ein und die erhaltene Flüssigkeit ist intensiv sauer. Sie ist aber nicht etwa sauer durch abgespaltene Schwefelsäure, davon ist keine Spur da, sondern durch den löslichen Körper in den die Oxyprotsulfonsäure übergegangen. Der ganze Vorgang ist der einer Selbstverdauung der Oxyprotsulfonsäure, die gewissermassen gleichzeitig Eiweiss und durch eine Seitenkette ihres Moleküls auch Säure ist. Pepsin allein braucht hinzugesetzt zu werden. Man muss daraus schliessen, dass jene Gruppe im Eiweiss, die durch den Pepsincontact die Löslichmachung des ganzen Moleküls bewirkt, in der Oxyprotsulfonsäure ungeändert vorhanden ist. Damit steht in einem gut begreiflichen Zusammenhange, dass Pepton und Propepton, welche schon Verdauungsproducte sind, keine Oxyprotsulfonsäure mehr geben können. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass bei der Oxydation von Pepton dasselbe Product entsteht, wie bei der Verdauung der Oxyprotsulfonsäure, indem im ersten Falle die Peptonisation der Oxydation vorangeht, im zweiten Falle die Reihenfolge der Einwirkungen eine umgekehrte ist. Bestimmtes vermag ich darüber nicht zu sagen, eine selbstständige Arbeit müsste erst dies entscheiden. Doch ein Paar Andeutungen über den bei der Verdauung der Oxyprotsulfonsäure entstehenden Körper — der vielleicht als „Oxypeptonsulfonsäure“ zu bezeichnen sein wird — kann ich anfügen. Es wurde eine grössere Portion ohne Säurezusatz verdaut und erst nach 12 Stunden mit ein Paar Tropfen Phosphorsäure nachgeholfen, worauf nur ein geringer flockig schleimiger Rest widerstand. Das entstandene Product bietet durch seine grosse Löslichkeit und Unkrystallisirbarkeit gewisse Schwierigkeiten für die Untersuchung; es ist eine starke Säure, wird durch Bleisalze gefällt, durch Phosphorwolframsäure, durch Alkohol und gibt starke Biuretreaction.

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass im Organismus die Oxyprotsulfonsäure dieselbe Verdauung erleidet und noch Eiweissstelle vertreten kann.

Spaltung der Oxyprotsulfonsäure durch Baryt.

Wenn die Oxyprotsulfonsäure ein oxydirtes Eiweiss ist, so muss sie bei der intensiven Einwirkung von Säuren und Alkalien

die uns bekannten Zersetzungsproducte des Eiweisses der Hauptsache nach wieder geben. Wirklich ergab sich bei mancherlei Vorversuchen, dass Säuren und Laugen sehr andauernd und bei höherer Temperatur einwirken müssen, bevor eine Zerspaltung des Moleküls eintritt. Wirken sie nur kurze Zeit oder sonst mässig ein, so entstehen lediglich lösliche, unkrystallisirbare Substanzen von peptonartigem Verhalten bei gleichzeitig stark saurem Charakter. Wird die Oxyprotsulfonsäure z. B. zwei bis drei Stunden mit verdünnter überschüssiger Schwefelsäure gekocht, so ist sie löslich geworden und wird sie mit stärkerer Lauge einige Zeit im Sieden erhalten, so bekommt man hinterher mit Säuren keine Fällung mehr. Eine Vergleichung mit der Veränderung, die Eiweiss ebenso behandelt erleidet, drängt sich auf, denn dabei findet bekanntlich Peptonbildung statt.

Wird die Behandlung mit der kochenden Schwefelsäure drei- bis viermal 24 Stunden fortgesetzt, so erhält man schon eine gewisse Menge Leucin, aber neben noch viel syrupöser Substanz.

Einen vollkommenen Spaltungsversuch, den ich näher beschreiben will, habe ich mit Ätzbaryt angestellt, wobei ich mich bezüglich der Vergleichung der Zersetzungsproducte der Oxyprotsulfonsäure mit denen des Eiweisses an die wichtigen Arbeiten von Schützenberger[1] und bezüglich der dabei vorkommenden Methoden auch an jene von Hlasiwetz und Habermann[2] halten konnte. Schützenberger hat gezeigt, dass man nur durch tagelanges Erhitzen mit Baryt in geschlossenen Gefässen und Temperaturen von 150 bis 180 und 200° alles Eiweiss zerlegen kann, dass aber dann nur mehr einfachere Körper, Säuren und sein „Melange amidée" vorhanden sind.

Zum analogen Versuch mit der Oxyprotsulfonsäure dienten 100 Grm. reiner, mit Schwefelsäure gefällter Substanz, die in Barytwasser gelöst, dann noch mit etwa 300 Grm. Ätzbaryt versetzt in einem grossen 5 Ctm. weiten, 50 Ctm. langen, an beiden Enden gasdicht verschraubbaren schmiedeeisernen Rohre eingeschlossen wurden. Nachdem im Luftbade (Kanonenofen) einen

---

[1] Recherches sur l'albumine et les corps albuminoides. Bullet. de la Soc. Chim. **23** und **24**. Ausführlich durch Jahresb. f. Thierchem. **5**. 299.

[2] Liebig's Annal. **169**. 150.

Tag lang auf 130 bis 140° C. erhitzt worden war, gab eine Probe verdampft noch Hautbildung und starke Biuretreaction, ebenso noch nach dem zweiten und dritten Tage. Ich stieg dann auf Temperaturen um 170° C. herum, und nach wieder zwei Tagen, also im Ganzen nach fünftägigem Erhitzen, war die Zerspaltung complet, die intermediären peptonartigen Substanzen verschwunden. Eine Probe zur Vertreibung von Ammoniak und Aminbasen trocken gedampft, gab jetzt keine Hautbildung mehr und mit Kali und Kupfersalz auch bei wenig des letzteren keine rothe oder violette, sondern nur mehr die blaue Lösung der Amidosäuren.

Der gesammte, schmutzig-bräunlichgelbe, stark ammoniakalische Rohrinhalt wird dann mit sammt den darin befindlichen unlöslichen Barytverbindungen destillirt. *A.* Destillat, *B.* Rückstand.

A. Das Destillat, welches ausser nach Ammoniak auch nach Ligroin oder Benzol riecht, wird mit Salzsäure sauer gemacht, und zur Zurückhaltung der Basen nochmals destillirt. Das jetzt erhaltene Destillat ist wasserklar, wird aber beim Stehen im Kolben nach zwei Tagen gelbröthlich und setzt ein dunkelrothes Pulver ab, das sich in warmem Alkohol mit rother Farbe löst (Pyrrolroth). Ein mit Salzsäure befeuchteter Span weichen Holzes in das Destillat getaucht, wird nach einigen Minuten dunkelkirschroth. Reactionen auf Phenol treten nicht ein; die Indolreaction mit Salpetersäure ebenfalls nicht. Es ist also in dem basenfreien Destillate nur Pyrrol enthalten. Denselben Körper fand auch Schützenberger bei der Zersetzung von Albumin mit Baryt, wie aus einer späteren kurzen Notiz[1] dieses Autors hervorgeht.

Der saure Rückstand, von dem die pyrrolhältige Flüssigkeit abdestillirt worden, enthielt viel Salmiak, von dem mit absolutem Alkohol eine kleine Menge einer salzsauren Base abgetrennt werden konnte, die mit Platinchlorid gelbe Blättchen gab und wahrscheinlich Methylsalmiak war.

B. Der Rückstand enthielt noch den beim Erhitzen im Rohre gebildeten unlöslichen Barytniederschlag, der zunächst abfiltrirt wurde; a = Niederschlag, b = Filtrat.

---

[1] Bulletin de la Société chim. 1875. T. **25**. 289.

Der Niederschlag *a*, eine graulich-pulverig-lehmartige Masse, wird mit verdünnter Schwefelsäure behandelt, wobei sich lebhaft Kohlensäure und schweflige Säure entwickeln. Die baryt-freie Lösung abgedampft, gibt Krystalle von Oxalsäure, sonst nichts Fassbares, nur die letzten braunen Tropfen der Mutterlauge von der Oxalsäure gelatiniren.

Im Filtrat *b* war die Hauptmasse der Zersetzungsproducte zu suchen, vor allem die Amidosäuren. Es ist braun und wird von dem noch gelöst vorhandenen überschüssigen Baryt durch genaues Ausfällen mit Schwefelsäure befreit. Dabei war es sauer geworden, was anzeigt, dass ein Theil des Baryts an Säuren gebunden war. Die flüchtigen Säuren werden daher durch Destillation getrennt und das saure Destillat mit kohlensaurem Baryt gekocht, wobei weisse Krystallnadeln und Drusen reichlich erhalten werden.

0·6465 Grm. davon gaben bei 100° getrocknet 0·5885 Grm. $BaSO_4$ = 53·7% Baryum.

Der essigsaure Baryt verlangt ebenfalls 53·7% Baryum, es ist also von den flüchtigen Säuren keine höhere als Essigsäure gebildet worden.

Nach dem Abdestilliren der Essigsäure wird der Destillationsrückstand mit Äther geschüttelt, es gingen jedoch nur ganz unbedeutende Mengen Substanz in den Äther, die als ölige, nicht erstarrende Tropfen hinterblieben, und die Reaction auf aromatische Oxysäuren nicht zeigten.

Die ausgeätherte Hauptflüssigkeit wird nun behufs Entfärbung mit etwas Bleiessig versetzt, sofort mit Schwefelwasserstoff behandelt, das Filtrat vom Schwefelblei eingeengt und zur Krystallisation gestellt. Es schieden sich sehr bald grosse, griesige Massen von rohem Leucin in der bekannten Form ab, und bei weiterem Einengen der Mutterlaugen immer wieder neue Portionen davon, die zuletzt als mattweissgelbe Krusten und Decken auftraten. Das Rohleucin war noch weiter auf Tyrosin zu prüfen; nach mehreren Methoden wurde dies ausgeführt. Eine Partie kochte ich mit mässig starkem Alkohol so lange aus, bis nur mehr eine kleine Menge ungelöst geblieben war und krystallisirte diese aus heissem Wasser um: es erschien nur reines Leucin. Eine zweite Partie verarbeitete ich nach Hlasiwetz'[1] Methode der

Trennung des Tyrosins vom Leucin, aber auch dabei war nichts zu erhalten, was als Tyrosin angesprochen werden konnte und alle Reactionen auf diesen Körper versagten vollkommen. Es war kein Tyrosin gebildet worden.

Die letzten dicklichen Mutterlaugen des Leucins wurden mit frisch gefälltem Kupferoxyd gekocht, die lasurblaue Lösung direct mit Bleiessig gefällt, der Bleiniederschlag mit Schwefelwasserstoff zerlegt, das Filtrat wieder mit Kupferoxyd gekocht, um auf asparaginsaures Kupfer zu prüfen. Einige erhaltene undeutliche Kryställchen waren zu wenig, um eine sichere Diagnose auf Asparaginsäure zu machen.

Das blaue Filtrat vom Bleiniederschlag, das von Blei und Kupfer befreit worden war und noch immer etwas Leucin enthielt, unterzog ich mehreren Versuchen um die aromatische Gruppe zu finden, aber vergeblich. Die geringe, noch restirende Menge Substanz setzte dieser Bemühung allerdings bald ein Ende.

Da Schützenberger das Eiweiss in gleicher Weise gespalten und auf ähnliche Weise untersucht hat, so lässt sich vergleichungsweise zusammenstellen, was in beiden Fällen an Spaltungsproducten erhalten worden ist.

Zersetzungsproducte mittelst Baryt:

aus Eiweiss	aus Oxyprotsulfonsäure
Kohlensäure	Kohlensäure
Ammoniak	Ammoniak
Pyrrol	Pyrrol
Essigsäure	Essigsäure
Oxalsäure	Oxalsäure
Leucin	Leucin
Tyrosin	—

Verhalten der Oxyprotsulfonsäure in der Kalischmelze; Vergleich mit dem Verhalten des Eiweisses.

Nachdem die Zerspaltung mit Baryt keine Spur Tyrosin ergeben hat, habe ich die Zersetzung der Oxyprotsulfonsäure mit schmelzendem Kali studirt, und dabei besonders auf die aromatischen Körper Rücksicht genommen, von denen man weiss, dass

[1] Liebig's Annalen. **169**. 160.

sie bei der Kalischmelze aus dem Eiweiss entstehen. Nebst einigen Arbeiten, die sich auf die Entdeckungsgeschichte des Indols beziehen, war mir dabei besonders die Untersuchung Nencki's[1] „Über die Zersetzung des Eiweisses durch schmelzendes Kali" zum Vergleiche von Vortheil. Nencki, welcher das Erhitzen ziemlich hoch, bis auf 290° getrieben hat, fand im Destillat Indol, Pyrrol und Skatol, im Rückstand Phenol und Fettsäuren.

Da die Quantitäten an aromatischen Körpern, welche das Eiweiss liefert, immer nur geringe sind und nach Qualität und Quantität schwanken müssen, je nachdem die Schmelzoperation geleitet wird, so musste mir daran liegen, möglichst gleichartig ausgeführte Versuche zum Vergleiche zu haben. Ich habe desshalb, bevor ich zur Verschmelzung der Oxyprotsulfonsäure überging, einen Versuch mit dem Eiweiss selbst angestellt und dann erst einen in Bezug auf Mengenverhältnisse, Dauer, Temperatur und Untersuchung des Rückstandes genau gleichen Versuch mit Oxyprotsulfonsäure folgen lassen. Aber auch den Eiweissversuch will ich genau und zwar zunächst beschreiben, da er, so wie er angestellt wurde, einiges Neue lehrt, nämlich dass bei mässiger Temperatur geschmolzen, das Indol sich reichlich in der Schmelze selbst findet und ferner, dass dann darin auch eine für das Eiweiss charakteristische aromatische Säure enthalten ist.

Eiweissversuch.

50 Grm. trockenes Hühnereiweiss sind mit dem fünffachen Gewichte Ätzkali in der Silberschale verschmolzen worden. Erst schwimmt das Eiweiss oben in dunkelkrümlichten Massen, vermischt sich dann zu einer schwarzen theerigen Masse, fängt an zu schäumen und wird heller. Nachdem man den Schaum einige Male bis zum vier- bis sechsfachen Volum der Masse hat aufsteigen lassen und die Farbe nur mehr blass gelblichbräunlich ist, wird unterbrochen. Die ganze Operation dauert etwa eine Stunde, die Temperatur stieg wenig über 200°.

Die Schmelze wird in überschüssiger verdünnter Schwefelsäure gelöst, die Lösung destillirt. *A.* Destillat; *B.* Rückstand.

---

[1] Journ. prakt. Chem. [2] 17. 97.

A. Das Destillat, aufgefangen, so lange Bromwasser noch eine Trübung erzeugt, riecht im höchsten Grade und anhaftend widerwärtig nach Excrementen, reagirt sauer und wird zur Zurückhaltung der Säuren nach Zusatz von Ammoniak neuerdings so lange destillirt, bis im Destillate das Millon'sche Reagens beim Kochen nur mehr sehr schwache Röthung (Phenol) bewirkt. *a)* Destillat; *b)* Rückstand.

a) Das Destillat wird mit Ätzkali versetzt und destillirt, um Indol und Skatol abzutrennen α, dann stark angesäuert und wieder destillirt, um Phenol β zu erhalten.

α

Durch die Destillation mit Ätzkali ist der intensiv fäcale Geruch zumeist verschwunden. Die Indolreactionen 1. mit Pikrinsäure und Salzsäure; 2. mit dem Fichtenspan; 3. mit rother Salpetersäure treten intensiv ein. Nach Nencki's Vorgang wird mit Salzsäure und heisser wässeriger Pikrinsäurelösung ausgefällt und der trockene Niederschlag in einem Retörtchen mit Ammoniak destillirt. In der vorgelegten Eprouvette erstarrt das Übergegangene zu glänzenden Blättchen von den Eigenschaften des Indols und dem Schmelzpunkt 50 bis 53°. Skatolreaction tritt auf.

β

Wird mit Wasser auf einen halben Liter gebracht; gibt intensive Reaction mit Bromwasser und Millon's Reagens. 250 CC. davon liefern mit Bromwasser versetzt einen nach dem Trocknen über Schwefelsäure 0·100 Grm. wiegenden Niederschlag. Das ganze erhaltene Phenol entspricht also 0·200 Grm. Tribromphenol.

b) Der Rückstand nach dem Ansäuern weiter destillirt gibt ein stark saures Destillat, das mit Baryumcarbonat gekocht wird. Dicker zum Theil krystallisirender Syrup, der aus viel ameisensaurem, etwas essig- und propionsaurem Baryt besteht.

B. Der Rückstand wird mehrere Male mit Äther ausgeschüttelt, welcher nach dem Abdestilliren ein Säuregemisch

hinterlässt von höheren (öligen) Fettsäuren. Oxalsäure und einer Säure, welche intensive Millon'sche Reaction zeigt, also eine monohydroxylirte aromatische Säure ist. Nachdem die ersteren durch Neutralisation mit Barytwasser gefällt, das Filtrat mit Salzsäure angesäuert und neuerdings mit Äther ausgeschüttelt worden ist, gibt der Äther einen wenig gefärbten Syrup, der nach nochmaliger Reinigung mit Bleiacetat beim Reiben mit dem Glasstab erstarrt. Durch Abpressen und Umkrystallisiren aus Wasser erhält man kleine, weisse, spröde Nadeln und Gruppen, die sich leicht als Paraoxybenzoësäure erkennen lassen. Sie gaben dunkelrothe Lösung beim Kochen mit einigen Tropfen Millon'scher Flüssigkeit, starke Fällung mit Bromwasser, keine auffallende Reaction mit Eisenchlorid. Im Exsiccator und bei 100° werden sie weiss und trübe und schmolzen dann bei 209 bis 210° C. Die Ausbeute betrug trotz der vielen Operationen circa $^1/_2$ Grm.

Seit v. Barth[1] gezeigt hat, dass das Tyrosin bei der Kalischmelze Paraoxybenzoësäure gibt, ist das vorbeschriebene Ergebniss klar; die bei der Hydratation als Tyrosin austretende aromatische Gruppe erscheint bei der Kalischmelze als Paraoxybenzoësäure. Direct aus Eiweiss ist sie aber bisher nicht erhalten worden; Nencki[2] hat sie übersehen, indem er seinen Retortenrückstand nicht mit Äther behandelte, gibt aber doch an, dass der letzte nach Auskrystallisiren des Leucins in minimaler Menge hinterbliebene peptonartige Rückstand mit Millon's Flüssigkeit noch Reaction gab, woraus folgt, dass bei dem Schmelzversuche Nencki's (230° durch etwa 5 Stunden) noch Paraoxybenzoësäure vorhanden war.

Versuch mit Oxyprotsulfonsäure.

Bei der Beschreibung dieses Versuches, wobei die Schmelze genau wie früher hergestellt und untersucht wurde, kann ich mich kurz fassen, und werde nur die Verschiedenheiten gegenüber dem Eiweissversuch angeben.

Die in Schwefelsäure eingetragene Schmelze riecht nach Schwefeldioxyd, aber keineswegs so widerwärtig nach Fäces.

---

[1] Sitzungsber. d. kais. Akad. 52 und 45.

[2] l. c.

Im Destillat *a)* ist mit den oben genannten Reagentien kein Indol nachweisbar; auch Phenol fehlt fast vollständig, nur Spuren sind nachweisbar. Im Rückstande *b)* ist reichlich Ameisensäure vorhanden, ebenso höhere Fettsäuren, genau wie beim Eiweissversuch.

Der Ätherauszug vom Rückstand *B* gibt ein Extract, das mit Millon's Reagens keine Spur einer aromatischen Oxysäure erkennen lässt. Auch mit Bromwasser wird keine Fällung erhalten und keine Färbung mit Eisenchlorid. Der Rückstand zuerst mit Barytwasser von Fettsäuren und Oxalsäure befreit, wird nach dem Ansäuern nochmals ausgeäthert, dann etwas Schmiere mit Bleizucker entfernt. Nun bleibt eine sehr geringe Menge Rückstand, in dem noch einige Krystalle von Bernsteinsäure anschossen.

Um bei solch' negativem Resultate ganz sicher zu gehen, habe ich dann nochmals eine grössere Menge (100 Grm.) Oxyprotsulfonsäure mit Kali verschmolzen und besonders auf aromatische Säuren gesucht, aber nichts gefunden. Was in den Äther überging, waren lediglich diesmal grössere Mengen von Bernsteinsäure und Oxalsäure.

Zersetzungsproducte durch schmelzendes Kali:

aus Eiweiss	aus Oxyprotsulfonsäure
—	Schwefeldioxyd
Indol	—
Skatol	—
Phenol	—
Paraoxybenzoësäure	—
Säuren der Fettsäurereihe	Säuren der Fettsäurereihe
„ „ Oxalsäurereihe	„ „ Oxalsäurereihe.

Vergleichender Fäulnissversuch mit Oxyprotsulfonsäure und mit Eiweiss.

Ich habe nun versucht, ob und welche aromatische Substanz bei der Fäulniss sich aus unserer Säure abspalten lässt und zu diesem Zwecke einen genau gleichen Parallelversuch mit Eiweiss angestellt.

130 Grm. trockenes Eiweiss und ebensoviel Oxyprotsulfonsäure andererseits wurden mit je drei Liter Wasser und fauligem Ochsenpankreasinfus in einen, Tag und Nacht geheizten Brütofen gestellt. In den ersten Tagen bekamen beide Portionen in dem Masse als die Reaction sauer wurde, Zusätze von Soda, wovon bei jener der Oxyprotsulfonsäure natürlich viel mehr nöthig war. Später blieb die Reaction von selbst alkalisch bis zum Ende der zweiten Woche, wo der Versuch abgebrochen wurde.

Nach Zusatz von noch etwas Soda wurde von beiden Flüssigkeiten in grossen Retorten ein Drittel abdestillirt.

Im Destillat von gefaultem Eiweiss waren mit Bromwasser und Millon'schem Reagens intensive Reactionen auf Phenol und mit salpetriger Salpetersäure starke rothe Fällung von salpetersaurem Nitrosoindol zu erhalten, in jenem der Oxyprotsulfonsäure keine Spur von beiden.

Die Rückstände von der Destillation, obwohl in ihnen bei der langen Fäulniss von aromatischen Säuren wenig mehr zu erwarten war, habe ich eingedampft, mit Alkohol extrahirt, die Alkoholrückstände mit Schwefelsäure angesäuert und mit Äther ausgeschüttelt. Überall gingen grosse Mengen Fettsäuren in den Äther, welche theils durch Filtration, theils durch Destilliren mit eingeleitetem Wasserdampf und zuletzt durch Bleizucker zum grössten Theil entfernt werden konnten. Es blieben dann in beiden Fällen nur mehr kleine Mengen von einer syrupösen, jeder Anregung zum Krystallisiren widerstehenden Substanz über, von denen die, welche vom Eiweiss herrührte, die Millon'sche Reaction gab, also noch eine kleine Menge einer aromatischen Oxysäure enthielt, während beim Oxyprotsulfonsäurerückstand auch diese Reaction völlig versagte.

Die aromatische Gruppe in der Oxyprotsulfonsäure.

Nachdem weder Tyrosin noch Phenol, Indol noch p. Oxybenzoësäure oder eine andere aromatische Säure sich aus der Oxyprotsulfonsäure erhalten liess, hätte man glauben können, ja fast müssen, dass eine aromatische Gruppe darin gar nicht mehr enthalten sei und die Oxyprotsulfonsäure nur den oxydirten Eiweissrest mit einfacher Kohlenstoffbindung enthalte.

Die Analyse hatte jedoch gezeigt, dass aus dem Eiweiss gar nichts ausgetreten, sondern nur Sauerstoff eingetreten ist; die aromatische Gruppe musste also vorhanden sein.

Einen Anhaltspunkt glaubte ich zuerst an der Hand der von O. Nasse[1] in einer interessanten kleinen Abhandlung eingeführten Gruppenreaction auf monohydroxylirte Benzolderivate zu finden. Nasse hat nämlich gezeigt, dass die genannten Substanzen, gleichgiltig ob sie lange oder kurze Seitenketten haben, ob sie Alkohole, Säuren oder Phenole sind, gleich dem einfachen Phenol, mit Millon's Reagens erhitzt, dunkelkirschrothe Lösung und Niederschlag geben, dass hingegen die hydroxylfreien Benzolderivate, sowie jene, in welchen zwei oder drei Wasserstoffatome durch Hydroxyl ersetzt sind, diese Reaction nicht geben, wie die Di- und Trioxybenzole, die Trioxybenzoësäure etc. Baumann[2] hat sich gleichfalls von der allgemeinen Anwendbarkeit der Reaction auf die einfach hydroxylirten Verbindungen überzeugt und Nasse's Angaben bestätigen können.

Dies drängte zu dem Gedanken, dass bei der Bildung der Oxyprotsulfonsäure eine Oxydation im Benzolkern stattgefunden habe und dass in unserer Säure die aromatische Gruppe zweifach hydroxylirt sei.[3] Dann müssten bei der Zerlegung andere Zersetzungsproducte auftreten, statt Phenol ein Bioxybenzol, statt p. Oxybenzoësäure eine der zahlreichen Dioxybenzoësäuren. Der Bildung von Dioxybenzolen durch directe Oxydation von Monoxyphenol sind allerdings die Erfahrungen nicht günstig, doch gibt es solche Vorkommnisse: im Organismus wird ja Benzol zu Phenol oxydirt.

Das Verhalten der Oxyprotsulfonsäure selbst zu Millon's Reagens steht in artiger Übereinstimmung; sie wird davon, wie schon Brücke angegeben hat, nicht im geringsten geröthet, so wenig wie die Zersetzungsproducte, die sie liefert. Umgekehrt gibt das Eiweiss, an dem Millon die Reaction zuerst kennen

---

[1] Sep. Abdr. aus den Sitzungsber. d. naturforsch. Gesellsch. zu Halle. Vom 8. März 1879.

[2] Ber. chem. Gesellsch. in Berlin. 12. 1450.

[3] Für eine dreifache Hydroxylirung war in den Analysen nicht genug Sauerstoff gefunden.

gelehrt hat, gleich seinen aromatischen Spaltungsproducten Rothfärbung.

In diesem Sinne habe ich in einer neuen Reihe von Schmelzversuchen nach Dioxybenzoësäuren gesucht; diejenigen, welche Farbreactionen mit Eisenchlorid geben, waren sofort auszuschliessen, aber auch sonst blieb, wie schon früher gezeigt, kaum Material dafür übrig, nachdem die anderen Körper abgetrennt waren. Ich ging also dazu über zu untersuchen, ob ein Dioxyphenol erhältlich sei, die Erfahrungen v. Barth und Schreder's[1] benützend, dass die Natronschmelze zum Theil anders als die Kalischmelze wirkend, bei höherer Temperatur im Wesentlichen die aromatischen Säuren unter Abspaltung von Kohlensäure und Bildung der entsprechenden Phenole zerlegt.

Zwei solcher Natronschmelzversuche habe ich mit 30 und 50 Grm. Substanz und der achtfachen Menge Ätznatron im Silberkessel ausgeführt, den einen bei 290° den anderen bei etwa 350°. Die Schmelzen wurden angesäuert, ausgeäthert etc. Die Einzelnheiten übergehend, bleibt mir nur zu erwähnen, dass in den Ätherrückständen weder auf die drei Dioxybenzole noch auf die drei Trioxybenzole irgend eine Reaction eintrat, namentlich weder eine Färbung mit Eisenchlorid noch eine Reductionsprobe.

Nach diesem vergeblichen Bemühen führte endlich eine Reihe anderer Versuche dazu, die aromatische Gruppe zu finden. Ich habe erwähnt, dass gelegentlich des Zerspaltungsversuches mit Ätzbaryt nach dem Aufschrauben des eisernen Rohres ein benzol- oder ligroinartiger Geruch wahrgenommen wurde. Dies brachte auf den Gedanken, dass aus der Oxyprotsulfonsäure die genannte Gruppe als Benzol eliminirt werde und dass bei den Alkalischmelzversuchen sie in Folge dessen verflüchtiget worden sei.

Ich habe daher die Schmelzversuche statt in offenen Gefässen unter Anwendung von Retorten und von mit Eiswasser beschickten Kühlern wieder aufgenommen. Da man in Metallretorten nichts beobachten kann, habe ich stärkerwandige Glasretorten benützt, die in der Regel dem schmelzenden Alkali zwei bis drei Stunden lang Stand halten, bevor sie bersten, was mehr als ausreichend für

[1] Sitzungsber. d. kais. Akad., vorgel. 7. April 1879.

die Zersetzung der Oxyprotsulfonsäure ist. Als Alkali wurde Ätznatron genommen in der sechsfachen Menge der Säure. Sofort der erste Versuch mit circa 50 Grm. Substanz, sowie mehrere folgende gaben ein positives Resultat. Das im Eis aufgefangene Destillat betrug einige CC. wässriger, ammoniakalischer, farbloser Flüssigkeit, auf der gelbe Tropfen eines leichten benzolartig riechenden Öles schwammen. Durch Aussalzen mit Salpeter konnten sie vermehrt und in einem enghalsigen Kölbchen passend gesammelt werden. Zu einer Analyse, der eine Rectification hätte vorhergehen müssen, reichte die Menge nicht aus, aber durch die Nitrirung mit starker Salpetersäure, Verdünnen mit Wasser und Ausschütteln mit Äther, konnte leicht Mirbanöl mit seinem starken Geruche erhalten und die Diagnose auf Benzol erbracht werden.

Benzol bekommt man mittelst Kalk oder Ätznatron aus aromatischen Säuren ohne weitere Seitenkette als die des Carboxyls; also war daran zu denken, dass von der Oxyprotsulfonsäure sich zunächst eine Benzolcarbonsäure (eine der Phtalsäuren oder Benzoesäure) abspalte. Dabei kann man nicht umhin, der älteren Versuche Guckelberger's[1] zu gedenken, welcher bei der Einwirkung des Chromsäuregemisches auf Eiweisskörper Benzaldehyd sowohl als Benzoesäure erhielt, und der Angabe Städeler's[2], dass er, als er die Versuche Bechamp's über die Harnstoffbildung aus Eiweiss wiederholte, bei der Einwirkung von überschüssigem Kaliumpermanganat auf Eiweiss in höherer Temperatur nur etwas Benzoësäure erhielt.

Es ist fast selbstverständlich, dass, wenn sich Eiweiss so verhält, auch die Oxyprotsulfonsäure unter gleichen Umständen Benzoesäure geben muss. Ich habe gleichwohl dies festgestellt.

Oxyprotsulfonsäure wurde mit einem Überschuss von Kaliumpermanganatlösung 10—12 Stunden im kochenden Wasserbade digerirt; die Zersetzung ist dabei weitgehend, denn andauernd entwickelt sich Ammoniak. Nachdem der Braunsteinschlamm filtrirt und ausgewaschen war, wird das Filtrat eingeengt, mit Schwefelsäure angesäuert und mit Äther ausgeschüttelt. Der

---

[1] l. c.

[2] l. c.

Rückstand vom Äther war nach einmaligen Umkrystallisiren aus Petroleumäther, Abpressen und ein bis zweimaligen Umkrystallisiren aus heissem Wasser schneeweisse Benzoësäure vom Schmelzpunkt 121—122° C. Die Ausbeute ist verhältnissmässig reichlich, man kann aus fünf Grm. Oxyprotsulfonsäure bei sauberer Arbeit genügende Menge Benzoësäure zur Diagnose erhalten.

Ebenso bekam ich Benzoësäure, als die Oxyprotsulfonsäure mit Chromsäuregemisch am Rückflusskühler zehn Stunden gekocht und darauf abdestillirt wurde.

Damit erscheint nachgewiesen, dass die aromatische Gruppe in der Oxyprotsulfonsäure nicht mit zwei Carboxylen in Verbindung ist, denn von den beiden schwer löslichen (*m* und *p*) Phtalsäuren, auf welche geachtet worden war, ist keine Spur gebildet worden, während, wenn die beiden Carboxyle die Orthostellung gegeneinander einnehmen würden, die aromatische Gruppe bei der Abspaltung durch das Chromsäuregemisch vollständig verbrannt worden wäre.

Das Benzol und die Benzoësäure sind sonach als Abkömmlinge einer einfach carboxylirten aromatischen Kette zu betrachten, gerade wie die Producte auch, welche das Eiweiss selbst liefert. Aber es fragt sich, wie ist die unerwartete und auffallende Thatsache zu erklären, dass, wenn ein nicht oxydirter Körper bei der Zersetzung Oxybenzolderivate (Phenol und Paraoxybenzoësäure) liefert, derselbe Körper im oxydirten Zustande nur Benzolderivate (Benzol und Benzoësäure) gibt?

Die Erklärung dafür ist nicht schwer zu finden, sie liegt darin, dass bei der Bildung der Oxyprotsulfonsäure aus Eiweiss nicht eine Oxydation im aromatischen Kerne stattgefunden hat, sondern dass der Angriffspunkt der Oxydation jenes Kohlenstoffatom ist, welches die aromatische Gruppe mit dem übrigen Eiweissrest verbindet.

Denken wir uns die aromatische Gruppe mit der Fettkörpergruppe des Eiweisses verbunden, so kann dies, da durch blosse Hydratation Tyrosin auszutreten vermag, kaum anders sein als:

$$\ldots\ldots\ldots - CH_2 - CH_2 - CH_2 - C_6H_4 - C_2H_3(NH_2) - COOH$$

Fettkörper von Eiweiss. Benzolkern. Tyrosinseitenkette.

wobei die links vom Phenylen gelegenen 3 C Atome den Anfang der damit verbundenen Fettkörperreihe darstellen. Wird Eiweiss,

welches also für sich eine Oxybenzolgruppe noch nicht enthält, mit Säuren oder Alkalien zerspalten, so löst sich die aromatische Gruppe unter Aufnahme der Wasserelemente als Monoxybenzol (Tyrosin, beziehungsweise Paraoxybenzoësäure oder Phenol) ab:

$$\begin{array}{r|l} \mathrm{H} & \mathrm{OH} \\ | & | \\ \ldots\ldots\ldots\ldots -\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2} & \mathrm{C_6H_4}-[\mathrm{C_2H_3NH_2}]-\mathrm{COOH} \end{array}$$

während die Fettkörperreihe sich mit einem Methyl schliesst und als Leucin oder dgl. austritt.

In der Oxyprotsulfonsäure ist das dem C_6H_4 zunächst liegende CH_2 zu CO oxydirt:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CO}-\mathrm{C_6H_4}-\mathrm{C_2H_3(NH_2)}-\mathrm{COOH}$$

und wenn Spaltung durch Hydratation eintritt, wird wie beim Eiweiss an derselben Stelle die aromatische Gruppe abgerissen, aber das Hydroxyl wandert zum CO und man erhält Phenylamidopropionsäure beziehungsweise Benzoësäure und beim Glühen mit Alkalien Benzol, und anderseits durch Bildung von Carboxyl eine Säure oder Oxysäure der Fettreihe:

$$\begin{array}{r|l} \mathrm{OH} & \mathrm{H} \\ | & | \\ \ldots\ldots\ldots \mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CO} & \mathrm{C_6H_4}-[\mathrm{C_2H_3NH_2}]\,\mathrm{COOH} \end{array}$$

Diese Überlegungen erklären den Unterschied in den aromatischen Zersetzungsproducten zwischen dem Eiweiss und der Oxyprotsulfonsäure; sie sind aber noch in einem anderen Sinne mit den Thatsachen im Einklang, denn es deckt sich damit genau der bei der Elementaranalyse gefundene Sauerstoffgehalt. Von den vier aufgenommenen Sauerstoffatomen sind drei zur Bildung der Sulfonsäure verbraucht worden; das vierte hat die oben angegebene Stellung am Ende der Fettkörperkette.

Es lässt sich als Beitrag für eine einstmalige Erkennung der Constitution des Eiweisses noch Folgendes als wahrscheinlich ableiten:

1. Man hat nur eine aromatische Gruppe im Eiweiss anzunehmen, denn mit jener Anderung welche den Tyrosinausfall unter den Zersetzungsproducten bewirkt, fehlen auch Phenol und Indol vollständig.
2. Auf ein Atom Schwefel im Eiweiss kommt einmal die aromatische Gruppe.

II. und III.

Was ich hier noch vorzubringen habe, bezieht sich wie vorher pag. 116 erwähnt, auf die gleichzeitig und neben der Oxyprotsulfonsäure entstehenden Körper und ferner auf die bei stärkerer Permanganatwirkung aus der Oxyprotsulfonsäure entstehenden Substanzen. Diese Körper sind mir aufgestossen und ich konnte sie nicht ignoriren, ihre Untersuchung, die noch viel Zeit und Arbeit in Anspruch nehmen wird, ist nur auf einige Punkte ausgedehnt worden.

Ad II. Die Rohfiltrate der Oxyprotsulfonsäure enthalten auch dann, wenn nur das Minimum von Kaliumpermanganat genommen worden ist, eine lösliche, schwefelhaltige noch hoch zusammengesetzte Säure als Hauptbestandtheil (vielleicht als einzigen Bestandtheil).

Man kann die Säure daraus ausfällen entweder durch Phosphorwolframsäure oder nach vorhergegangener Neutralisation durch Bleizucker. In beiden Fällen lässt sich das Barytsalz und mit Schwefelsäure daraus die freie Säure darstellen.

Die Phosphorwolframsäurefällung ist sehr voluminös, sie wurde auf Leinenfiltern mit verdünnter Schwefelsäure gewaschen, abgepresst und durch Verreiben mit Barytwasser zerlegt. Das Filtrat wird mit Kohlensäure behandelt und der gebundene Baryt durch sorgfältiges Ausfällen entfernt, so dass eher eine Spur Schwefelsäure als Baryt noch in Lösung ist. Die Lösung der nun erhaltenen freien Säure wird bei gelinder Wärme eingeengt und nachdem sie syrupdick geworden mit stärkstem Alkohol gefällt. Die weissen flockigen Niederschläge der so gewonnenen freien Säure stellten trocken kreidige Pulver dar, die sich in Wasser völlig klar mit stark saurer Reaction lösen und folgende Reactionen geben:

Mit Silbernitrat nichts, nach Neutralisation mit Ammoniak starke weisse, ziemlich lichtbeständige in heissem Wasser lösliche Fällung; mit Kupfersulfat und Kali intensive violette Lösung; mit Nickelsulfat und Kali gelbe Lösung worin das Nickel durch Schwefelammonium nicht fällbar; mit Bleizucker und Bleiessig weisse Fällungen. Keine Niederschläge treten ein mit Chlorbaryum, Chlorcalcium, Platinchlorid und Ferrocyankalium mehr

Essigsäure. Die Millon'sche Reaction versagt ebenfalls. Durch Schmelzen mit Soda und Salpeter wird Schwefelsäure gebildet.

Vermittelst der Bleifällung ist eine grössere Menge Substanz dargestellt und durch fractionirte Behandlung auf ihre Einheitlichkeit geprüft worden. Es dienten dazu wieder die Rohfiltrate der Oxyprotsulfonsäure mehrerer Darstellungen, bei welchen auf je 300 Grm. Eiweiss 180 Grm. Kaliumpermanganat angewendet worden war. Zuerst wurde aus den Filtraten durch essigsauren Baryt und soviel Barytwasser, dass neutrale Reaction eintrat, die Schwefelsäure entfernt. Die letzte Trübung des sich schlecht absetzenden Baryumsulfates wird dadurch entfernt, dass mit ein wenig Bleiessig ein Niederschlag erzeugt wird, der die Trübung mit sich reisst. Das Filtrat wird bei gelinder Wärme eingeengt und nun mit Bleiessig ausgefällt. Es entsteht ein massenhafter weisser Niederschlag, der sich aber in überschüssigem Bleiessig auflöst, wesshalb um Verlust zu vermeiden, bei der Ausfällung darauf zu achten ist.

Die Bleifällung wird filtrirt, abgepresst, neuerdings mit viel Wasser zerrührt, wieder auf Leinenfilter gebracht und in diesen mittelst einer Schraubenpresse trocken gepresst, hierauf mit verdünnter Schwefelsäure zerlegt und durch Barytwasser und Entfernung des überschüssigen Baryts durch Kohlensäure ein Barytsalz dargestellt, das auf Zusatz von starkem Alkohol als klumpiger oder pflasterartiger Niederschlag ausfällt.

Das Barytsalz wurde nun nach neuerlichem Auflösen durch partielles Fällen mit Alkohol in drei Fractionen zerlegt; dann die dritte Fraction beseitigt und die ersten beiden zusammen wieder in drei Fractionen gefällt und so mehrmals nacheinander. Die einzelnen Barytsalzfractionen sind in Bezug auf den Barytgehalt analysirt worden. Das folgende Skelet gibt die Procentgehalte an Baryt.

I*a*	I*b*	I*c*.....Fällung.
12·30	12·87	13·10.....proc. Baryum.
vereinigt		
II*a*	II*b*	II*c*.....Fällung.
12·18	12·34	12·33 .....proc. Baryum.
vereinigt		
III*a*	III*b*	III*c* .....Fällung.
12·00	12·08	12·32.....proc. Baryum.

Indem man die letzte immer etwas barytreichere Fraction entfernte, kam man zu einem Gehalt von circa 12 Procent Baryt, der sich nicht mehr erniedrigen liess, denn II*a* und III*a* sind nur mehr wenig von einander verschieden, und III*a* und III*b* noch weniger.

Es liegt also auch hier jedenfalls der Hauptsache nach eine einheitliche Substanz vor. Dies geht noch weiter aus einigen auf titrimetrischem Wege angestellten Natriumbestimmungen hervor, davon die eine mit der durch Phosphorwolframsäure, die andere mit der durch Bleiessig gefällten Substanz vorgenommen wurde, denn die erhaltenen Natriummengen sind denen des gefundenen Baryums äquivalent.

Natriumbestimmungen.

1. Substanz aus der Phosphorwolframsäurefällung. 0·6405 Grm. bei 105° getrocknet verbrauchten zur Neutralisation mit Lakmus 3·8 CC. Lauge (1 CC. gleich 6·61 mgr. Na) oder 0·251 Grm. Natrium, woraus sich für das entstandene Natriumsalz ein Gehalt berechnet von:

4·08% Natrium.

2. Substanz aus der Bleiessigfällung. Hiezu diente eine Säure, die aus den noch erübrigten analysirten Baryumsalzen durch genaues Zerlegen mit verdünnter Schwefelsäure, Einengen im Vacuum und Fällen mit Alkohol erhalten war. 0·776 Grm. bei 105° getrocknet verbrauchten bis zur Violettfarbe 5·1 CC. Lauge (obigen Titers) oder 0·0337 Grm. Natrium, woraus sich für das entstandene Natriumsalz rechnet ein Gehalt von:

4·16% Natrium.

Das Verhalten der vorerwähnten Barytsalzfractionen zu Reagentien war untereinander das gleiche und auch nicht verschieden von der mittelst Phosphorwolframsäure gefällten Substanz, wenn sie mit Baryt oder Kali neutralisirt worden war; ich brauche also diese Reactionen nicht nochmals zu wiederholen.

Elementaranalysen sind zwei ausgeführt worden, nebst einer Schwefelbestimmung.

Das Mittel davon ist:

Kohlenstoff	— 48·20
Wasserstoff	— 6·65
Stickstoff	— 13·40
Schwefel	— 2·00
Sauerstoff	— 30·00
	100·00

Was sich demnach über die lösliche neben der Oxyprotsulfonsäure entstehende Säure auf Grund der unvollkommenen Untersuchung sagen lässt, ist Folgendes: Die Säure ist durch die Eigenschaft Biuretreaction zu geben noch der Eiweissgruppe nahestehend, durch ihre Löslichkeit dem Pepton. Sie ist aber bereits weiter oxydirt als die Oxprotsulfonsäure, und zwar nicht blos wie letztere durch Eintritt von Sauerstoff, sondern auch durch Herausholung von Kohlenstoff, infolge dessen der Schwefelgehalt erhöht worden ist. Der Schwefel selbst ist nicht bleischwärzend, also in Form von Sulfonsäure noch enthalten.

Da auch die aromatische Gruppe in der Säure noch enthalten ist, wie daraus hervorgeht, dass sie mit Kali geschmolzen Benzol, mit Chromsäure gekocht Benzoësäure liefert, so folgt, dass diese weitere Oxydation im Eiweiss die Fettkörpergruppe betroffen haben muss.

Ad III. Der letzte Theil der vorliegenden Arbeit betrifft endlich die weitere Oxydation der Oxyprotsulfonsäure mit Kaliumpermanganat. Doch ist dabei die Oxydation bei gewöhnlicher Temperatur gemeint, nicht jene beim Kochen, wobei, wie schon früher erwähnt worden ist, eine völlige Zersetzung unter Abspaltung von Ammoniak, Basen und Benzoësäure eintritt. Aus der Tabelle auf pag. 160 ist ersichtlich, dass, wenn das Kaliumpermanganat 140% vom Eiweissgewichte beträgt, Oxyprotsulfonsäure nicht mehr erhältlich ist und es ist dort angedeutet, dass eine solche weitere Oxydation ein zweites Stadium bedeutet, denn sie läuft viel langsamer ab. Ich habe mehrmals grössere Mengen Eiweiss bis zum Verschwinden der Oxyprotsulfonsäure oxydirt in der Absicht, die dann vorhandenen Körper zu untersuchen, doch habe ich dabei keine brauchbaren Resultate bekommen und davon abgelassen, da in solchem Falle die Verhältnisse dadurch complicirt waren, dass neben dem oder

den weiteren Oxydationsproducten der Oxyprotsulfonsäure auch jene der neben ihr gebildeten löslichen vorher besprochenen Säure vorhanden sein musste.

Es musste daher der Umweg eingeschlagen werden, vorerst die Oxyprotsulfonsäure auszufällen, zu waschen, dann in Alkali zu lösen und jetzt erst weiter mit Permanganat zu behandeln.

Um dabei Anhaltspunkte für die Verarbeitung grösserer Mengen Substanz bezüglich der Menge des bei gewöhnlicher Temperatur noch einwirkenden Reagenses zu haben, wurde wieder eine Reihe Lösungen von oxyprotsulfonsaurem Kali von bekanntem Gehalt mit steigenden Mengen Permanganat versetzt. Binnen der ersten acht Tage wurden, bei Zimmertemperatur auf trockene Oxyprotsulfonsäure berechnet, 90 bis 100% Kaliumpermanganat reducirt; im Filtrat ist dann nur noch eine kleine Menge Oxyprotsulfonsäure durch Schwefelsäure ausfällbar. Dieser letzte Rest widersteht dann aber ziemlich lange und man muss im Ganzen etwa 150—170% Permanganat hinzufügen, bevor er völlig verschwunden ist.

Bei einer Darstellung im Grösseren sind 130 Grm. trockener Oxyprotsulfonsäure mit 220 Grm. Kaliumpermanganat und 3 L. Wasser bis zur Bildung eines farblosen Filtrates, wozu etwa zwei Wochen nöthig waren, stehen gelassen worden. Die Filtrate von voluminösem Manganschlamm nebst den Waschwässern, welche noch die intensive Biuretreaction gaben, wurden mit Essigsäure neutralisirt in gelinder Wärme verdunstet. Auch hier war noch die Hauptmasse der vorhandenen Substanz durch Bleisalze fällbar, und deshalb ist in gleicher Art wie bei der Verarbeitung der vorher beschriebenen Säure verfahren worden: Fällung mit Bleiessig, Abpressen, Zerlegen mit Schwefelsäure, Überführung in Barytsalz und fractionirte Fällung mit starkem Alkohol.

Die erhaltenen Barytsalze sind schneeweisse schwere Pulver, in Wasser leicht zu klaren neutralen Flüssigkeiten löslich. Die Lösungen werden gefällt von Alkohol, von Silbernitrat, von Quecksilbernitrat, von Phosphormolybdänsäure. Millon's Reaction tritt nicht ein. Die aus dem Barytsalz abgeschiedene Säure ist noch stickstoff- und schwefelhältig. Biuretreaction wird sehr stark erhalten. Die aromatische Gruppe ist noch darin und tritt beim Kochen mit Chromsäuremischung als Benzoësäure aus.

Die drei nacheinander fractionirt gefällten Barytsalze enthielten:

a . . . . . $28 \cdot 77\%$ Barium
b . . . . . $27 \cdot 75\%$ „
$27 \cdot 80\%$
c . . . . . $28 \cdot 48\%$ „

So gering dieses analytische Material ist, so zeigt es doch, dass auch eine genauere Bearbeitung der weiteren Oxydationsproducte wichtige Resultate verspricht, indem, was wir sonst in der Eiweisschemie lebhaft vermissen, in der vorsichtig gesteigerten Einwirkung des Kaliumpermanganats gefunden zu sein scheint: ein stufenweiser Abbau des Eiweissmoleküls. Denn die verhältnissmässig hohen Baryumgehalte der zuletzt erwähnten Salze entsprechen einer Säure, welche, wenngleich sie noch immer durch die aromatische Gruppe und den die Biuretreaction gebenden Atomcomplex der Eiweissgruppe nahe verwandt ist, schon ein viel kleineres Molekül besitzen muss.

Bei der vorstehenden Arbeit habe ich mich häufig der sorgfältigen und tüchtigen Mithülfe von Herrn Friedrich Emich zu erfreuen gehabt.

Über die Reductionsproducte der Nitroazokörper und über Azonitrolsäuren.

Von Prof. **J. V. Janovsky.**

(Mit 3 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Jänner 1885.)

Die von mir früher[1] beschriebenen und untersuchten directen Substitutionsproducte des Azobenzols, welche sich als nicht identisch mit denen durch Umlagerung aus Diazobenzolkörpern entstandenen Azoderivaten erwiesen — wie z. B. die Amidoazobenzolparasulfosäure, liessen es wünschenswerth erscheinen, diejenigen Substitutionsproducte zu untersuchen, welche mit dem Amidoazobenzol und Diamidoazobenzol (Chrysoïdin) isomer sind.

Vorerst musste, da über die Reindarstellung und Eigenschaften, besonders aber über die Stellungsfrage, keine neueren Arbeiten vorliegen (mit Ausnahme der Untersuchung über Dipara-dinitroazobenzol) ein eingehendes Studium der Nitroderivate des Azobenzols vorangehen. Nachfolgende Arbeit führte ich gemeinschaftlich mit meinem Assistenten Herrn Leopold Erb aus und diente uns als Ausgangsmateriale das von Gerhardt und Laurent zuerst dargestellte Product der Einwirkung von Salpetersäure auf Azobenzol, welches Gerhardt als Nitroazobenzid (Gmelin, Azofune) und Dinitroazobenzid (Azodifune) bezeichnet. Nach Gerhardt und Laurent (Annal. 75. p. 73 im Excerpt in Kolbes Lehrbuch Bd. I, p. 447) hat noch J. Lermontow (Berliner Berichte 5, p. 234) und Petriew (Zeitschrift f. org. 1870, p. 265) über Nitroderivate des Azobenzols gearbeitet und J. Lermontow für die Reductionsproducte des Dinitroazobenzols mit Ammonhydrosulfid die Formeln

$$C_{12}H_8N_2.(NO_2)^2.H_2 \quad \text{und} \quad C_{12}H_8N_2(NH_2)^2.H_2$$

aufgestellt; letzteres Product ist das von Gerhardt und Laurent

[1] Siehe die Berichte 1883, p. 358. 1884, p. 640.

durch Reduction von Dinitroazobenzol erhaltene Diphenin. Petriew erhielt durch Einwirkung kochender Salpetersäure und heisser Nitroschwefelsäure auf Azobenzol Trinitroazoxybenzol neben Trinitroazobenzol (über letzteres fehlt jede genaue Angabe). Das von E. Fischer (Annalen 190, p. 133) erhaltene Trinitroazobenzol (Schmp. 143° C.), welches derselbe aus Trinitrohydrazobenzol erhielt, ist nicht als directes Substitutionsproduct zu betrachten, da es durch Reaction von Phenylhydrazin auf Chlornitrobenzol erhalten wurde.

Die Nitroderivate des Azobenzols wurden zuerst immer nach Gerhardt's Vorschrift — Eintragen kleiner Mengen Azobenzol in rauchende Salpetersäure — ausgeführt. Zur Darstellung von 5—10 Grm. eignet sich die Methode wohl, bei grösseren Mengen muss man aber etwas anders verfahren, da sonst ganz andere, später zu beschreibende Nitroderivate, als die von Gerhardt erhaltenen, resultiren. Gerhardt und Laurent erhielten beim Nitriren von Azobenzol eine Masse, die aus Mononitro, Dinitroazobenzol und einer rothen öligen Substanz bestand, die sie durch Äther von den Nitroazobenzolen trennten. Die Trennung des Mononitroazobenzol vom Dinitroazobenzol wurde durch partielle Lösung in heissem Alkohol (Weingeist, Orig. Abhandlung) ausgeführt. Die Concentration der Säure und Temperatur ist nicht angegeben.

Die Methode eignet sich nur zur Darstellung kleiner Mengen, da beim Eintragen grösserer Quantitäten starke Erhitzung, ja heftige Explosion eintritt.

Gute Ausbeuten erhält man auf folgende Art: 100 Theile Azobenzol werden grob gerieben und in sehr kleinen Portionen nach und nach in 300 Theile mit Schnee gekühlte Salpetersäure von 1·51 V. G. eingetragen; es darf die Temperatur nicht 25° C. übersteigen, da sonst vorwiegend ölige Producte gebildet werden. Das Azobenzol löst sich mit rothgelber Farbe auf; nach 12—14 Stunden scheiden sich rothe Krystalle ab und endlich erstarrt die ganze Masse zu einem Krystallmagma. Man behandelt mit Wasser, wäscht das ausgeschiedene Product bis zur schwach sauren Reaction, presst möglichst von Wasser ab und behandelt mit kaltem Aceton, welches Mononitroazobenzol nebst der schon von Gerhardt erwähnten öligen Substanz auflöst.

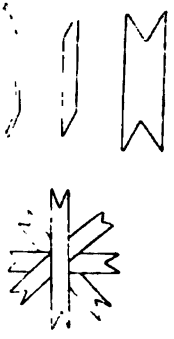
100 Grm. Azobenzol liefern 160 Grm. (Rohausbeute) von Nitroazobenzolen, davon entfallen auf Dinitroazobenzol circa 80 Grm.

Behufs Gewinnung des Mononitroazobenzols wird die Acetonlösung abdestillirt und der zurückbleibende Rückstand mit Alkohol längere Zeit am Rückflusskühler gelöst; nach dem Erkalten der Lösung scheidet sich der grösste Theil des Mononitroazobenzols ab, ein geringer Theil bleibt — nebst dem rothen Öle — in der Mutterlauge zurück. Durch Behandeln des nach dem Verdunsten des Alkohols resultirenden Rückstandes mit kochendem Äther (in kleineren Partien) und abermalige Krystallisation gewinnt man fast alles Mononitroazobenzol — die ätherische Mutterlauge liefert dann das Öl fast ganz frei von anderen Producten.

Dinitroazobenzol.

Das auf obige Art gewonnene Dinitroazobenzol ist wohl identisch mit dem von Gerhardt (s. oben) dargestellten Binitroazobenzid. Im feinvertheilten Zustande ist es gelborange, aus heissem Aceton krystallisirt es beim Erkalten in orangerothen, nadelförmigen Krystallen, die einen sehr lebhaften Glanz besitzen. In Äther, Petroleumäther, und kaltem Alkohol ist das Dinitroazobenzol fast unlöslich, siedender Alkohol löst schwer, heisses Aceton ziemlich leicht. Heisser Amylalkohol, Benzol und besonders Toluol lösen das Dinitroazobenzol reichlich. Rauchende Salpetersäure löst in der Kälte Dinitroazobenzol leicht und krystallisirt dasselbe in rothen Nadeln beim langsamen Verdunsten heraus. Eisessig löst das Dinitroazobenzol in der Siedehitze leicht und bei sehr langsamem Erkalten scheidet sich das Präparat in langen biegsamen dunkelrothen Krystallen aus; letztere zeigen den constanten Schmelzpunkt von 206° C. Die Krystalle, aus Aceton gewonnen, zeigen einen Schmelzpunkt, der zwischen 174—182 variirt und lässt das auf eine Beimengung von Monitroazobenzol schliessen. Weder bei der Originalabhandlung von Gerhardt, noch in den Büchern von Beilstein und Kolbe ist der Schmelzpunkt angegeben.

Fig. 1.



Die aus Aceton und Eisessig gewonnenen Krystalle haben vorstehende Gestalt (Fig. 1) und zeigen im polarisirten Licht prächtige Farbenerscheinungen.

Concentrirte Schwefelsäure reagirt selbst in der Siedehitze nicht. Pyroschwefelsäure (25 activ) und Chlorsulfonsäure erzeugen in der Wärme eine Sulfosäure, die sich in Alkalien mit tiefrother Farbe auflöst — die Säure ist in Wasser schwer löslich, die Alkalisalze sind purpurroth gefärbt. Schwefelammonium überführt es nach J. Lermontow (s. oben) in der Kälte in Dinitrohydrazobenzol. welches in gelben Nadeln krystallisirt und bei 220° C. schmilzt; wird das Hydrazodinitrobenzol in der Siedehitze weiter reducirt, so entsteht das von Laurent und Gerhardt entdeckte Diphenin, welches dieselben erhielten, als sie eine kalte alkoholische Lösung von Dinitroazobenzol mit Ammoniak sättigten und dann Schwefelwasserstoff durchleiteten, zuerst kalt, dann siedend heiss. Dasselbe schmilzt bei 145° C. Behandelt man jedoch von vorneherein die siedende alkoholische Lösung mit Ammonhydrosulfid, letzteres in wässeriger Lösung, so entsteht ein vom Diphenin verschiedener Körper; die Lösung wird braun, dann olivgrün, endlich geht die Reduction weiter, bis die Lösung satt gelbroth wird, wobei beide Nitrogruppen wahrscheinlicher Weise in Amidogruppen überführt werden. Beim Abbau mit Zinn und Salzsäure liefert das Dinitroazobenzol Paraphenylendiamin. (Schmp. 140° C.). Auch J. Lermontow hat beim Abbau des Diamidohydrazobenzols mit Ammonhydrosulfid Paraphenylendiamin erhalten, woraus sich für das Dinitroazobenzol die Formel

$$\underset{(4)}{NO_2}.\underset{(1)}{C_6H_4}N=\underset{(1)}{NC_6H_4}.\underset{(4)}{NO_2}$$ ableitet.

Nitro-Azobenzolnitrolsäure.

Löst man Dinitroazobenzol in heissem Alkohol, dem etwas Aceton hinzugefügt ist und reducirt man mit Ammonhydrosulfid nur so lange, bis die Flüssigkeit olivgrün geworden ist, so fällt beim Verdünnen mit Wasser oder beim Neutralisiren mit Salzsäure ein Körper heraus, der der Analyse nach weder Hydrazodinitrobenzol noch Diphenin ist und sich in wässerigen Alkalien mit prächtig blauer Farbe löst. Diese Blaufärbung findet immer statt, wenn

man die Nitro- (Mono und Di) -derivate des Azobenzols mit fixen Alkalien und Ammonhydrosulfid (oder anderen alkalischen Reductionsmitteln) in der Siedehitze behandelt und rührt von intermediären Reductionsproducten her, die eine oder zwei Nitrolgruppen (N.OH) enthalten. Bei längerer Einwirkung wird die Lösung dunkelbraun, fällt mit Salzsäure roth und liefert ein von den oberen Körpern und von Diphenin verschiedenes Product.

Das Diphenin ist eine zweisäurige Base, welche in Salzsäure mit rother Farbe löslich ist und rothes Hydrochlorat liefert.

Der nach obiger Reaction resultirende Körper ist aber keine Base, da er mit Salzsäure gefällt wird und sich in Alkalien löst. Unsere erste Vermuthung, die sich nicht bestätigte, war, dass der Körper Diamido-azobenzol sei. Jedoch die Löslichkeit in Alkalien und die Analyse schliessen sowohl Diphenin als auch das Diamidoazobenzol aus.

Die Reduction des Dinitroazobenzols kann auch mit alkalischer Zinnoxydullösung, mit alkalischer Traubenzuckerlösung und mit Zinkstaub in alkalischer Lösung ausgeführt werden, somit ist die Verbindung keine Schwefelverbindung; es ist dies besonders desshalb hervorzuheben, weil dem mit Ammonhydrosulfid dargestellten Körper hartnäckig geringe Schwefelmengen anhaften, die nur durch mehrfache Behandlung mit Aceton sich entfernen lassen.

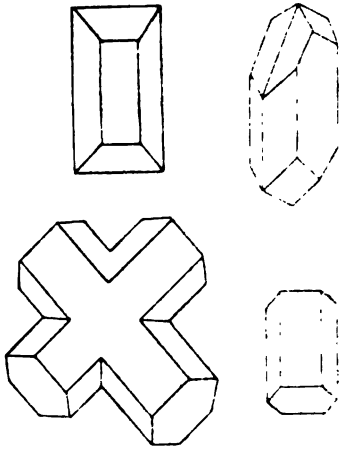
Die Reindarstellung des intermediären Reductionsproductes gelingt leicht auf folgende Weise. Dinitroazobenzol wird mit Alkohol andauernd gekocht und dann wässeriges, gelbes Ammonhydrosulfid im Überschuss hinzugefügt; man prüft nun, ob mit Alkali die charakteristische Blaufärbung entsteht; ist dieselbe eingetreten, so verdünnt man sofort mit Wasser, setzt Salzsäure hinzu und lässt erkalten. Der mit Salzsäure entstehende gelbe Niederschlag wird mit Wasser gewaschen, getrocknet und aus kleinen Mengen siedendem Aceton umkrystallisirt. Die Krystalle sind bernsteingelb von beifolgenden Formen; in siedendem Aceton leicht, in Alkohol aber schwerer löslich, auch Äther löst sie auf, Petroleumäther kaum. Grössere Krystalle zeigen auf den brillantglänzenden Flächen einen tief blauen Schimmer. (Schmelzpunkt 218° C.) Die Analyse der Substanz ist wegen der Explodirbarkeit beim Erhitzen über den Schmelzpunkt schwierig

auszuführen. Die Substanz muss bei 140° C. getrocknet werden da sie hartnäckig Aceton zurückhält. Beim Trocknen verliert sie ihre Pellucidität und sieht verwittert aus.

Die Analyse ergab:

	a	*b*	berechnet
Kohlenstoff	56·14	56·09	56·04
Wasserstoff	3·44	3·98	3·50

Fig. 2.



Diese Zusammensetzung führt zu der Formel

$$C_{12}H_8.N_2.(NO_2)(NO.H).$$

Das Dinitrohydrazobenzol, dessen Schmelzpunkt dem der obigen Säure nahe kommt, enthält 52·55 Kohlenstoff, das Diamidohydrazobenzol 67·129 Kohlenstoff. Der Körper besitzt einen saueren Charakter und löst sich in Alkalien, Baryt und Kalkwasser mit prächtig blauer Farbe auf; schüttelt man die wässerige Lösung mit Aceton, so nimmt das letztere die Färbung an; diese Lösung gleicht der der Überchromsäure in Äther. Schwache Oxydationsmittel greifen den Körper nicht an, eine warme alkalische Lösung von Ferridcyankalium oxydirt denselben zu Dinitroazobenzol. Da das Dinitroazobenzol beim Abbau bis zur Sprengung der Azogruppe nur Paraphenylendiamin liefert, so ist die Stellung der beiden Seitenketten:

$$\underset{(4)}{NO_2}C_6H_4\underset{(1)}{N} = \underset{(1)}{N}.C_6H_4.\underset{(4)}{N}.OH\ ^1$$

Die Azo-Nitrolsäuren unterscheiden sich wesentlich von den Alkylnitrolsäuren dadurch, dass die Nitrolgruppe an einem andern

---

[1] Möglicherweise ist die Formel

$$NO_2C_6H_4N = NC_6H_4N.OH$$
$$\quad\quad\quad

Kohlenstoffatom sitzt, als die Nitrogruppe, aber auch schon dadurch, dass, wie wir später zeigen werden, Mononitrokörper bei der Reduction dieselbe Reaction zeigen. Die Alkalisalze der Nitrolsäure sind sehr unbeständig. Durch Kohlendioxyd wird die blaue Lösung gelb gefällt, wobei die Nitrolsäure abgeschieden wird. Schon das Stehenlassen der ausgebreiteten Lösungen an kohlensäurehältiger Luft bewirkt die Zersetzung — bei Zusatz von Alkalien tritt die Blaufärbung wieder hervor. Kohlensäurefreie Luft reagirt nicht. Phenylhydrazin reagirt sehr lebhaft und liefert unter Abspaltung von Stickstoff und Ammoniak-Krystalle, deren Untersuchung wir uns vorbehalten; ebenso wirken Monoamine (Anilin) unter Abspaltung von NH_3. Acetylchlorid löst unter Zersetzung. Reducirt man die Nitrolsäure vorsichtig mit Ammonhydrosulfid oder reducirt man gleich das ursprüngliche Dinitroazobenzol längere Zeit jedoch nicht bis zum völligen Abbau der Nitrogruppen, so scheidet sich bei nachheriger Behandlung mit Salzsäure ein orangerother, in Alkohol, Äther, Aceton löslicher und daraus in dunkelrothen, mikroskopischen Nadeln krystallisirender Körper aus, der ebenfalls wie die Nitronitrolsäure in Alkalien lösliche, blaue Salze liefert und einen sauren Charakter besitzt; derselbe ist vorläufigen Untersuchungen zu folge $C_{12}H_8N_2(NOH)^2$, konnte aber bislang nicht in zur genauen Analyse nöthigen Reinheit erhalten werden. Bei noch tiefer eingreifender Reduction wird die Lösung roth, färbt sich mit Salzsäure hellroth und es ist dann entweder Diphenin oder Diamidoazobenzol gebildet worden. Das Diphenin wird gebildet, wenn man die alkoholische Lösung von Dinitroazobenzol mit Ammoniakgas sättigt, dann Schwefelwasserstoff einleitet, wobei zuerst (in der Kälte) Dinitrohydrazobenzol entsteht, welches sich weiter zu Diamidohydrazobenzol (Diphenin) reducirt (Schmp. 145°C.).

Wenn man aber Nitroazoverbindungen gleich siedend heiss reducirt, so amidirt, beziehungsweise reducirt sich vorerst die Seitenkette, wie ich dies bei den Nitrosulfosäuren des Azobenzols nachgewiesen.[1] Es entsteht z. B. Amidosulfoazobenzol

$$C_{12}H_8N_2\begin{cases}SO_3H\ (4)\ ^2\\NH_2\ (4)\end{cases}$$

[1] Siehe d. Berichte 1883.

[2] Die Azogruppe in (1) gedacht.

aus der Nitroazobenzolparasulfosäure

$$C_{12}H_8N_2\begin{cases}SO_3H\ (4)\\NO_2\ (4)\end{cases}$$

wenn man mit siedendem Ammonhydrosulfid reducirt, hingegen Nitrohydrazobenzolparasulfosäure, wenn zuerst kalt und nachher heiss, oder kalt mit Zinnchlorür reducirt wird. Desshalb erscheint es von vornherein wahrscheinlich, dass hier durch Reduction mit siedendem Ammonhydrosulfid gleich die Seitenketten angegriffen werden, also bei völligem Abbau das noch nicht gekannte Diamido-azobenzol, ein Isomeres der Chrysoïdine, entsteht. Über letzteren Körper behalte ich mir vor nächstens zu berichten.

Mononitroazobenzol.

Das durch Nitrirung des Azobenzols von Gerhardt erhaltene Nitroazobenzol ist gelb, krystallisirt in tetragonalen, feinen Nadeln und schmilzt bei 137° C. unverändert — bei stärkerem Erhitzen sublimirt es und explodirt, wenn es über den Siedepunkt erhitzt wird. Die Schmelzpunkte sind leider weder in der Originalabhandlung noch sonst wo angegeben, so dass ein Vergleich nur nach dem äusseren Aussehen möglich ist. Das Präparat kann vom anhaftenden und der Darstellung herrührenden Öle nur schwer getrennt werden, am besten indem man es andauernd am Rückflusskühler mit Alkohol behandelt, wobei es sich (obzwar schwer löst, und dann umkrystallisirt. Die ausgeschiedenen Nadeln werden mit Äther behandelt und nochmals aus Alkohol krystallisirt.

Das Mononitroazobenzol löst sich sehr leicht in kaltem und heissem Aceton, Schwefelkohlenstoff, Chloroform — schwerer in Äther und Essigsäure (letztere nimmt aber so wie Eisessig beim Kochen dasselbe reichlich auf); Petroleumäther (Siedepunkt 46 bis 48° C.) löst nicht. Es gelang uns nicht grössere für krystallographische Bestimmung geeignete Krystalle zu erzielen. Reducirt man die alkoholische Lösung des Mononitroazobenzols, der etwas Aceton hinzugefügt wurde, in der Siedehitze mit Amonhydrosulfid, so wird die Lösung, ehe sich die Seitenkette völlig amidirt, violettroth und scheidet beim Erkalten und neutralisiren

mit Salzsäure einen schmutziggelben Niederschlag aus, der neben der Azobenzolnitrolsäure noch Schwefel enthält; letzterer geht theilweise in die Acetonlösung, aus welcher man den Niederschlag, behufs Reinigung krystallisirt. Durch öfteres Umkrystallisiren erhält man die Substanz in kleinen mikroskopischen, rothen Nadeln oder aus gesättigter, acetonischer Lösung in aus Nadeln bestehenden Warzen; unter dem Mikroskope zeigen sie beistehende Form und im polarisirten Licht lebhafte Farbenerscheinungen. Oxydationsmittel reagiren nur, wenn sie stark sind und in alkalischer Lösung wirken, sie regeneriren dann Mononitroazobenzol. Alkalien lösen die Säure tief blau auf, so wie die Nitronitrolsäure. Bei eingehender Reduction mit Amonhydrosulfid liefern sie ein Amidoazobenzol,[1] welches identisch sein sollte mit dem aus Diazoamidobenzol durch Umlagerung erhaltenen. Die Schmelzpunkte sind nicht gleich und behalten wir uns vor, später über dieses Reductionsproduct zu berichten. Bei völligem Abbau mit Zinn und Salzsäure liefert das Mononitroazobenzol Anilin und Paraphenylendiamin und ist unseres Wissens noch vor uns die Stellungsfrage nicht erörtert worden. Die Formel des Mononitroazobenzols ist somit

Fig. 3.

$$C_6H_5N = \underset{(1)}{N}.C_6H_4.\underset{(4)}{NO_2}$$

die der Azobenzolnitrolsäure

$$C_6H_5N = \underset{(1)}{N}.C_6H_4.\underset{(4)}{NOH}.$$[2]

Der Schmelzpunkt derselben ist 134° C. und behalten wir uns ausführlichere Angaben über dieselbe vor.

Wie oben erwähnt, scheidet sich neben dem Paranitroazobenzol und Dinitroazobenzol bei der Fällung mit Wasser (siehe Darstellung der Nitroderivate) ein rothes Öl ab, welches auch

[1] Dasselbe wies auch G. Schmidt nach. (Berl. 5. p. 480.)

[2] Auch hier ist die Formel möglicherweise zu verdoppeln

$$C_6H_5N - N.C_6H_4.N.OH$$
$$\quad\quad\quad

von uns untersucht wurde, da es mit Reductionsmitteln ebenfalls eine Nitrolsäure oder der Nitrolsäure nahestehende Verbindung liefert. Es bildet sich bei der Einwirkung von Salpetersäure auf Azobenzol in um so grösserer Menge, je höher die bei der Reaction herrschende Temperatur ist, und je mehr Salpetersäure verwendet wurde. Arbeitet man mit guter Kühlung und verwendet die 2—3fache Menge Salpetersäure (vom Azobenzol gerechnet), so scheidet sich sehr wenig Öl ab, bei 6facher Menge, wenn die Temperatur steigt, bilden sich bis circa 50% Man gewinnt das Öl aus den bei der Reinigung des Paranitroazobenzol ablaufenden ätherischen Mutterlaugen. Es ist in Äther, Chloroform, Alkohol, Aceton sehr leicht löslich. Amonhydrosulfid reducirt es zu einem breiigen Derivat, welches mit wässerigen Alkalien ebenfalls die für Nitrolsäuren charakteristische Blaufärbung gibt. Beim Erhitzen verpufft es mit bedeutender Heftigkeit und konnten desshalb bislang keine zuverlässigen analytischen Resultate erlangt werden. Bei vollständigem Abbau mit Zinn und Salzsäure liefert das Öl fast ausschliesslich Metaphenylendiamin, Anilin ist keines nachweisbar. Die von Zinn befreite Lösung erstarrt beim Einengen zu prächtigen Nadeln von Metaphenylendiaminhydrochlorat und wäre danach das Öl als ein Dinitroazobenzol zu betrachten, welches die beiden Nitrogruppen in der Metastellung besitzt.

Wenn die Analysen, die in kürzester Zeit von uns publicirt werden, den Abbau bestätigen, nämlich dass zwei Nitrogruppen vorhanden sind, so läge hier das zweite Metasubstitutionsproduct[1] eines Azokörpers vor, das durch directe Substitution erzeugt ist; bekanntlich bilden sich nur Parasubstitutionsproducte, wie Paranitroazobenzol, Parasulfosäure, Diparadisulfo- und Diparadinitroproducte und wird auch angenommen, dass die durch Umlagerung aus Diazokörpern resultirenden Azoderivate die Seitenkette in der Parastellung enthalten.

Wesentlich verschieden von den angeführten Nitroderivaten sind diejenigen, welche durch warme Salpetersäure entstehen. Trägt man gepulvertes Azobenzol in nicht gekühlte Salpetersäure

[1] Durch Krystallsäure auf Azobenzol entstehen Meta- und Para-Disulfosäuren.

(1·51) und zwar in die 5—6fache Menge ein, so steigt die Temperatur bis zum Siedepunkt der Säure und entwickeln sich unter Aufschäumen grosse Mengen von NO_2. Fällt man das Nitroderivat mit Wasser, so scheidet sich eine zähe rothe Masse aus, die viel von dem oben erwähnten Öl enthält. Durch Behandeln mit kaltem Aceton wird das Öl neben zwei anderen Nitroderivaten gelöst, ein im kalten Aceton schwer löslicher Körper, der im feinvertheilten Zustande mit dem Diparadinitroazobenzol grosse Ähnlichkeit besitzt, bleibt zurück. Dieser Körper, den wir mit *A* bezeichnen wollen, löst sich in heissem Aceton leicht und krystallisirt in seideglänzenden schwefelgelben Nadeln oder asbestartigen Massen, aus Alkohol in feinen kurzen Nadeln (Durchwachsungszwillinge) und zeigt einen Schmelzpunkt von 180° C. (Dinitroazob.=206° C.) Somit ist das Product auch vom Petriew'schen Trinitroazobenzol (Schmp. 112° C.), wie auch vom Trinitroazoxybenzol (Schmp. 152° C.), welches beim Kochen des Azobenzols mit Salpeter und Schwefelsäure entsteht, verschieden. Auch dieses Derivat giebt reservirt abgebaut, die den Nitrolsäuren der Azoreihe charakteristische Blaufärbung mit Alkalien.

Schliesslich sei bemerkt, dass wir behufs Studium dieser Reaction auch die Nitroderivate des Azotoluols und zwar des bei 144° C. schmelzenden Paraazotoluols untersucht haben; dieselben liefern Reductionsproducte, die mit Alkalien purpurviolett gefärbt werden. Übrigens zeigen auch Dinitrobenzole mit schwachen Reductionsmitteln (alkoholische Kalilösung oder acetonische Kalilösung) sehr charakteristische Farbenerscheinungen, nur verschwinden dieselben bald, da die intermediären Producte eben löslich sind und weiter zu Nitranilinen sich abbauen. Wir behalten uns vor, unsere in dieser Richtung angestellten Versuche sobald als thunlich zu veröffentlichen.

Reichenberg, den 18. Jänner 1885.

Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze.

Von Dr. **Karl Exner.**

Durch ein sinnreiches Experiment hat Herr A. Cornu darauf aufmerksam gemacht, dass in der Richtung der Axe des Quarzes das Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes gleich ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles senkrecht zur Axe.[1]

Dieses, von Cornu erkannte Gesetz ist in einem allgemeineren Gesetze enthalten, welches sich aus einer von V. v. Lang theoretisch abgeleiteten und experimentell verificirten Formel herauslesen lässt,[2] ebenso wie aus der analogen, sich aus Cauchy's Theorie ergebenden Formel, welche ebenfalls von V. v. Lang experimentell verificirt ist.

Die Formel, wie sie Cauchy gegeben hat, ist:

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\rho\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2\sin^4\rho+\frac{\cos^2\rho}{\chi^4}} \quad (1)$$

n	Brechungsquotient einer ebenen Welle
ω	Ordentlicher Brechungsquotient
ε	Ausserordentlicher Brechungsquotient
ρ	Winkel der Wellennormale mit der Axe
χ	Constante der Rotationspolarisation

Denkt man den Krystall des Rotationsvermögens beraubt, oder setzt man $\chi=\infty$, so wird:

---

[1] A. Cornu. C. R. XCII. 1882.

[2] V. v. Lang. Wien. Akad. Ber. LX. 1869 — LXXV. 1877.

$$\frac{1}{n'^2} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\rho \pm \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\rho,$$

also:

$$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{\omega^2}\cos^2\rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\rho, \qquad (2)$$

und es ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1'^2} + \frac{1}{n_2'^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\cos^2\rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\rho\right). \qquad (3)$$

$\left.\begin{matrix} n_1' \\ n_2' \end{matrix}\right\}$ Die der Richtung ρ entsprechenden Brechungsquotienten des Krystalls ohne Rotationsvermögen.

Andererseits erhält man aus der Gleichung (1):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\cos^2\rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\sin^2\rho\right), \qquad (4)$$

und man hat aus (3) und (4):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1'^2} + \frac{1}{n_2'^2}\right)$$

$\left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\}$ Die der Richtung ρ entsprechenden Brechungsquotienten des Krystalls,

oder

$$\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2}(v_1'^2 + v_2'^2) \qquad (5)$$

$\left.\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\right\}$ Lichtgeschwindigkeiten in irgend einer Richtung

$\left.\begin{matrix} v_1' \\ v_2' \end{matrix}\right\}$ Lichtgeschwindigkeiten in derselben Richtung ohne Rotationspolarisation.

Das heisst: Das arithmetische Mittel der Quadrate der beiden, irgend einer Richtung entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist gleich dem arithmetischen Mittel der Quadrate jener

Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche dem Krystalle in derselben Richtung ohne Rotationspolarisation zukämen.

Nach einer geistreichen Bemerkung des Herrn Cornu muss nun dieser Satz, wenn er für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten gilt, auch für jede Function dieser Quadrate, und somit auch für die einfachen Lichtgeschwindigkeiten gelten. Es folgt dies aus der Kleinheit der Differenzen der Grössen v_1, v_2, v_1', v_2'. Es ist also auch:

$$\frac{1}{2}(v_1+v_2)=\frac{1}{2}(v_1'+v_2'), \tag{6}$$

und das heisst: Für irgend eine Richtung ist das arithmetische Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich dem arithmetischen Mittel jener Geschwindigkeiten, welche derselben Richtung ohne Rotationspolarisation entsprechen würden.[1] Insbesondere ergibt sich für die Richtung der Axe:

$$\frac{1}{2}(v_1+v_2)=v \tag{7}$$

| v | Ordentliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit |

und dies ist das Gesetz Cornu's.

Es ist nicht ohne Interesse, die Gleichung (6) mit den Messungsresultaten V. v. Lang's zu vergleichen. Dieser erhielt:

ρ	n_1	n_2	n_2'	n_1'
0°27·0′	1·5441887	1·5442605	1·54423	1·5442243
1 54·7	1925	2649	23	
2 48·4	1942	2766	25	
4 40·0	2043	3043	28	
5 4·8	2088	3009	29	

[1] Ein analoger Satz für die Lichtfortpflanzung im magnetischen Felde wurde von Cornu (l. c.) aufgestellt und begründet.

wo ich jedoch die Zahlen der vierten Verticalreihe nach Formel (2) hinzugerechnet habe. Beschränkt man sich auch bei den übrigen Zahlen auf fünf Decimalstellen und lässt bei sämmtlichen Zahlen die übereinstimmenden vier ersten Ziffern hinweg, so gelangt man zu dem folgenden Tableau:

ρ	n_1	n_2	$\frac{1}{2}(n_1+n_2)$	$\frac{1}{2}(n_1'+n_2')$	n_2'	n_1'
0°27·0′	19	26	$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	23	22
1 54·7	19	26	$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	23	22
2 48·4	19	28	$23\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	25	22
4 40·0	20	30	25	25	28	22
5 4·8	21	30	$25\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$	29	22

Diesem Tableau ist die Gleichung

$$\frac{1}{2}(n_1+n_2)=\frac{1}{2}(n_1'+n_2') \qquad (8)$$

zu entnehmen, und diese Gleichung ist nach dem Satze Cornu's, dass an die Stelle der Geschwindigkeiten beliebige Functionen der Geschwindigkeiten gesetzt werden können, identisch mit (6).

Die nachfolgende Tabelle V. v. Lang's enthält die nach Cauchy's Formel unter Benutzung der Messungsresultate berechneten Brechungsquotienten und zwar auch für den Fall, dass $\chi=\infty$ gesetzt wird, wodurch das charakteristische der Circularpolarisation verschwindet.

ρ	n_1	n_2	n_2'	n_1'
0°	1·5441884	1·5442602	1·5442243	1·5442243
5	2093	43081	42929	
10	2200	45009	44965	
15	2225	48309	48290	
20	2234	52816	52806	
25	2242	58382	58380	

Es ist selbstverständlich, dass die Zahlen dieser Tabelle dem Satze (5) entsprechen müssen, es können jedoch diese Zahlen zur Prüfung der Genauigkeit jenes anderen Satzes dienen, welcher gestattet, die Geschwindigkeiten mit irgend welchen Functionen der Geschwindigkeiten zu vertauschen. Man erhält in der That unter Hinweglassung der übereinstimmenden drei ersten Ziffern:

ρ	n_1	n_2	$\frac{1}{2}(n_1+n_2)$	$\frac{1}{2}(n_1'+n_2')$	n_2'	n_1'
0°	41884	42602	42243	42243	42243	42243
5	42093	43081	42587	42586	42929	
10	42200	45009	43604	43604	44965	
15	42225	48309	45267	45267	48290	
20	42234	52816	47525	47525	52806	
25	42242	58382	50312	50312	58380	

in sehr vollkommener Übereinstimmung mit Satz (8).

Über zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen.

Von Dr. **Oskar Simony**,
a. o. Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

Einleitende Betrachtungen.

Bekanntlich schliesst Gauss die Anzeige seiner Abhandlung: „Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda“ nach einer kurzen Darlegung seiner Auffassungsweise der sogenannten imaginären Grössen mit der Bemerkung,[1] er behalte sich vor, in einer künftigen Abhandlung auch die Frage zu beantworten, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können.“

Dieses Versprechen blieb leider unerfüllt, so dass jeder Interpretation jener Bemerkung eine gewisse Willkür anhaftet; wohl aber dürfte man der Wahrheit durch die Annahme am nächsten kommen, Gauss habe in der citirten Stelle seine Einsicht angedeutet, dass man solche complexe Zahlen, welche Punkten des Raumes beziehungsweise einer höheren Mannigfaltigkeit zugeordnet werden, mit einander nicht mehr operativ verknüpfen könne, ohne gewisse, von ihm für wesentlich erachtete Eigenschaften algebraischer Grundoperationen aufzugeben.

[1] S. h. die Gesammtausgabe seiner Werke, II. Band, pag. 178.

So lassen sich z. B., wie H. Hankel zuerst nachgewiesen hat,[1] ohne Schwierigkeit höhere complexe Zahlen bilden, deren Einheitsproducte lineare Functionen der ursprünglichen Einheiten sind, und für deren Multiplication das distributive Princip giltig bleibt. Aber anderseits erhält das Product je zweier solcher Zahlen nunmehr die Eigenschaft, bedingungsweise zu verschwinden, ohne dass einer der beiden Factoren gleich Null wird.

Sobald man also die Multiplication als eine für alle Grössenarten distributiv bleibende Rechnungsoperation definirt und die Eigenschaft des Productes zweier gewöhnlicher complexer Zahlen, lediglich durch das Verschwinden eines, respective beider Factoren der Null gleich zu werden, als eine wesentliche Eigenschaft jedes Productes betrachtet, kann in der That weder eine dreifach ausgedehnte noch eine höhere Mannigfaltigkeit weitere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern.

Dass dieser Schluss an und für sich richtig ist, kann nicht bezweifelt werden, jedoch sind dessen Prämissen keineswegs logisch begründet.

Da nämlich jede mehrfach complexe Zahl die gewöhnliche complexe Zahl als Specialfall enthält, lässt sich a priori überhaupt nicht entscheiden, ob beispielsweise gewisse Eigenschaften des Productes zweier gewöhnlicher complexer Zahlen der Operation des Multiplicirens als solcher oder nur in Bezug auf die mit einander verknüpften, speciellen Zahlenformen zugehören. Es liegt demnach vom logischen Standpunkte kein Hinderniss vor, die Definition einer Rechnungsoperation für höhere complexe Zahlen entsprechend zu erweitern, wobei die subjective Willkür zunächst nur insoferne eingeschränkt wird, als alle jene Erweiterungen des betreffenden Operationsbegriffes ausgeschlossen bleiben, welche bei

[1] S. h. dessen 1867 zu Leipzig erschienenes Werk: „Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen", p. 106—108 unter Hinzuziehung der specielleren Betrachtungen L. Königsberger's in dessen 1874 zu Leipzig erschienenen „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen", p. 10—12.

einer Reduction jener höheren complexen Zahlen auf gewöhnliche complexe Zahlen den für die letzteren geltenden Rechnungsregeln zuwiderlaufen.

Auf diese Art erscheint der freien Production selbst bei Definitionen elementarer Verknüpfungsarten höherer complexer Zahlen ein weites Feld eröffnet, und sind daher auch seit der 1806 durch Argand[1] begründeten, geometrischen Interpretation der gewöhnlichen complexen Zahlen mannigfaltige Systeme von höheren complexen Zahlen ersonnen worden, unter welchen bisher in theoretischer Hinsicht namentlich die höheren complexen Zahlensysteme H. Grassmann's,[2] in praktischer Hinsicht dagegen die „Quaternionen" von R. Hamilton[3] einen hervorragenden Einfluss auf die Entwicklung der Wissenschaft genommen haben.

Was nun speciell die in der vorliegenden Arbeit aufgestellten höheren complexen Zahlen anbelangt, so erheischt deren präcise Formulirung zunächst die Einführung einer $(n+1)$-fach ausgedehnten — im Riemann'schen Sinne — ebenen Mannigfaltigkeit, deren analytisch-geometrische Characteristik durch folgende Sätze[4] gegeben ist:

[1] S. h. dessen in dem angegebenen Jahre zu Paris erschienene Schrift „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques". — Die Darstellung des Complexen in der Ebene durch Gauss erfolgte bekanntlich erst im Jahre 1831, so dass ihm in dieser Hinsicht eine Priorität in keiner Weise zukommt.

[2] S. h. sein 1862 veröffentlichtes Werk: „Die Ausdehnungslehre", (Berlin, Verlag von Fr. Enslin), dessen erster Theil unter dem besonderen Titel: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik" — bereits 1844 zu Leipzig (im Verlage von O. Wigand) erschienen war, aber in Folge seiner mehr philosophischen als mathematischen Form nur eine geringe Verbreitung gefunden hatte.

[3] Zur Bequemlichkeit des Lesers beziehe ich mich bei allen im Folgenden vorkommenden Bemerkungen über Quaternionen auf die vortreffliche, von P. Glan gelieferte deutsche Übersetzung von Hamilton's: „Elements of Quaternions" (Leipzig, 1881, 82 u. 84).

[4] Dieselben bilden die consequente Verallgemeinerung jener vier Fundamentalsätze, durch welche ich in meiner Brochure: Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen" und verwandter merkwürdiger Probleme (dritte Auflage, p. 35, 36) — speciell eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von verschwindendem Krümmungsmasse characterisirt habe.

(I). Jeder Punkt der erwähnten Mannigfaltigkeit lässt sich als Durchschnittspunkt von $(n+1)$ einander in demselben rechtwinklig durchschneidenden geraden Linien auffassen.

(II). Wählt man $(n+1)$ derartige Gerade: J_0J_0', J_1J_1', J_2J_2',... J_nJ_n' zu Coordinatenaxen, so ist die Lage jedes Punktes durch je $(n+1)$ auf die ersteren eindeutig beziehbare Coordinaten vollständig bestimmt.

(III). Sind speciell $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$ die Werthe, welche die Coordinaten zweier beliebig angenommenen Punkte: M_1, M_2, deren gegenseitige Entfernung mit $\bar{r}$ bezeichnet werden mag, besitzen, so besteht für alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ denkbaren Specialisirungen von $\bar{r}$ die Gleichung:

$$(a)\ldots \bar{r}^2 = (a_0-b_0)^2+(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2.$$

(IV). Sind $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ die Winkel, unter welchen zwei sich in irgend einem Punkte dieser Mannigfaltigkeit durchschneidende gerade Linien gegen die $(n+1)$ Coordinatenaxen: J_0J_0', J_1J_1', $J_2J_2'\ldots J_nJ_n'$ geneigt sind, so gilt für den Cosinus des gegenseitigen Neigungswinkels θ beider Geraden stets die Relation:

$$(b)\ldots \cos\theta = \cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha_1\cos\beta_1+ \\ +\cos\alpha_2\cos\beta_2+\ldots+\cos\alpha_n\cos\beta_n.$$

Wir denken uns nunmehr jedem Punkte dieser Mannigfaltigkeit eine n-fach complexe Zahl derart zugeordnet, dass beispielsweise den Punkten M_1, M_2 das Zahlenpaar:

$$Z_1 = a_0+a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_ni_n,$$
$$Z_2 = b_0+b_1i_1+b_2i_2+\ldots+b_ni_n$$

correspondirt, wobei wir $i_1, i_2\ldots i_n$ vorläufig nur als Unterscheidungszeichen[1] für die $(n+1)$ zu einander ortho-

[1] Ich bediene mich der Symbole: $i_1, i_2, \ldots i_n$ in Hinblick auf die seit Gauss allgemein üblich gewordene Bezeichnungsweise der „imaginären Einheit" mit i, welcher Buchstabe übrigens bereits von Euler in diesem Sinne verwendet worden ist. — Den ersten Anlass hiezu bot ihm die Lösung des Problems: „Proposita formula differentiali $\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$, eius integrale per

gonalen Richtungen betrachten, in welchen die Coordinaten: a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2; ... a_n, b_n auf eine und dieselbe Längeneinheit beziehbar sind.

Zwei derartige n-fach complexe Zahlen sind dann einander gleich, wenn sie einen und denselben Punkt in jener Mannigfaltigkeit bestimmen, d. h. also in Hinblick auf (II), wenn ihre Coëfficienten die $(n+1)$ Gleichungen:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots a_n = b_n$$

erfüllen.[1] — Es mögen ferner die beiden positiv zu nehmenden Wurzelgrössen:

$$\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},\quad \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2},$$

welche kraft des dritten Satzes zugleich die Entfernungen der Punkte M_1, M_2, vom Ursprunge: O des gewählten Coordinatensystems präcisiren, als die Moduli:[2] r_1, r_2 von Z_1, Z_2 bezeichnet

---

logarithmos et arcus circulares investigare", welche er (s. den 1794 zu Petersburg erschienenen IV. Band seines grossartigen Werkes: Institutiones calculi integralis, p. 184) mit folgenden Worten einleitet: „Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$".

[1] Die correspondirende Grassmann'sche Definition (Ausdehnungslehre, p. 16) lautet: „Zwei Grössen eines Gebietes n^{ter} Stufe sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denselben Einheiten: e_1, $e_2 \ldots e_n$ gehörigen Ableitungszahlen einander gleich sind, das heisst die Gleichung:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

wird ersetzt durch die n-Gleichungen: $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots \alpha_n = \beta_n$".

[2] Die Bezeichnung: „Modulus" rührt von Argand her, der dieselbe zuerst 1814 am Schlusse einer kurzen Abhandlung: „Reflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analise" (Gergonne's Annalen V. Bd., p. 208) gebraucht und hiebei auch schon die beiden wichtigsten Modulsätze kurz erwähnt hat. — Die diesbezügliche interessante Stelle der citirten Abhandlung lautet:

„Il semble qu'il faudrait rapprocher l'expression des imaginaires de la notation des lignes dirigées, en écrivant

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right) \text{ pour } a+b\sqrt{-1}.$$

und für die Summe der Producte der gleichnamigen Zahlencoëfficienten:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = m$$

in Zukunft der Ausdruck: „Deviationsproduct des Zahlenpaares“ gebraucht werden. Die erstere Nominaldefinition bedarf wohl keines weiteren Commentares; die letztere findet darin ihre Begründung, dass m — unter $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ nunmehr die Winkel von r_1, r_2, mit den Halbaxen OJ_0, OJ_1, OJ_2,... OJ_n verstanden — gemäss den, mittelbar durch (IV) bedingten Gleichungen:

$$(c)\ldots\begin{cases} a_0 = r_1 \cos\alpha,\ a_1 = r_1 \cos\alpha_1,\ a_2 = r_1 \cos\alpha_2, \ldots a_n = r_1 \cos\alpha_n \\ b_0 = r_2 \cos\beta,\ b_1 = r_2 \cos\beta_1,\ b_2 = r_2 \cos\beta_2, \ldots b_n = r_2 \cos\beta_n \end{cases}$$

in das Product: $r_1 r_2 \cos\theta$ transformirt werden kann. Bezüglich dieses Productes selbst ist noch hervorzuheben, dass dessen erster und zweiter Factor je $(n+1)$, hingegen sein dritter Factor $2n$ von einander unabhängige Grössen enthält, indem die $2(n+1)$ Winkel: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ zufolge den Relationen (c) und den Bedeutungen von r_1, r_2 stets die beiden Beziehungen:

$$(b)\ldots\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \ldots + \cos^2\beta_n = 1 \end{cases}$$

erfüllen müssen.

Nachdem so der im Folgenden verwendete Begriff einer n-fach complexen Zahl an zwei willkürlichen Specialisirungen: Z_1, Z_2 erläutert worden ist, muss jetzt auch der Begriff: „Rechnungsoperation“ in seiner Anwendung auf derartige Zahlen entsprechend definirt werden.

Recurriren wir hiebei von den in Betracht gezogenen Zahlen wieder auf die ihnen correspondirenden Punkte jener $(n+1)$-fach

$\sqrt{a^2+b^2}$ pourrait être appelé le module de $a+b\sqrt{-1}$, et représenterait la grandeur absolue de la ligne $a+b\sqrt{-1}$, tandis que l'autre facteur, dont le module est l'unité, en représenterait la direction. On prouverait seulement 1° que le module de la somme de plusieurs quantités n'est pas plus grand que la somme des modules de ces quantités; 2° que le module du produit de plusieurs quantités est égal au produit des modules de ces quantités.“

ausgedehnten Mannigfaltigkeit, so ergibt sich für den fraglichen Begriff die nachstehende einfache und allgemeine Fassung: Mit einer oder mehreren n-fach complexen Zahlen eine bestimmte Rechnungsoperation vornehmen, heisst, einem oder mehreren Punkten einen neuen Punkt beziehungsweise ein neues System von Punkten derselben Mannigfaltigkeit nach bestimmten Gesetzen zuordnen. Im ersteren Falle ist die betreffende Rechnungsoperation eindeutig, im letzteren mehrdeutig beziehungsweise unendlich vieldeutig, je nachdem das zugeordnete Punktsystem eine endliche oder eine unendlich grosse Anzahl von Punkten in sich begreift.

Da nun jedem solchen Punkte vice versa wieder eine n-fach complexe Zahl entspricht, führt auch jede, in dem eben präcisirten Sinne aufgefasste Rechnungsoperation mit n-fach complexen Zahlen nothwendig auf Zahlen von derselben allgemeinen Form, d. h. das betreffende Zahlensystem ist insoferne als ein begrenztes, complexes Zahlensystem zu bezeichnen.

An diese Auseinandersetzungen knüpft sich naturgemäss die weitere Frage, in welcher Form die Definition irgend einer Rechnungsoperation ursprünglich erscheinen wird.

Um hierüber einen allgemeinen Aufschluss zu erhalten, genügt die Überlegung, dass, sobald man zwei Punktsysteme in einer und derselben Mannigfaltigkeit einander nach bestimmten Gesetzen zuordnet, hiedurch zunächst die Coordinaten der betreffenden Punkte in ein bestimmtes, von Fall zu Fall mittelst Gleichungen ausdrückbares Abhängigkeitsverhältniss von einander treten. Da nun jene Coordinaten zugleich die Coëfficienten der mit einander verknüpften n-fach complexen Zahlen vorstellen, folgt hieraus direct, dass jede Rechnungsoperation ursprünglich durch ein System von Gleichungen zu characterisiren ist, welche die Coëfficienten der gegebenen Zahlen zu jenen des Resultates der Operation in Beziehung bringen.

Hiernach treten die Unterscheidungszeichen der einzelnen Coordinatenrichtungen: $i_1, i_2, \ldots i_n$ überhaupt nie in die Rechnung ein, wohl aber kann es unter Umständen in rein formaler Hinsicht Nutzen bringen, wenn man ein, durch eine bestimmte Rechnungsoperation gewonnenes Resultat nachträglich

so interpretirt, als ob die operativ verknüpften, n-fach complexen Zahlen reelle algebraische Ausdrücke gewesen wären, mithin gewisse Functionen ihrer imaginären Bestandtheile bei Ausführung jener Rechnungsoperation die Rolle reeller Grössen gespielt hätten.

Ausserdem wird ersichtlich, dass die Definitionsgleichungen sämmtlicher Rechnungsoperationen die Coëfficienten ihrer Resultate für alle denkbaren Werthe der gegebenen Zahlencoëfficienten als reelle Grössen bestimmen müssen, denn jede andere Bestimmungsweise würde, da die fraglichen Coëfficienten zugleich Coordinaten von Punkten vorstellen, ihrer geometrischen Bedeutung zuwiderlaufen.

Aber selbst die Vereinigung dieser Forderung mit der a priori gegebenen Bedingung, dass jede Definition einer Rechnungsoperation mit n-fach complexen Zahlen im Specialfalle: $n = 1$ die bekannten Eigenschaften derselben Rechnungsoperation in ihrer Anwendung auf einfach complexe Zahlen zu liefern hat, ermöglicht keine ausreichende Beschränkung jener Formen, in welchen speciell die vier algebraischen Grundoperationen für n-fach complexe Zahlen generalisirt werden können.

Es lassen sich vielmehr bezüglich dieser Operationen noch zwei weitere allgemeine Forderungen erfüllen, von welchen die erste: Die Summe und das Product zweier beliebiger n-fach complexer Zahlen müssen commutativ bleiben — sich gewissermassen von selbst aufdrängt, während die zweite Forderung erst durch die nachstehenden einfachen Überlegungen begründet wird:

Sind allgemein Z_1, Z_2 die beiden Zahlen, welche durch irgend eine der vier verallgemeinerten algebraischen Grundoperationen verknüpft werden sollen, so bleiben die Grössen: a_0, b_0, m, r_1, r_2, sämmtlichen complexen Specialisirungen von Z_1, Z_2 zugeordnet, während sich die Coëfficienten: a_1, b_1 resp. a_2, b_2; $\ldots a_n$, b_n speciell auf i_1, resp. $i_2, \ldots i_n$ beziehen. In Hinblick hierauf liegt also die Forderung nahe, die betreffende Rechnungsoperation derart zu definiren, dass auch im Resultate derselben die Grössen: a_1, b_1 lediglich in m, r_1, r_2 und dem Coëfficienten von i_1, ferner a_2, b_2 ausschliesslich

in m, r_1, r_2 und dem Coëfficienten von $i_2, \ldots a_n, b_n$ nur in m, r_1, r_2 und dem Coëfficienten von i_n auftreten, während a_0, b_0, m, r_1, r_2 an kein einziges specielles Unterscheidungszeichen gebunden sind, also möglicher Weise in allen Coëfficienten des Resultates vorkommen. Auf diese Art besitzt das letztere, sobald die erwähnte Forderung befriedigt wird, allgemein die Form:

$$f_0(a_0, b_0, m, r_1, r_2) + f_1(a_0, a_1, b_0, b_1, m, r_1, r_2) i_1 + \\ + f_2(a_0, a_2, b_0, b_2, m, r_1, r_2) i_2 + \ldots + f_n(a_0, a_n, b_0, b_n, m, r_1, r_2) i_n,$$

wobei $f_0, f_1, f_2, \ldots f_n$ vorläufig unbestimmt gelassene Functionen der innerhalb der Parenthesen stehenden Argumente repräsentiren.

Denken wir uns jetzt zwei $(n+1)$-fach complexe Zahlen:

$$a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_{n+1} i_{n+1}, \quad b_0 + b_1 i_1 + \ldots + b_{n+1} i_{n+1}$$

mit den Modulis:

$$r_1 = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2}, \quad r_2 = \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_{n+1}^2}$$

und dem Deviationsproducte:

$$m = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_{n+1} b_{n+1}$$

derselben Rechnungsoperation unterworfen, so werden die Functionen: $f_0, f_1, f_2, \ldots f_n$ hiebei wohl ihre Werthe aber weder ihre Formen[1] noch die Anzahl ihrer selbst-

---

[1] Wird die formale Übereinstimmung gleich signirter imaginärer Bestandtheile in den für $n = 2, 3, 4, \ldots$ bestehenden Specialisirungen eines und desselben Productes, resp. Quotienten zweier n-fach complexer Zahlen nicht als ein wesentliches Merkmal jeder universellen Verallgemeinerung des Multiplicirens, beziehungsweise des Dividirens aufgefasst, so lassen sich die genannten Grundoperationen auch derart generalisiren, dass — unter n eine beliebige endliche, reelle Zahl gedacht — jeder Coëfficient des jeweiligen n-fach complexen Werthes von:

$$Z^n = (x + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \ldots + x_n i_n)^n$$

ein particuläres Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 W}{\partial x_n^2} = 0$$

ständigen Argumente verändern, indem ja die beiden neu hinzugekommenen Coëfficienten: a_{n+1}, b_{n+1} im Resultate erst bei i_{n+1} als selbstständige Argumente auftreten können.

Es wird daher jede Verallgemeinerung einer Rechnungsoperation, welche der vierten Forderung genügt, insoferne universell zu nennen sein, als ihre Giltigkeit sich dann gemäss unseren letzten Betrachtungen auf alle complexen Zahlen erstreckt, welchen Punkte einer Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl correspondiren. Dagegen erschiene es unzulässig, von universellen Rechnungsoperationen schlechtweg zu sprechen, weil solche complexe Zahlen, deren geometrische Interpretation Mannigfaltigkeiten von unendlich vielen Dimensionen erfordern würde, im Allgemeinen auch keine endlichen Moduli und Deviationsproducte besitzen und in Folge dessen nur bedingungsweise eine operative Verknüpfung gestatten.

Die zuletzt entwickelten Gesichtspunkte wurden bisher noch nie aufgestellt, geschweige denn in irgend einem Zahlensysteme realisirt, so dass die in dieser Arbeit mitgetheilten Resultate in sachlicher und zumeist auch in formaler Hinsicht vollständig neu sind. Bei ihrer Ableitung war für mich vor Allem die Forderung möglichster Einfachheit massgebend, und habe ich demgemäss meine Auseinandersetzungen gemeiniglich auf die beiden einfachsten Specialisirungen von n, nämlich $n = 1, 2$ gegründet, zumal dieselben im Gegensatze zu sämmtlichen übrigen Specialisirungen von n auch der geometrischen Anschauung zugänglich bleiben. Um ferner nicht gegen die übliche Bezeichnungsweise constanter Coordinaten in der Ebene und im Raume zu verstossen, sind speciell für einfach und zweifach[1] complexe Zahlen die Darstellungsformen:

$$a+bi_1 \text{ respective: } a+bi_1+ci_2$$

bildet. Die so gearteten Verallgemeinerungen algebraischer Grundoperationen sind jedoch bei ihrer grossen Complication nur insoferne interessant, als sie neue, physikalisch wichtige Lösungen der bekannten Potentialgleichung $\nabla^2 V = 0$ vermitteln, wonach es angemessen erscheint, erst bei Publication jener Lösungen auch deren analytische Grundlagen kurz zu erörtern.

[1] Statt des Ausdruckes: „zweifach complex" mag in der Folge die besser klingende Bezeichnung: „bicomplex" gebraucht werden.

gewählt worden, wonach man z. B. den drei Zahlen:

$$Z_1 = a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2, \quad Z_2 = a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2, \quad Z_3 = a_3 + b_3 i_1 + c_3 i_2$$

die Ausdrücke:

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}, \quad r_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}$$

$$m = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2, \; m_1 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3, \; m_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3$$

als Moduli und Deviationsproducte zuzuordnen hat.

Was schliesslich die mit der Aufstellung der einzelnen Formeln verbundenen algebraischen Rechnungen anbelangt, so erfordert deren rasche und bequeme Durchführung die Kenntniss gewisser identischer Gleichungen, welche einerseits die dem Ausdrucke:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = g$$

entspringenden Unterdeterminanten:

$$\begin{aligned} h &= b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad k = a_2 c_1 - a_1 c_2, \quad l = a_1 b_2 - a_2 b_1; \\ h_1 &= b_1 c_3 - b_3 c_1, \quad k_1 = a_3 c_1 - a_1 c_3, \quad l_1 = a_1 b_3 - a_3 b_1; \\ h_2 &= b_2 c_3 - b_3 c_2, \quad k_2 = a_3 c_2 - a_2 c_3, \quad l_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned}$$

anderseits die den letzteren nahe verwandten Grössen:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2, \quad \bar{y} = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad \bar{z} = a_1 c_2 + a_2 c_1; \\ \bar{x}' &= a_1 a_3 - b_1 b_3 - c_1 c_3, \quad \bar{y}' = a_1 b_3 + a_3 b_1, \quad \bar{z}' = a_1 c_3 + a_3 c_1; \\ \bar{x}'' &= a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3, \quad \bar{y}'' = a_2 b_3 + a_2 b_2, \quad \bar{z}'' = a_2 c_3 + a_3 c_2 \end{aligned}$$

betreffen und ausser den bereits angegebenen Hilfsfunctionen r_1, r_2, r_3; m, m_1, m_2 und g noch die folgenden:

$$\begin{aligned} -a_3 m + a_2 m_1 + a_1 m_2 &= g_1, \quad a_3 m - a_2 m_1 + a_1 m_2 = g_2 \\ a_3 m + a_2 m_1 - a_1 m_2 &= g_3 \end{aligned}$$

enthalten. Diese Gleichungen zerfallen in drei natürliche Gruppen, deren Charakteristik und weitere Gliederung dem nachstehenden Schema zu entnehmen ist

Erste Gruppe

enthaltend Identitäten für h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2.

(A)... Binomische Identitäten für Producte von h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 in a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3:

$$b_1h - a_1k = -c_1m + c_2r_1^2,\quad c_1h - a_1l = b_1m - b_2r_1^2,$$
$$c_1k - b_1l = -a_1m + a_2r_1^2;$$
$$b_2h - a_2k = c_2m - c_1r_2^2,\quad c_2h - a_2l = -b_2m + b_1r_2^2,$$
$$c_2k - b_2l = a_2m - a_1r_2^2;$$
$$b_3h - a_3k = c_2m_1 - c_1m_2,\quad c_3h - a_3l = -b_2m_1 + b_1m_2,$$
$$c_3k - b_3l = a_2m_1 - a_1m_2.$$

$$b_1h_1 - a_1k_1 = -c_1m_1 + c_3r_1^2,\quad c_1h_1 - a_1l_1 = b_1m_1 - b_3r_1^2,$$
$$c_1k_1 - b_1l_1 = -a_1m_1 + a_3r_1^2;$$
$$b_2h_1 - a_2k_1 = c_3m - c_1m_2,\quad c_2h_1 - a_2l_1 = -b_3m + b_1m_2,$$
$$c_2k_1 - b_2l_1 = a_3m - a_1m_2;$$
$$b_3h_1 - a_3k_1 = c_3m_1 - c_1r_3^2,\quad c_3h_1 - a_3l_1 = -b_3m_1 + b_1r_3^2,$$
$$c_3k_1 - b_3l_1 = a_3m_1 - a_1r_3^2.$$

$$b_1h_2 - a_1k_2 = c_3m - c_2m_1,\quad c_1h_2 - a_1l_2 = -b_3m + b_2m_1,$$
$$c_1k_2 - b_1l_2 = a_3m - a_2m_1;$$
$$b_2h_2 - a_2k_2 = -c_2m_2 + c_3r_2^2,\quad c_2h_2 - a_2l_2 = b_2m_2 - b_3r_2^2,$$
$$c_2k_2 - b_2l_2 = -a_2m_2 + a_3r_2^2;$$
$$b_3h_2 - a_3k_2 = c_3m_2 - c_2r_3^2,\quad c_3h_2 - a_3l_2 = -b_3m_2 + b_2r_3^2,$$
$$c_3k_2 - b_3l_2 = a_3m_2 - a_2r_3^2.$$

(B)... Trinomische Identitäten für Producte von h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 in a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3:

$$a_1h + b_1k + c_1l = 0,\quad a_2h + b_2k + c_2l = 0,$$
$$a_3h + b_3k + c_3l = g;$$
$$a_1h_1 + b_1k_1 + c_1l_1 = 0,\quad a_3h_1 + b_3k_1 + c_3l_1 = 0,$$
$$a_2h_1 + b_2k_1 + c_2l_1 = -g;$$

$$a_2h_2+b_2k_2+c_2l_2=0,\ a_3h_2+b_3k_2+c_3l_2=0,$$
$$a_1h_2+b_1k_2+c_1l_2=g.$$

(𝔖)... Identitäten für die Quadrate: h^2, k^2, l^2; h_1^2, k_1^2, l_1^2; h_2^2, k_2^2, l_2^2:

$$h^2+k^2+l^2=r_1^2r_2^2-m^2,\ h_1^2+k_1^2+l_1^2=r_1^2r_3^2-m_1^2,$$
$$h_2^2+k_2^2+l_2^2=r_2^2r_3^2-m_2^2.$$

(𝔗)... Identitäten für die Producte: hh_1, kk_1, ll_1; hh_2, kk_2, ll_2; h_1h_2, k_1k_2, l_1l_2:

$$hh_1+kk_1+ll_1=-mm_1+m_2r_1^2,\ hh_2+kk_2+ll_2=mm_2-m_1r_2^2,$$
$$h_1h_2+k_1k_2+l_1l_2=-m_1m_2+mr_3^2.$$

Zweite Gruppe.

enthaltend Identitäten für $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$.

(𝔈)... Binomische Identitäten für Producte von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$ in a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3:

$$b_1\bar{x}-a_1\bar{y}=-c_1h-b_2r_1^2,\ c_1\bar{x}-a_1\bar{z}=b_1h-c_2r_1^2,$$
$$c_1\bar{y}-b_1\bar{z}=-a_1h;$$

$$b_2\bar{x}-a_2\bar{y}=c_2h-b_1r_2^2,\ c_2\bar{x}-a_2\bar{z}=-b_2h-c_1r_2^2,$$
$$c_2\bar{y}-b_2\bar{z}=a_2h;$$

$$b_3\bar{x}-a_3\bar{y}=a_2l_1+a_1l_2-b_3m,\ c_3\bar{x}-a_3\bar{z}=-a_2k_1-a_1k_2-c_3m,$$
$$c_3\bar{y}-b_3\bar{z}=a_2h_1+a_1h_2.$$

$$b_1\bar{x}'-a_1\bar{y}'=-c_1h_1-b_3r_1^2,\ c_1\bar{x}'-a_1\bar{z}'=b_1h_1-c_3r_1^2,$$
$$c_1\bar{y}'-b_1\bar{z}'=-a_1h_1;$$

$$b_2\bar{x}'-a_2\bar{y}'=a_3l-a_1l_2-b_2m_1,\ c_2\bar{x}'-a_2\bar{z}'=-a_3k+a_1k_2-c_2m_1,$$
$$c_2\bar{y}'-b_2\bar{z}'=a_3h-a_1h_2;$$

$$b_3\bar{x}'-a_3\bar{y}'=c_3h_1-b_1r_3^2,\ c_3\bar{x}'-a_3\bar{z}'=-b_3h_1-c_1r_3^2,$$
$$c_3\bar{y}'-b_2\bar{z}'=a_3h_1;$$

$$b_1\bar{x}''-a_1\bar{y}''=-a_3l-a_2l_1-b_1m_2,\ c_1\bar{x}''-a_1\bar{z}''=a_3k+a_2k_1-c_1m_2,$$
$$c_1\bar{y}''-b_1\bar{z}''=-a_3h-a_2h_1;$$

$$b_2\bar{x}''-a_2\bar{y}''=-c_2h_2-b_3r_2^2,\ c_2\bar{x}''-a_2\bar{z}''=b_2h_2-c_3r_2^2,$$
$$c_2\bar{y}''-b_2\bar{z}''=-a_2h_2;$$

$$b_3\bar{x}''-a_3\bar{y}''=c_3h_2-b_2r_3^2,\ c_3\bar{x}''-a_3\bar{z}''=-b_3h_2-c_2r_3^2,$$
$$c_3\bar{y}''-b_3\bar{z}''=a_3h_2.$$

(F)... Trinomische Identitäten für Producte von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$ in a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3:

$$a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1\bar{z}=a_2r_1^2,\ a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2\bar{z}=a_1r_2^2,$$
$$a_3\bar{x}+b_3\bar{y}+c_3\bar{z}=g_1;$$

$$a_1\bar{x}'+b_1\bar{y}'+c_1\bar{z}'=a_3r_1^2,\ a_3\bar{x}'+b_3\bar{y}'+c_3\bar{z}'=a_1r_3^2,$$
$$a_2\bar{x}'+b_2\bar{y}'+c_2\bar{z}'=g_2;$$

$$a_2\bar{x}''+b_2\bar{y}''+c_2\bar{z}''=a_3r_2^2,\ a_3\bar{x}''+b_3\bar{y}''+c_3\bar{z}''=a_2r_3^2,$$
$$a_1\bar{x}''+b_1\bar{y}''+c_1\bar{z}''=g_3.$$

(G)... Identitäten für die Quadrate: $\bar{x}^2, \bar{y}^2, \bar{z}^2$; $\bar{x}'^2, \bar{y}'^2, \bar{z}'^2$; $\bar{x}''^2, \bar{y}''^2, \bar{z}''^2$:

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2=r_1^2r_2^2-h^2,\ \bar{x}'^2+\bar{y}'^2+\bar{z}'^2=r_1^2r_3^2-h_1^2,$$
$$\bar{x}''^2+\bar{y}''^2+\bar{z}''^2=r_2^2r_3^2-h_2^2.$$

(H)... Identitäten für die Producte: $\bar{x}\bar{x}', \bar{y}\bar{y}', \bar{z}\bar{z}'$; $\bar{x}\bar{x}'', \bar{y}\bar{y}'', \bar{z}\bar{z}''$; $\bar{x}'\bar{x}'', \bar{y}'\bar{y}'', \bar{z}'\bar{z}''$:

$$\bar{x}\bar{x}'+\bar{y}\bar{y}'+\bar{z}\bar{z}'=-hh_1+m_2r_1^2,\ \bar{x}\bar{x}''+\bar{y}\bar{y}''+\bar{z}\bar{z}''=hh_2+m_1r_2^2,$$
$$\bar{x}'\bar{x}''+\bar{y}'\bar{y}''+\bar{z}'\bar{z}''=-h_1h_2+mr_3^2.$$

Dritte Gruppe

enthaltend identische Beziehungen zwischen h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$.

(J)... Binomische Identitäten für Producte von h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$; $\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$:

$$k\bar{x}-h\bar{y}=-a_2c_2r_1^2+a_1c_1r_2^2,\ l\bar{x}-h\bar{z}=a_2b_2r_1^2-a_1b_1r_2^2,$$
$$l\bar{y}-k\bar{z}=-a_2^2r_1^2+a_1^2r_2^2;$$

$$k_1\bar{x}-h_1\bar{y}=c_1g_1-a_2c_3r_1^2,\ l_1\bar{x}-h_1\bar{z}=-b_1g_1+a_2b_3r_1^2,$$
$$l_1\bar{y}-k_1\bar{z}=a_1g_1-a_2a_3r_1^2;$$

$$k_2\bar{x}-h_2\bar{y}=c_2g_1-a_1c_3r_2^2,\ l_2\bar{x}-h_2\bar{z}=-b_2g_1+a_1b_3r_2^2,$$
$$l_2\bar{y}-k_2\bar{z}=a_2g_1-a_1a_3r_2^2;$$

$$k\bar{x}'-h\bar{y}'=c_1g_2-a_3c_2r_1^2,\ l\bar{x}'-h\bar{z}'=-b_1g_2+a_3b_2r_1^2,$$
$$l\bar{y}'-k\bar{z}'=a_1g_2-a_2a_3r_1^2;$$

$$k_1\bar{x}'-h_1\bar{y}'=-a_3c_3r_1^2+a_1c_1r_3^2,\ l_1\bar{x}'-h_1\bar{z}'=a_3b_3r_1^2-a_1b_1r_3^2,$$
$$l_1\bar{y}'-k_1\bar{z}'=-a_3^2r_1^2+a_1^2r_3^2;$$

$$k_2\bar{x}'-h_2\bar{y}'=-c_3g_2+a_1c_2r_3^2,\ l_2\bar{x}'-h_2\bar{z}'=b_3g_2-a_1b_2r_3^2,$$
$$l_2\bar{y}'-k_2\bar{z}'=-a_3g_2+a_1a_2r_3^2;$$

$$k\bar{x}''-h\bar{y}''=-c_2g_3+a_3c_1r_2^2,\ l\bar{x}''-h\bar{z}''=b_2g_3-a_3b_1r_2^2,$$
$$l\bar{y}''-k\bar{z}''=-a_2g_3+a_1a_3r_2^2;$$

$$k_1\bar{x}''-h_1\bar{y}''=-c_3g_3+a_2c_1r_3^2,\ l_1\bar{x}''-h_1\bar{z}''=b_3g_3-a_2b_1r_3^2,$$
$$l_1\bar{y}''-k_1\bar{z}''=-a_3g_3+a_1a_2r_3^2;$$

$$k_2\bar{x}''-h_2\bar{y}''=-a_3c_3r_2^2+a_2c_2r_3^2,\ l_2\bar{x}''-h_2\bar{z}''=a_3b_3r_2^2-a_2b_2r_3^2,$$
$$l_2\bar{y}''-k_2\bar{z}''=-a_3^2r_2^2+a_2^2r_3^2.$$

(𝔎)... Trinomische Identitäten für Producte von h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 in $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$; $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$; $\bar{x}''$, $\bar{y}''$, $\bar{z}''$:

$$h_1\bar{x}+k_1\bar{y}+l_1\bar{z}=-a_1g-h_1m,\ h_2\bar{x}+k_2\bar{y}+l_2\bar{z}=a_2g-h_2m,$$
$$h\bar{x}+k\bar{y}+l\bar{z}=-hm;$$

$$k\bar{x}'+k\bar{y}'+l\bar{z}'=a_1g-hm_1,\ h_2\bar{x}'+k_2\bar{y}'+l_2\bar{z}'=a_3g-h_2m_1,$$
$$h_1\bar{x}'+k_1\bar{y}'+l_1\bar{z}'=-h_1m_1;$$

$$k\bar{x}''+k\bar{y}''+l\bar{z}''=a_2g-hm_2,\ h_1\bar{x}''+k_1\bar{y}''+l_1\bar{z}''=-a_3g-h_1m_2,$$
$$h_2\bar{x}''+k_2\bar{y}''+l_2\bar{z}''=-h_2m_2.$$

(𝔏)... Identitäten für h^2, hk, hl; h_1^2, h_1k_1, h_1l_1; h_2^2, h_2k_2, h_2l_2:

$$m\bar{x}-h^2=a_2^2r_1^2+a_1^2r_2^2-r_1^2r_2^2,\ m\bar{y}-hk=a_2b_2r_1^2+a_1b_1r_2^2,$$
$$m\bar{z}-hl=a_2c_2r_1^2+a_1c_1r_2^2;$$

$$m_1\bar{x}'-h_1^2=a_3^2r_1^2+a_1^2r_3^2-r_1^2r_3^2,\ m_1\bar{y}'-h_1k_1=a_3b_3r_1^2+a_1b_1r_3^2,$$
$$m_1\bar{z}'-h_1l_1=a_3c_3r_1^2+a_1c_1r_3^2;$$

$$m_2\bar{x}''-h_2^2=a_3^2r_2^2+a_2^2r_3^2-r_2^2r_3^2,\ m_2\bar{y}''-h_2k_2=a_3b_3r_2^2+a_2b_2r_3^2,$$
$$m_2\bar{z}''-h_2l_2=a_3c_3r_2^2+a_2c_2r_3^2.$$

Die vorliegenden eilf Gleichungssysteme, von deren allgemeiner Giltigkeit man sich bei einiger Vertrautheit mit der Theorie der Determinanten und Formen theilweise ohne jede Rechnung [1] überzeugen kann, ermöglichen zumeist bedeutende Vereinfachungen der ursprünglich resultirenden complicirten Ausdrücke, und zwar sind es speciell die Gleichungssysteme (𝔅), (𝔈), (𝔉), (𝔊), welche in diesem Sinne besonders häufig zur Verwendung kommen.

Es erscheint jetzt noch geboten, die Gliederung meiner Abhandlung in Kürze anzugeben. Wie schon der Titel derselben besagt, existiren unter den hier geltend gemachten Gesichtspunkten im Ganzen zwei universelle Verallgemeinerungen algebraischer Grundoperationen, welche zwar theilweise formal identisch sind, aber dessenungeachtet getrennt discutirt werden müssen. Während nämlich für die erste Verallgemeinerung der Modulus eines Productes beliebig vieler Factoren mit dem Producte der Moduli der letzteren zusammenfällt, ist er in der zweiten Verallgemeinerung demselben nur proportional, und können in Folge dessen für diese Generalisation Producte von zwei oder mehreren Factoren verschwinden, ohne dass ein einziger Factor gleich Null wird.

Fügen wir daher zu den vier erwähnten Forderungen noch die fünfte hinzu, dass die Verknüpfungen irgend zweier n-fach complexer Zahlen durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division für die Moduli der betreffenden Resultate dieselben Gesetze zu liefern haben wie für einfach complexe Zahlen, so kommt überhaupt nur eine einzige universelle Verallgemeinerung in Betracht. Es ist jene, welche in den ersten fünf Paragraphen dieser Abhandlung auseinandergesetzt wird. Die §§. 6—9 enthalten die Darlegung der zweiten universellen Verallgemeinerung, §. 10 endlich betrifft die einfachste Formulirung des Functionsbegriffes für ein n-fach complexes variables Argument.

---

[1] So bilden z. B. die Identitäten (𝔈) und (𝔊) einfache Specialisirungen der bekannten, von Euler herrührenden Gleichung:

$$(w^2+x^2+y^2+z^2)(w'^2+x'^2+y'^2+z'^2) =$$
$$= (ww'-xx'-yy'-zz')^2+(wx'+w'x+yz'-y'z)^2+$$
$$+ (wy'+w'y+x'z-xz')^2+(wz'+w'z+xy'-x'y)^2.$$

§. 1.

Erste Verallgemeinerung der Addition.

Addirt man zunächst zwei beliebige einfach complexe Zahlen: $Z_1 = a_1 + b_1 i_1$, $Z_2 = a_2 + b_2 i_1$, so erhalten die Coëfficienten: x, y ihrer Summe: $x + y i_1$ bekanntlich die Werthe:

$$x = a_1 + a_2, \; y = b_1 + b_2,$$

deren gegenseitige Beziehungen sich, wie folgt, präcisiren lassen:

1. Die Summe der Quadrate von x und y ist gleich der Summe der Quadrate der Moduli von Z_1 und Z_2, vermehrt um das doppelte Deviationsproduct des Zahlenpaares.
2. Die Summe der Producte von x und y in die gleichnamigen Coëfficienten von Z_1 resp. Z_2 ist gleich dem Quadrate des Modulus von Z_1 resp. Z_2, vermehrt um das einfache Deviationsproduct des Zahlenpaares.

Diesen Sätzen entspricht die nachstehende analytische Characteristik der Addition zweier einfach complexer Zahlen: Zwei derartige Zahlen: Z_1, Z_2 addiren, heisst, eine neue Zahl: $x + y i_1$ suchen, deren Coëfficienten die Gleichungen:

$$(1) \ldots \; x^2 + y^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2m,$$
$$(2) \ldots \; a_1 x + b_1 y = r_1^2 + m,$$
$$(3) \ldots \; a_2 x + b_2 y = r_2^2 + m$$

befriedigen. — Um jetzt auch zu prüfen, ob die hier gegebene implicite Definition ohne jede Einschränkung gilt, bestimme man x, y einerseits aus (1) und (2) anderseits aus (1) und (3), wobei ausser den geforderten Werthen von x und y im ersteren Falle noch das Werthsystem:

$$x_1 = a_1 + a_2 + \frac{2 b_1 l}{r_1^2}, \; y_1 = b_1 + b_2 - \frac{2 a_1 l}{r_1^2}$$

und im letzteren analog:

$$x_2 = a_1 + a_2 - \frac{2 b_2 l}{r_2^2}, \; y_2 = b_1 + b_2 + \frac{2 a_2 l}{r_2^2}$$

als zweite Lösung resultirt. So lange also die Differenz: $l = a_1 b_2 - a_2 b_1$ von Null verschieden ist, characterisiren die

Gleichungen (1) und (2) im Vereine mit (3) ausschliesslich die vorgeschriebenen Werthe von x, y.

Wird ferner $l = 0$, ohne dass r_1 oder r_2 verschwindet, so coïncidiren zwar die Relationen (2) und (3) gemäss der Proportion:

$$\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y} = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1a_2x + a_2b_1y}{a_1a_2x + a_1b_2y}\right) = \frac{a_1}{a_2}$$

sachlich mit einander, zugleich aber entfallen jene Zusatzglieder:

$$\frac{2b_1l}{r_1^2}, \qquad -\frac{2a_1l}{r_1^2}, \qquad -\frac{2b_2l}{r_2^2}, \qquad \frac{2a_2l}{r_2^2}$$

durch welche sich x_1, y_1 resp. x_2, y_2 für $l \gtrless 0$ von x und y unterscheiden, d. h. die Characteristik von x und y bleibt nach wie vor eine eindeutige. Dasselbe gilt, wenn einer der beiden Moduli, z. B. r_1, sich auf Null reducirt, und (2) daher in $0 = 0$ übergeht, weil dann die beiden Lösungen der übrig bleibenden Gleichungen (1) und (3) wegen $r_2 > 0$ ebenfalls einander gleich werden.

Ist endlich $r_1 = r_2 = 0$, so liefert unsere Definition allerdings nur die einzige Bestimmungsgleichung: $x^2 + y^2 = 0$, aber da die Summe der Quadrate beliebig vieler reeller Grössen nur durch das Verschwinden jedes einzelnen Summanden gleich Null werden kann, resultirt wieder nur eine einzige Lösung, nämlich: $x = 0$, $y = 0$.

Im Anschlusse hieran ergibt sich für die additive Verknüpfung zweier n-fach complexer Zahlen gewissermassen von selbst folgende implicite Definition: Zwei n-fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 addiren, heisst, eine neue Zahl:

$$x_0 + x_1i_1 + x_2i_2 + \ldots + x_ni_n$$

suchen, deren Coëfficienten den Gleichungen:

$$(4)\ldots x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2m,$$
$$(5)\ldots a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = r_1^2 + m,$$
$$(6)\ldots b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = r_2^2 + m$$

genügen.[1] — Ihre Auflösung unterliegt keinen weiteren Schwie-

[1] Die correspondirende Grassmann'sche Definition lautet: „Zwei extensive Grössen, die aus demselben System von Einheiten abgeleitet sind, addiren, heisst, ihre zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen addiren, d. h. $\Sigma\alpha e + \Sigma\beta e = \Sigma(\alpha+\beta)e$."

rigkeiten. Setzt man nämlich — unter $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ vorläufig unbestimmte Grössen verstanden —

$$x_0 = a_0 + b_0 + u_0,\ x_1 = a_1 + b_1 + u_1,\ x_2 = a_2 + b_2 + u_2,$$
$$\ldots . x_n = a_n + b_n + u_n,$$

so verwandelt sich (4) nach Substitution der Werthe von r_1^2, r_2^2 und m in:

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 +$$
$$+ 2(a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) +$$
$$+ 2(b_0u_0 + b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_nu_n) = 0,$$

während anderseits aus (5) und (6) die Relationen:

$$a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0,$$
$$b_0u_0 + b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_nu_n = 0$$

hervorgehen. Auf diese Art entspringt der Vereinigung von (4) (5) und (6) die Bedingung:

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 0,$$

welche gemäss unserer früheren Bemerkung lediglich durch die Annahmen:

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0, \ldots u_n = 0$$

befriedigt werden kann. Die so erhaltene Verallgemeinerung der ersten Grundoperation:

$$(7) \ldots Z_1 + Z_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i_1 + (a_2 + b_2)i_2 +$$
$$\ldots + (a_n + b_n)i_n$$

ist überdies eine universelle, denn ihre Form bleibt unverändert, wenn man von zwei n-fach complexen Zahlen zu zwei $(n+1)$-fach complexen Zahlen übergeht.

Aus diesem Grunde gelangt man auch durch Discussion von (7) zur Kentniss der allgemeinen Eigenschaften der Operation des Addirens, welche am übersichtlichsten in nachstehender Fassung wiederzugeben sind:

(I). Die Addition zweier n-fach complexer Zahlen liefert für:

$$b_1 = -a_1,\ b_2 = -a_2, \ldots b = -a_n$$

stets eine reelle Summe, dagegen in allen übrigen Fällen eine wenigstens einfach, höchstens n-fach complexe Zahl.

(II). Die Addition ist allgemein commutativ[1] und associativ,[2] da einerseits die Coëfficienten von (7) als symmetrische Functionen ihrer Argumente: $a_0, b_0; a_1, b_1; \ldots a_n, b_n$ bei einer Vertauschung der Summanden unverändert bleiben, anderseits die Anwendung der in (7) präcisirten Additionsregel auf drei beliebige n-fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 und

$$Z_3 = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + \ldots + c_n i_n$$

zu den Gleichungen:

$$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1) i_1 + \\ + (a_2 + b_2 + c_2) i_2 + \ldots + (a_n + b_n + c_n) i_n = \\ = Z_1 + (Z_2 + Z_3) \text{ führt.}$$

(III). Der Modulus: r der Summe: $Z_1 + Z_2$ besitzt kraft der Gleichung (4) und der bereits festgestellten geometrischen Bedeutung von m allgemein den Werth:

$$(8) \ldots r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\theta},$$

ist also niemals grösser als die Summe: $r_1 + r_2$ und niemals kleiner als der absolute Betrag der Differenz: $r_1 - r_2$.

Wie man sieht, entspricht der letzte Satz sachlich und formal dem bekannten Modulsatze für die Summe zweier einfach complexer Zahlen und kann daher auch in genau derselben Weise auf die Summe von beliebig vielen, n-fach complexen Summanden ausgedehnt werden.

---

[1] Dieses Wort rührt ebenso wie der bereits früher gebrauchte Ausdruck „distributiv" von Servois her (siehe dessen im V. Bande von Gergonne's Annalen publicirte Abhandlung: „Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel," p. 98), der beide Adjectiva ursprünglich behufs einer sprachlichen Characteristik der Functionalgleichungen:

$$f[\varphi(x)] = \varphi[f(x)], \; f(x+y+\ldots) = f(x) + f(y) + \ldots$$

eingeführt hat.

[2] Dieses Wort ist wahrscheinlich zuerst von R. Hamilton gebraucht worden.

§. 2.

Erste Verallgemeinerung der Subtraction.

Definiren wir diese zweite algebraische Grundoperation entsprechend ihrer ursprünglichen Bedeutung allgemein als Umkehrung der Addition, so sind hiemit auch die Coëfficienten: $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der Differenz:

$$Z_1 - Z_2 = \xi_0 + \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 + \ldots + \xi_n i_n$$

zweier beliebiger n-fach complexer Zahlen: Z_1, Z_2 indirect präcisirt. Gemäss unserer Definition muss nämlich die Summe von Rest und Subtrahend den Minuend liefern, mithin eine Vertauschung der Grössen:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n;\ x_0, x_1, x_2, \ldots x_n \text{ mit:}$$
$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n;\ a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$$

in den Relationen (4), (5) und (6) zu den fraglichen Bestimmungsgleichungen von $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ führen. Man erhält so vorläufig die Beziehungen:

$$r_1^2 = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 + r_2^2 +$$
$$+ 2(b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n),$$
$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n =$$
$$= \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 + b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n,$$
$$m = r_2^2 + b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n$$

und hieraus für die Aggregate:

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2,\ a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n,$$
$$b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n$$

die drei weiteren Gleichungen:

$$(9) \ldots \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2m,$$
$$(10) \ldots a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n = r_1^2 - m,$$
$$(11) \ldots b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n = m - r_2^2,$$

welche sich ihrerseits aus (4), (5), (6) durch Vertauschung von

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n;\quad b_0,\quad b_1,\quad b_2, \ldots\quad b_n \text{ mit:}$$
$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n;\ -b_0, -b_1, -b_2, \ldots -b_n$$

direct gewinnen lassen. Dieselbe Vertauschung verwandelt daher allgemein $Z_1 + Z_2$ in $Z_1 — Z_2$, d. h. es ist

$$(12)\ldots Z_1 — Z_2 = (a_0 — b_0) + (a_1 — b_1) i_1 + (a_2 — b_2) i_2 + \ldots + (a_n — b_n) i_n.$$

Schliesslich folgt noch für den Modulus: $\bar{r}$ dieser Differenz aus (9) die einfache Formel:

$$(13)\ldots \bar{r} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 — 2 r_1 r_2 \cos\theta},$$

kraft welcher die Verallgemeinerung des dritten in §. 1 aufgestellten Satzes auch für die algebraische Summe beliebig vieler n-fach complexer Zahlen giltig bleibt.

§. 3.

Erste Verallgemeinerung der Multiplication.

Der Versuch, auch die dritte algebraische Grundoperation universell zu verallgemeinern, wird zunächst durch die Thatsache nahegelegt, dass die Coëfficienten: x, y des Productes zweier einfach complexer Zahlen:[1]

$$Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 — b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i_1 = x + y i_1$$

folgende Eigenschaften besitzen:

---

[1] Es erscheint hier am Platze, auf jene originellen Betrachtungen hinzuweisen, durch welche R. Lipschitz (s. den 1877 zu Bonn erschienenen ersten Band seines Lehrbuches der Analysis, p. 75, 76) den Begriff einer einfach complexen Zahl und die Ausführung algebraischer Grundoperationen mit solchen Zahlen erläutert:

„Da es sich als unmöglich herausstellt, die Summe von zwei Quadraten: $a^2 + b^2$ als ein Product von zwei Factoren darzustellen, die in Bezug auf a und auf b vom ersten Grade sind, so hat man ein Rechenzeichen und ein zugehöriges Rechenverfahren ersonnen, wodurch eine solche Darstellung der Form nach erhalten wird.“ ... „Ein solches zu dem genannten Behufe eingeführtes Rechenzeichen ist die aus der negativen Einheit gezogene Quadratwurzel: $i = \sqrt{-1}$, und mit Hilfe dieses Rechenzeichens, dessen Quadrat immer durch die negative Einheit ersetzt werden muss, entsteht die formelle Zerlegung der Summe $a^2 + b^2$ in ein Product von zwei Factoren:

$$(1)\ldots a^2 + b^2 = (a + bi)(a — bi).$$

1) Die Summe der Quadrate von x und y ist gleich dem Producte der Quadrate der Moduli von Z_1 und Z_2.
2) Die Summe der Producte von x und y in die gleichnamigen Coëfficienten von Z_1 resp. Z_2, ist gleich dem Quadrate des Modulus von Z_1 respective Z_2, multiplicirt mit dem reellen Bestandtheile von Z_2 respective Z_1.

Da sich nämlich die in 1) und 2) ausgesprochenen Gleichungen:

$$(14)\ldots x^2+y^2=r_1^2r_2^2,$$
$$(15)\ldots a_1x+b_1y=a_2r_1^2,$$
$$(16)\ldots a_2x+b_2y=a_1r_2^2$$

auf dieselben Functionen von x und y wie (1), (2) und (3) beziehen, liefern sie auch eine analoge Generalisation für die Characteristik des Productes zweier n-fach complexer Zahlen:

$$Z_1Z_2=x_0+x_1i_1+x_2i_2+\ldots+x_ni_n,$$

wobei man übrigens bald zu der Einsicht gelangt, dass die so gewonnenen allgemeinen Relationen:

$$(17)\ldots x_0^2+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=r_1^2r_2^2,$$
$$(18)\ldots a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b_0r_1^2,$$
$$(19)\ldots b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=a_0r_2^2$$

an und für sich nur mehr für $n=2$ zur Bestimmung der fraglichen Coëfficienten: $x_0, x_1, x_2\ldots x_n$ ausreichen. [1]

Es kann daher der hier eingeschlagene Weg ausschliesslich unter den nachstehenden Bedingungen zum Ziele führen:

. . . „Die Regeln für die Grundoperationen der Rechnung mit complexen Grössen müssen so beschaffen sein, dass sie die Gleichung (1) nach sich ziehen. Sie müssen daher der Form nach aus den Regeln für die Grundoperationen der Rechnung mit beliebigen reellen Grössen abgeleitet werden, während die Regel hinzukommt, dass überall das Zeichen i^2 durch die negative Einheit zu ersetzen ist."

[1] Verbindet man die aus (17), (18), (19) für $n=3$ resultirenden Bestimmungsgleichungen der Coëfficienten: x_0, x_1, x_2, x_3 des Productes zweier dreifach complexer Zahlen: Z_1, Z_2 noch mit der, durch die explicite Definition des Productes zweier einfach complexer Zahlen nahegelegten Forderung, dass x_0, x_1, x_2, x_3 zugleich rationale ganze Functionen

1*) Die Lösungen der aus (17), (18), (19) für das Product zweier beliebiger bicomplexer Zahlen:

$$(a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2)(a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2) = x + y i_1 + z i_2$$

resultirenden Bestimmungsgleichungen:

$$(20)\ldots x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 r_2^2,$$
$$(21)\ldots a_1 x + b_1 y + c_1 z = a_2 r_1^2,$$
$$(22)\ldots a_2 x + b_2 y + c_2 z = a_1 r_2^2$$

müssen die diesbezügliche Specialisirung unserer vierten allgemeinen Forderung:

$$x + y i_1 + z i_2 = f_0(a_1, a_2, m, r_1, r_2) +$$
$$+ f_1(a_1, b_1, a_2, b_2, m, r_1, r_2) i_1 + f_2(a_1, c_1, a_2, c_2, m, r_1, r_2) i_2$$

in der Weise befriedigen, dass eine Vertauschung von b_1, b_2 mit c_1, c_2 genügt, um den Coëfficienten von i_1 in jenen von i_2 zu verwandeln. — Denn liessen sich f_1, f_2 nicht in diesem Sinne auf einander beziehen, so würde beim Übergange von bicomplexen zu n-fach complexen Zahlen für die Bildung der Functionen: $f_3, f_4, \ldots f_n$ jede sichere Directive fehlen.

2*) Die im Falle des Zutreffens der ersten Bedingung ohne weitere Rechnung construirbaren Functionen: $f_3, f_4, \ldots f_n$ müssen im Vereine mit f_0, f_1, f_2 gleichzeitig reelle Wurzeln von (17), (18), (19) vorstellen.

Neben diesen beiden, die Formen der jeweiligen Lösungen characterisirenden Bedingungen muss schliesslich noch eine eigenthümliche Beschränkung hinsichtlich der Anzahl der Lösungen geltend gemacht werden, welche bereits in der Discussion der Gleichungen (14), (15) und (16) zum Ausdrucke kommt. Hiebei zeigt sich nämlich, dass jene Lösungen:

---

von a_0, a_1, a_2, a_3; b_0, b_1, b_2, b_3 vorstellen müssen, so ergeben sich für das in Frage stehende Product dieselben zwei Werthe, welche der Quaternionen-Calcul für $Z_1 Z_2$ und $Z_2 Z_1$ liefern würde, sobald man i_1, i_2, i_3 mit dessen sogenannten Einheiten: i, j, k vertauscht. Auf diese Art begründen die Fundamentalgleichungen (17), (18) und (19) indirect auch eine neue Auffassungsweise der Quaternionen, wobei denselben jedoch nicht Punkte des Raumes, sondern solche einer vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zugeordnet werden.

$$x_1 = a_1a_2 + b_1b_2,\ y_1 = -l;\ x_2 = a_1a_2 + b_1b_2,\ y_2 = +l,$$

welche für $l \lesseqgtr 0$ den Gleichungen (14) und (15) resp. (14) und (16) zugehören, für $l = 0$ alle drei Relationen befriedigen, ohne gleichzeitig in die vorgeschriebenen Werthe von x und y überzugehen.

Sobald demnach eine Rechnungsoperation durch ein System von Gleichungen zwischen den Coëfficienten der operativ zu verknüpfenden Zahlen und des Resultates der Operation characterisirt wird, erheischt eine derartige implicite Definition gemeiniglich noch einen beschränkenden Zusatz, der sich am einfachsten, wie folgt, formuliren lässt: In allen Fällen, wo zwischen den Coëfficienten der gegebenen Zahlen irgend welche, die Anzahl der betreffenden Definitionsgleichungen reducirende Beziehungen stattfinden, kommen für das Resultat der Operation nur solche Lösungen in Betracht, welche zugleich in den allgemeinen Lösungen jener Definitionsgleichungen als Specialfälle enthalten sind.[1]

Der angeführte Zusatz tritt sofort bei den Definitionsgleichungen der Multiplication zweier einfach complexer Zahlen in Kraft, weil die Annahme: $l = 0$ die Relation (16) zu einer nothwendigen Folge von (15) macht, d. h. die Anzahl der Definitionsgleichungen in der That herabsetzt. Auf diese Art wird die Lösung:

$$x = a_1a_2 + b_1b_2,\ y = 0$$

definitiv ausgeschieden, und bilden die vorgeschriebenen Specialisirungen von x und y nunmehr auch für $l = 0$ die allein in Betracht kommenden Lösungen für x und y.

Nachdem hiemit die leitenden Gesichtspunkte für eine Bearbeitung der allgemeinen Gleichungen (17), (18) und (19) gewonnen sind, besteht unsere nächste Aufgabe darin, die Relationen (20), (21), (22) als die drei wichtigsten Specialisirungen von (17), (18) und (19) vollständig zu erledigen.

Zu diesem Zwecke setzen wir, weil die aus (20), (21) und (22) ableitbaren Resolventen für x, y, z:

---

[1] Diese Beschränkung verliert ihren willkürlichen Character erst durch den Nachweis, dass die betreffenden allgemeinen Lösungen zugleich in dem früher definirten Sinne universell sind.

$$(r_1^2r_2^2-m^2)x^2+2\{a_2(c_2k-b_2l)r_1^2-a_1(c_1k-b_1l)r_2^2\}x=$$
$$=h^2r_1^2r_2^2-(a_2b_2r_1^2-a_1b_1r_2^2)^2-(a_2c_2r_1^2-a_1c_1r_2^2)^2,$$
$$(r_1^2r_2^2-m^2)y^2-2\{a_2(c_2h-a_2l)r_1^2-a_1(c_1h-a_1l)r_2^2\}y=$$
$$=k^2r_1^2r_2^2-(a_2^2r_1^2-a_1^2r_2^2)^2-(a_2c_2r_1^2-a_1c_1r_2^2)^2,$$
$$(r_1^2r_2^2-m^2)z^2+2\{a_2(b_2h-a_2k)r_1^2-a_1(b_1h-a_1k)r_2^2\}z=$$
$$=l^2r_1^2r_2^2-(a_2^2r_1^2-a_1^2r_2^2)^2-(a_2b_2r_1^2-a_1b_1r_2^2)^2$$

infolge des complicirten Baues ihrer Coëfficienten vorläufig nicht weiter verwerthbar sind, allgemein:

$$x=ht+u, \qquad y=kt+v, \qquad z=lt+w$$

und gewinnen so unter Benützung der Identitätensysteme (𝔅) und (𝔈) die Beziehungen:

$$(r_1^2r_2^2-m^2)t^2+2(hu+kv+lw)t+u^2+v^2+w^2=r_1^2r_2^2,$$
$$a_1u+b_1v+c_1w=a_2r_1^2,\ a_2u+b_2v+c_2w=a_1r_2^2,$$

welche im Ganzen vier unbestimmte Grössen: t, u, v, w enthalten und daher noch die Aufstellung einer vierten arbiträren Relation ermöglichen. Als solche diene die Bedingung:

$$hu+kv+lw=-hm,$$

deren Combination mit der zweiten und dritten Transformationsgleichung gemäss den Identitätensystemen (𝔉) und (𝔎) für u, v, w unmittelbar die Werthe:

$$u=\bar{x},\ v=\bar{y},\ w=\bar{z}$$

liefert, so dass jetzt nur mehr die erste Transformationsgleichung zu erledigen ist. Dieselbe verwandelt sich nach Einführung der Identität:

$$u^2+v^2+w^2=\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2=r_1^2r_2^2-h^2$$

und der im Folgenden beibehaltenen Abkürzungen:

$$r_1r_2-m=p,\ r_1r_2+m=q$$

augenscheinlich in die einfache quadratische Gleichung:

$$pqt^2-2hmt-h^2=0$$

mit den beiden, für alle reellen Specialisirungen von a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 reell bleibenden Wurzeln:

$$t_1 = \frac{h(m + r_1 r_2)}{pq} = \frac{h}{p}, \quad t_2 = \frac{h(m - r_1 r_2)}{pq} = -\frac{h}{q},$$

wonach die vollständige Lösung von (20), (21) und (22) durch das Gleichungssystem:

$$(e)\ldots \begin{cases} x_1 = \bar{x} + \dfrac{h^2}{p}, \ y_1 = \bar{y} + \dfrac{hk}{p}, \ z_1 = \bar{z} + \dfrac{hl}{p}; \\ x_2 = \bar{x} - \dfrac{h^2}{q}, \ y_2 = \bar{y} - \dfrac{hk}{q}, \ z_2 = \bar{z} - \dfrac{hl}{q} \end{cases}$$

gegeben erscheint.

Ihre Discussion gestaltet sich am einfachsten, wenn man die erhaltenen Resultate geometrisch interpretirt, also der Beziehung (20) eine aus dem Ursprunge: O eines rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: $r_1 r_2$ beschriebene Kugelfläche und den Relationen (21), (22) zwei Ebenen zuordnet, deren Schnittlinie gemäss ihren characteristischen Gleichungen:

$$lx = h(z - \bar{z}) + l\bar{x}, \quad ly = k(z - \bar{z}) + l\bar{y}$$

bezüglich der drei Halbaxen: OX, OY, OZ die Richtungscosinusse:

$$\cos\lambda = \frac{h}{\sqrt{pq}}, \quad \cos\mu = \frac{k}{\sqrt{pq}} \quad \cos\nu = \frac{l}{\sqrt{pq}}$$

besitzt. Diese Gerade trifft die Kugelfläche für $h \gtrless 0$ jederzeit in zwei Punkten mit den Coordinaten: x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, während für $h = 0$ zwei Fälle in Betracht kommen, je nachdem die Nenner: p, q gleichzeitig von Null verschieden sind, oder aber entweder p oder q verschwindet.[1]

Im ersten Falle reduciren sich die Werthsysteme (e) auf die einzige Lösung:

$$(e^*)\ldots x = \bar{x}, \ y = \bar{y}, \ z = \bar{z},$$

wobei die Relationen der Schnittlinie kraft der für $h = 0$ eintretenden Specialisirung von

$$h\bar{x} + k\bar{y} + l\bar{z} = -hm, \text{ nämlich: } k\bar{y} = -l\bar{z}$$

die einfachen Formen: $x = \bar{x}, \ y\bar{y} + z\bar{z} = \bar{y}^2 + \bar{z}^2$

---

[1] Für $p = q = 0$ ist nämlich auch $r_1 r_2 = 0$, also eindeutig: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, so dass dieser Fall keine besondere Discussion erfordert.

annehmen, d. h.: die Gerade tangirt dann jenen Kreis, in welchem eine zur Ebene $Y\,O\,Z$ im Abstande $\bar{x}$ parallel gelegte Ebene die Kugelfläche durchschneidet.

Im zweiten Falle verschwinden kraft der Identität:

$$h^2 + k^2 + l^2 = pq$$

neben h auch k und l, so dass allgemein:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z}{a_2x + b_2y + c_2z} = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z}{a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z}\right) = \frac{a_1}{a_2}$$

wird, d. h. die vorgelegten Gleichungen besitzen in diesem Falle, rein analytisch aufgefasst, insoferne unendlich viele Lösungen, als für x, y, z die Coordinaten aller Punkte substituirt werden können, welche die Kugelfläche mit der einzigen, durch (21), (22) characterisirten Ebene gemein hat.

Um nunmehr zu entscheiden, welche von den unendlich vielen, für x, y, z analytisch zulässigen Werthsystemen sich auf das Resultat der durch (20), (21) und (22) implicit definirten Rechnungsoperation beziehen, drücken wir die Coëfficienten der drei quadratischen Resolventen für x, y, z durch h, k, l, p, q, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ aus und gewinnen hiedurch nach Anwendung der Identitätensysteme ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{F}$) und ($\mathfrak{L}$) die relativ einfachen Gleichungen:

$$pqx^2 - 2(pq\bar{x} + h^2m)x = (h^2 + p\bar{x})(h^2 - q\bar{x}),$$
$$pqy^2 - 2(pq\bar{y} + hkm)y = (hk + p\bar{y})(hk - q\bar{y}),$$
$$pqz^2 - 2(pq\bar{z} + hlm)z = (hl + p\bar{z})(hl - q\bar{z}),$$

welche speciell für $h = 0$ in:

$$pq(x - \bar{x})^2 = 0, \quad pq(y - \bar{y})^2 = 0, \quad pq(z - \bar{z})^2 = 0$$

übergehen, mithin das Werthsystem (e^*) als eine von den jeweiligen Specialisirungen der Grössen p, q völlig unabhängige Lösung characterisiren.

Aus diesem Grunde sind wir berechtigt, den bereits für $n = 1$ unentbehrlichen Zusatz bezüglich der Anzahl der Lösungen hier derart zu verwerthen, dass wir für die Coëfficienten: x, y, z des Productes $Z_1 Z_2$ auch bei verschwindendem p oder q lediglich das Werthsystem (e^*) zulassen, respective die Multiplication zweier bicomplexer Zahlen für $h = 0$ allgemein als eine

eindeutige Operation betrachten. Es ergibt sich daher schliesslich die nachstehende explicite Definition des Multiplicirens für den Specialfall: $n = 2$:

$a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2$ mit $a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2$ multipliciren, heisst, diesen Zahlen für $b_1 c_2 \lesseqgtr b_2 c_1$ zwei neue, höchstens bicomplexe Zahlen: $x_1 + y_1 i_1 + z_1 i_2$, $x_2 + y_2 i_1 + z_2 i_2$, dagegen für $b_1 c_2 = b_2 c_1$ eine einzige, höchstens bicomplexe Zahl: $\bar{x} + \bar{y} i_1 + \bar{z} i_2$ zuordnen.

Die weitere Frage, ob die gegebene Definition auch eine universelle Verallgemeinerung gestatte, erfordert vor Allem eine Umformung von x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 in solche Ausdrücke, welche die speciell auf bicomplexe Zahlen bezüglichen Hilfsfunctionen: h, k, l nicht mehr enthalten.

Diese Transformation wird durch die unmittelbar aus (e) hervorgehenden Formeln:

$$x_1 = \frac{1}{p}\{r_1 r_2 \bar{x} - (m\bar{x} - h^2)\},\ y_1 = \frac{1}{p}\{r_1 r_2 \bar{y} - (m\bar{y} - hk)\},$$

$$z_1 = \frac{1}{p}\{r_1 r_2 \bar{z} - (m\bar{z} - hl)\};$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\{r_1 r_2 \bar{x} + (m\bar{x} - h^2)\},\ y_2 = \frac{1}{q}\{r_1 r_2 \bar{y} + (m\bar{y} - hk)\},$$

$$z_2 = \frac{1}{q}\{r_1 r_2 \bar{z} + (m\bar{z} - hl)\}$$

und durch das Identitätensystem (Ω) vermittelt, indem die Vertauschung der Differenzen:

$$m\bar{x} - h^2,\ m\bar{y} - hk,\ m\bar{z} - hl$$

mit den, ihnen äquivalenten Ausdrücken:

$$a_2^2 r_1^2 + a_1^2 r_2^2 - r_1^2 r_2^2,\ a_2 b_2 r_1^2 + a_1 b_1 r_2^2,\ a_2 c_2 r_1^2 + a_1 c_1 r_2^2$$

auf folgende Endresultate führt:

$$x_1 = r_1 r_2 - \frac{1}{p}(a_2 r_1 - a_1 r_2)^2,\ y_1 = -\frac{1}{p}(a_2 r_1 - a_1 r_2)(b_2 r_1 - b_1 r_2),$$

$$z_1 = -\frac{1}{p}(a_2 r_1 - a_1 r_2)(c_2 r_1 - c_1 r_2);$$

$$x_2 = \frac{1}{q}(a_2 r_1 + a_1 r_2)^2 - r_1 r_2,\ y_2 = \frac{1}{q}(a_2 r_1 + a_1 r_2)(b_2 r_1 + b_1 r_2),$$

$$z_2 = \frac{1}{q}(a_2 r_1 + a_1 r_2)(c_2 r_1 + c_1 r_2).$$

Dieselben lassen sich, da sie der ersten, früher aufgestellten Forderung genügen, offenbar direct für n-fach complexe Zahlen generalisiren und liefern so die beiden Werthsysteme:

$$(\mathfrak{f})\ldots\begin{cases} x_0' = r_1 r_2 - \dfrac{1}{p}(b_0 r_1 - a_0 r_2)^2, \\ x_1' = -\dfrac{1}{p}(b_0 r_1 - a_0 r_2)(b_1 r_1 - a_1 r_2), \\ x_2' = -\dfrac{1}{p}(b_0 r_1 - a_0 r_2)(b_2 r_1 - a_2 r_2), \\ \quad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots \\ x_n' = -\dfrac{1}{p}(b_0 r_1 - a_0 r_2)(b_n r_1 - a_n r_2); \end{cases}$$

$$(\mathfrak{f}^*)\ldots\begin{cases} x_0'' = \dfrac{1}{q}(b_0 r_1 + a_0 r_2)^2 - r_1 r_2, \\ x_1'' = \dfrac{1}{q}(b_0 r_1 + a_0 r_2)(b_1 r_1 + a_1 r_2), \\ x_2'' = \dfrac{1}{q}(b_0 r_1 + a_0 r_2)(b_2 r_1 + a_2 r_2), \\ \quad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots \\ x_n'' = \dfrac{1}{q}(b_0 r_1 + a_0 r_2)(b_n r_1 + a_n r_2), \end{cases}$$

deren Brauchbarkeit nur mehr an die Bedingung geknüpft ist, dass die allgemeinen Definitionsgleichungen: (17), (18) und (19) durch Substitution von:

$$x_0', x_1', x_2', \ldots x_n' \text{ beziehungsweise: } x_0'', x_1'', x_2'', \ldots x_n''$$

für $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ identisch erfüllt werden müssen.

Der diesbezügliche Nachweis ist zunächst für das Werthsystem (f) leicht zu erbringen, indem die Aggregate:

$$x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2,\ a_0 x_0' + a_1 x_1' + a_2 x_2' + \ldots + a_n x_n',$$
$$b_0 x_0' + b_1 x_1' + b_2 x_2' + \ldots + b_n x_n'$$

bei Anwendung der einfachen Identitäten:

$$(b_0 r_1 - a_0 r_2)^2 + (b_1 r_1 - a_1 r_2)^2 + (b_2 r_1 - a_2 r_2)^2 + \ldots$$
$$+ (b_n r_1 - a_n r_2)^2 = 2 p r_1 r_2,$$

$$a_0(b_0r_1-a_0r_2)+a_1(b_1r_1-a_1r_2)+a_2(b_2r_1-a_2r_2)+\ldots$$
$$+a_n(b_nr_1-a_nr_2)=-pr_1,$$
$$b_0(b_0r_1-a_0r_2)+b_1(b_1r_1-a_1r_2)+b_2(b_2r_1-a_2r_2)+\ldots$$
$$+b_n(b_nr_1-a_nr_2)=pr_2$$

der Reihe nach in die Ausdrücke:

$$r_1^2r_2^2-\frac{2r_1r_2}{p}(b_0r_1-a_0r_2)^2+\frac{1}{p^2}(b_0r_1-a_0r_2)^2(2pr_1r_2),$$
$$a_0r_1r_2-\frac{1}{p}(b_0r_1-a_0r_2)(-pr_1)$$
$$b_0r_1r_2-\frac{1}{p}(b_0r_1-a_0r_2)(pr_2)$$

übergehen, also nach wenigen, unmittelbar ersichtlichen Reductionen die vorgeschriebenen Werthe: $r_1^2r_2^2$, $b_0r_1^2$, $a_0r_2^2$ erhalten.

Mit der Brauchbarkeit des ersten Werthsystems erscheint aber auch jene des zweiten in dem hier geforderten Sinne bewiesen, denn eine Vertauschung von r_1 mit: $-r_1$ verwandelt x_0', x_1', x_2', ... x_n' sofort in: x_0'', x_1'', x_2'', ... x_n'', ohne die Relationen (17), (18) und (19) irgendwie zu verändern.

Um unsere letzten Ergebnisse jetzt noch analytisch zu vervollständigen, bedürfen wir eines Systems von Formeln, welche eine directe Vergleichung der Werthsysteme (f), (f*) mit (e), (e*) ermöglichen, sich also in analoger Weise wie x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 aus je einer rationalen ganzen und einer irrationalen, bedingungsweise verschwindenden Function der jeweiligen Zahlencoëfficienten zusammensetzen.

Zu diesem Zwecke müssen die in x_0', x_0''; x_1', x_1''; ... x_n', x_n'' vorkommenden binomischen Factoren mit einander multiplicirt und die jeweiligen Coëfficienten von r_1r_2 in die betreffenden Ausdrücke als selbstständige Zusatzgrössen eingeführt werden, woraus unter Benützung der Hilfsfunctionen:

$$d=m-a_0b_0,\quad d_1=r_1^2-a_0^2,\quad d_2=r_2^2-b_0^2$$

folgende zweite Darstellungsweise von (f), (f*) resultirt:[1]

[1] Wollte man die Zähler der hier gegebenen Ausdrücke als Functionen von Grössen darstellen, welche den Differenzen h, k, l auch in formaler Hinsicht zugeordnet sind, so würde hiedurch die Complication der

$$x'_0 = a_0b_0 - d + \frac{1}{p}(d_1d_2 - d^2),$$

$$x'_1 = a_1b_0 + a_0b_1 + \frac{1}{p}\{b_0(a_1d - b_1d_1) + a_0(b_1d - a_1d_2)\},$$

$$x'_2 = a_2b_0 + a_0b_2 + \frac{1}{p}\{b_0(a_2d - b_2d_1) + a_0(b_2d - a_2d_2)\},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$x'_n = a_nb_0 + a_0b_n + \frac{1}{p}\{b_0(a_nd - b_nd_1) + a_0(b_nd - a_nd_2)\};$$

$$x''_0 = a_0b_0 - d - \frac{1}{q}(d_1d_2 - d^2),$$

$$x''_1 = a_1b_0 + a_0b_1 - \frac{1}{q}\{b_0(a_1d - b_1d_1) + a_0(b_1d - a_1d_2)\},$$

$$x''_2 = a_2b_0 + a_0b_2 - \frac{1}{q}\{b_0(a_2d - b_2d_1) + a_0(b_2d - a_2d_2)\},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$x''_n = a_nb_0 + a_0b_n - \frac{1}{q}\{b_0(a_nd - b_nd_1) + a_0(b_nd - a_nd_2)\}.$$

---

betreffenden Resultate für grössere Werthe von n nicht unbeträchtlich erhöht werden. Dagegen liefert die angedeutete Transformation speciell für das Product zweier dreifach complexer Zahlen:

$$a_1 + b_1i_1 + c_1i_2 + d_1i_3, \quad a_2 + b_2i_1 + c_2i_2 + d_2i_3$$

nach Einführung der Hilfsfunctionen: h, k, l und:

$$h' = b_1d_2 - b_2d_1, \quad h'' = c_1d_2 - c_2d_1, \quad k' = a_2d_1 - a_1d_2$$

in der That noch sehr übersichtliche Resultate, nämlich:

$$a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \frac{1}{p}(h^2 + h'^2 + h''^2) +$$

$$+ \{a_2b_1 + a_1b_2 + \frac{1}{p}(hk + h'k')\}i_1 + \{a_2c_1 + a_1c_2 + \frac{1}{p}(hl + h''k')\}i_2 +$$

$$+ \{a_2d_1 + a_1d_2 + \frac{1}{p}(h'l - h''k)\}i_3 \text{ und:}$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 - \frac{1}{q}(h^2 + h'^2 + h''^2) +$$

$$+ \{a_2b_1 + a_1b_2 - \frac{1}{q}(hk + h'k')\}i_1 + \{a_2c_1 + a_1c_2 - \frac{1}{q}(hl + h''k')\}i_2 +$$

$$+ \{a_2d_1 + a_1d_2 - \frac{1}{q}(h'l - h''k)\}i_3,$$

wobei sich ausserdem für $r_1^2r_2^2$ die in der Euler'schen Identität nicht enthaltene Zerlegung: $r_1^2r_2^2 = h^2 + h'^2 + h''^2 + k^2 + k'^2 + l^2 + m^2$ ergibt.

Hienach können die Grössen: x'_0, x''_0; x'_1, x''_1; ... x'_n, x''_n nicht allein für $n = 2$, sondern auch für beliebige höhere Werthe von n bedingungsweise mit einander coïncidiren, vorausgesetzt, dass die Coëfficienten: $a_1, \ldots a_s, \ldots a_n$; $b_1, \ldots b_s, \ldots b_n$ — unter a, b; $x_1, \ldots x_s, \ldots x_n$ irgend welche reelle Zahlen verstanden — den Relationen:

$$(\mathfrak{g}) \ldots \begin{cases} a_1 = ax_1, \ldots a_s = ax_s, \ldots a_n = ax_n; \\ b_1 = bx_1, \ldots b_s = bx_s, \ldots b_n = bx_n \end{cases}$$

entsprechen, und demgemäss d, d_1, d_2 als Producte eines und desselben Factors:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = e_1^2$$

in ab, a^2, b^2 auftreten. Für diese Annahmen verschwinden nämlich die Coëfficienten von a_0 und b_0 kraft den Gleichungen:

$$\begin{aligned} d_1 d_2 - d^2 &= (a^2 e_1^2)(b^2 e_1^2) - (ab e_1^2)^2 = 0, \\ a_s d - b_s d_1 &= (ax_s)(ab e_1^2) - (bx_s)(a^2 e_1^2) = 0, \\ b_s d - a_s d_2 &= (bx_s)(ab e_1^2) - (ax_s)(b^2 e_1^2) = 0 \end{aligned}$$

in sämmtlichen Factoren von $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$, d. h. man erhält vorläufig unter Hinzufügung der Beschränkung: $pq > 0$ in der That:

$$(\mathfrak{h}) \ldots \begin{cases} x'_0 = x''_0 = a_0 b_0 - d = \bar{x}_0, \\ x'_1 = x''_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = \bar{x}_1, \\ x'_2 = x''_2 = a_2 b_0 + a_0 b_2 = \bar{x}_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \\ x'_n = x''_n = a_n b_0 + a_0 b_n = \bar{x}_n, \end{cases}$$

welches Werthsystem zugleich als directe Generalisation von (e*) aufzufassen ist.

Sobald sich mithin darthun lässt, dass die Erfüllung der Gleichungen (g) seitens der Coëfficienten: $a_1, \ldots a_n$, $b_1, \ldots b_n$ eine nothwendige Vorbedingung für das Verschwinden von p respective q bildet, darf das Werthsystem (h) dem Producte zweier n-fach complexer Zahlen auch für $p > 0$, $q = 0$ beziehungsweise: $p = 0$, $q > 0$ in derselben Weise zugeordnet werden, wie dies mit dem Werthsysteme (e*) speciell in Bezug auf das Product zweier bicomplexer Zahlen geschehen ist.

Um hierüber die nöthige Klarheit zu gewinnen, gehe man von der Erwägung aus, dass einer der beiden Nenner: p, q in Hinblick auf die Identitäten:

$$r_1 r_2 - m = {}^1/_2(r_1+r_2+r)(r_1+r_2-r),$$
$$r_1 r_2 + m = {}^1/_2(r_1+r_2+\bar{r})(r_1+r_2-\bar{r})$$

ausschliesslich für $\cos\vartheta = \pm 1$, also nur in jenen Fällen gleich Null werden kann, wo die den Zahlen: Z_1, Z_2 correspondirenden Punkte: M_1, M_2 mit dem Ursprunge O des gewählten Axensystems in einer und derselben Geraden liegen.

Nun besteht aber bekanntlich für die Coordinaten: ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_n$ jedes Punktes einer solchen Geraden — unter A_0, A_1, $A_2, \ldots A_n$ irgend welche reelle Constanten gedacht — die fortlaufende Proportion:

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \ldots : \xi_n = A_0 : A_1 : A_2 : \ldots : A_n,$$

aus welcher speciell für die Coordinaten von M_1 und M_2 direct die analoge Proportion:

$$a_0 : a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_0 : b_1 : b_2 : \ldots : b_n$$

hervorgeht. Auf diese Art werden für $p = 0$, respective $q = 0$ ausser dem Gleichungssysteme (g) noch zwei weitere Specialbedingungen von der Gestalt: $a_0 = ax_0$, $b_0 = bx_0$ befriedigt, mit welcher Folgerung auch der in Frage stehende Beweis seinen Abschluss gefunden hat.

Indem wir hinfort alle Zahlen, die bezüglich ihrer Coëfficienten die Relationen (g) erfüllen und daher Punkten einer und derselben, die reelle Zahlenaxe: $J_0 J_0'$ enthaltenden Ebene zugehören — mögen nun deren gegenseitige gerade Verbindungslinien überdies noch den Ursprung des Coordinatensystems durchsetzen oder nicht — als complanar bezeichnen, ferner solche Zahlen, welche Punkten verschiedener, durch $J_0 J_0'$ gelegter Ebenen correspondiren, diplanar[1]

[1] Die Bezeichnungen „complanar" und „diplanar" sind zuerst von R. Hamilton eingeführt worden, welcher dieselben in seinem Quaternionen-Calcul (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 147, 148), wie folgt, erläutert: „Irgend zwei Quaternionen, welche eine gemeinsame Ebene haben, die durch

nennen, gewinnt die explicite Definition des Multiplicirens für zwei beliebige n-fach complexe Zahlen folgende Fassung; [1]

Zwei n-fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 mit einander multipliciren, heisst, denselben, wenn sie diplanar sind, zwei neue, höchstens n-fach complexe Zahlen:

$$x'_0+x'_1i_1+x'_2i_2+\ldots+x'_ni_n,\ x''_0+x''_1i_1+x''_2i_2+\ldots+x''_ni_n,$$

hingegen, falls sie complanar sind, eine einzige, höchstens n-fach complexe Zahl: $\bar{x}_0+\bar{x}_1i_1+\bar{x}_2i_2+\ldots+\bar{x}_ni_n$ zuordnen.

Diese Definition involvirt die nachstehenden specielleren Sätze:

1**) Das Product einer reellen in eine n-fach complexe Zahl wird durch Multiplication jedes Coëfficienten der letzteren mit dem gegebenen reellen Factor erhalten, denn aus dem Werthsysteme (ℌ) resultirt für $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$ direct die Gleichung:

$$(a_0+a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_ni_n)b_0=a_0b_0+a_1b_0i_1+\\+a_2b_0i_2+\ldots+a_nb_0i_n.$$

2**) Das Product zweier n-fach imaginärer Zahlen:

$$a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_ni_n,\ b_1i_1+b_2i_2+\ldots+b_ni_n$$

---

den Anfangspunkt geht, können complanare Quaternionen genannt werden; aber irgend zwei Quaternionen, die verschiedene Ebenen haben, mögen, im Gegensatze dazu, diplanar heissen."

[1] Die diesbezügliche Grassmann'sche Definition (s. Ausdehnungslehre p. 20) lautet: „Unter dem Producte $[ab]$ einer extensiven Grösse a in eine andere b ist diejenige extensive Grösse (oder auch Zahlgrösse) zu verstehen, die man erhält, indem man zuerst jede der Einheiten, aus denen die erste Grösse a numerisch abgeleitet ist, mit jeder der Einheiten, aus denen die zweite b numerisch abgeleitet ist, zu einem Producte verknüpft, dessen erster Factor die Einheit der ersten Grösse und dessen zweiter Factor die Einheit der zweiten Grösse ist, dann dies Product mit dem Producte derjenigen Ableitungszahlen multiplicirt, mit welchen jene Einheiten verknüpft waren, und die sämmtlichen so gewonnenen Producte addirt, d. h., es ist

$$\Sigma\alpha_r e_r \Sigma\beta_s e_s = \Sigma\alpha_r\beta_s [e_r e_s],$$

wo e_r, e_s die Einheiten, aus denen die Grössen numerisch abgeleitet sind, α_r, β_s die zugehörigen Ableitungszahlen bezeichnen, und die Summe sich auf die verschiedenen Werthe der Indices r und s bezieht."

ist gemäss den aus (f), (f*) und (ḡ) für $a_0 = b_0 = 0$ entspringenden Relationen:

$$x'_0 = r_1 r_2 = \sqrt{d_1 d_2},\ x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = 0;$$
$$x''_0 = -r_1 r_2 = -\sqrt{d_1 d_2},\ x''_1 = x''_2 = \ldots = x''_n = 0;$$
$$\bar{x}_0 = -d,\ \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_n = 0$$

immer reell und zwar für diplanare Factoren gleich:

$$\pm\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)},$$

dagegen bei complanaren Factoren identisch mit dem Aggregate:

$$-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n),$$

so dass speciell das Quadrat jeder n-fach imaginären Zahl der negativ genommenen Summe der Quadrate ihrer Coëfficienten äquivalent wird.[1]

3**) Das Product zweier conjugirter n-fach complexer Zahlen:

$$a_0+a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_ni_n,\ a_0-a_1i_1-a_2i_2-\ldots-a_ni_n$$

besitzt, da dieselben zugleich complanar sind, und der Ausdruck: $\bar{x}_s = a_sb_0+a_0b_s$ für $b_0 = a_0$, $b_s = -a_s$ identisch verschwindet, allgemein den Werth:

$$a_0^2+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,$$

wonach sich auch umgekehrt die Summe der Quadrate von $(n+1)$ beliebigen reellen Grössen als Product zweier conjugirter, n-fach complexer Factoren auffassen lässt.[2]

---

[1] An dieser Stelle mag auf den bekannten Satz der Quaternionenrechnung (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 311) hingewiesen werden, dass das Quadrat jedes Vectors: $a_1i+a_2j+a_3k$ durch: $-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$ auszudrücken ist, also unter der Bedingung: $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$ jederzeit die Relation; $(a_1i+a_2j+a_3k)^2 = -1$ besteht.

[2] Im Anschlusse hieran können u. A. die beiden theoretisch wichtigen Fragen erledigt werden, auf wie viele Arten bei Benützung eines n-fach complexen Zahlensystems eine Summe von s-verschiedenen, positiv genommenen Quadraten als Product zweier s-fach imaginärer beziehungsweise $(s-1)$-fach complexer Factoren darstellbar ist.

Auf Grundlage des Satzes 1**) und der Beziehungen (c) ergeben sich nunmehr für Z_1, Z_2 die wichtigen Transformationsgleichungen:

$$(\mathrm{i})\ldots\begin{cases} Z_1 = r_1(\cos\alpha + i_1\cos\alpha_1 + i_2\cos\alpha_2 + \ldots + i_n\cos\alpha_n), \\ Z_2 = r_2(\cos\beta + i_1\cos\beta_1 + i_2\cos\beta_2 + \ldots + i_n\cos\beta_n), \end{cases}$$

welchen eine dritte, durch ihre grosse Einfachheit ausgezeichnete Darstellungsweise des allgemeinen Productes: $Z_1\,Z_2$ correspondirt.

Vertauschen wir nämlich in (f), (f*) die Coëfficienten: $a_0,\ldots a_n$; $b_0,\ldots b_n$ ebenfalls mit $r_1\cos\alpha,\ldots r_1\cos\alpha_n$; $r_2\cos\beta,\ldots r_2\cos\beta_n$ und setzen der Kürze wegen:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cos\sigma, \qquad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \cos\tau$$

ferner für $s = 1, 2,\ldots n$ durchgängig:

Indem man hiebei sämmtliche Zeichenvariationen der quadrirten reellen Grössen berücksichtigt, resultiren für jene Summe unter Hinzuziehung elementarer combinatorischer Sätze im Ganzen

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)(2^s-1)$ Zerlegungen erster

und $n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+2)(2^{s-1}s)$ Zerlegungen zweiter Art.

Es besitzt also z. B. in einem bicomplexen Zahlensysteme die Summe: a^2+b^2 vier Zerlegungen:

$$(ai_1+bi_2)(-ai_1-bi_2),\ (ai_1-bi_2)(-ai_1+bi_2)$$
$$(bi_1+ai_2)(-bi_1-ai_2),\ (bi_1-ai_2)(-bi_1+ai_2)$$

in zweifach imaginäre und acht Zerlegungen in einfach complexe Zahlen, während sich die Summe: $a^2+b^2+c^2$ bereits in 24 verschiedenen Formen:

$$(a+bi_1+ci_2)(a-bi_1-ci_2),\qquad (a+bi_1-ci_2)(a-bi_1+ci_2),$$
$$(-a+bi_1+ci_2)(-a-bi_1-ci_2),\qquad (-a+bi_1-ci_2)(-a-bi_1+ci_2),$$
$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$
$$(c+bi_1+ai_2)(c-bi_1-ai_2),\qquad (c+bi_1-ai_2)(c-bi_1+ai_2),$$
$$(-c+bi_1+ai_2)(-c-bi_1-ai_2),\qquad (-c+bi_1-ai_2)(-c-bi_1+ai_2)$$

als Product je zweier conjugirter bicomplexer Factoren definiren lässt.

$$\frac{\sin\frac{\alpha_s+\beta_s}{2}\sin\frac{\alpha_s-\beta_s}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\cos\sigma_s,\quad \frac{\cos\frac{\alpha_s+\beta_s}{2}\cos\frac{\alpha_s-\beta_s}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\cos\tau_s,$$

so resultiren bezüglich $x_0', x_1', x_2', \ldots x_n'$; $x_0'', x_1'', x_2'', \ldots x_n''$ fast unmittelbar die merkwürdigen Formeln:

$$x_0'=-r_1r_2\cos 2\sigma,\ x_1'=-2r_1r_2\cos\sigma\cos\sigma_1,$$
$$x_2'=-2r_1r_2\cos\sigma\cos\sigma_2,\ldots x_n'=-2r_1r_2\cos\sigma\cos\sigma_n;$$

$$x_0''=r_1r_2\cos 2\tau,\ x_1''=2r_1r_2\cos\tau\cos\tau_1,$$
$$x_2''=2r_1r_2\cos\tau\cos\tau_2,\ldots x_n''=2r_1r_2\cos\tau\cos\tau_n,$$

welche für das Product zweier beliebiger diplanarer n-fach complexer Zahlen die nachstehende Doppelgleichung begründen:

$$(23)\ldots Z_1Z_2=$$
$$-r_1r_2\{\cos 2\sigma+2\cos\sigma(i_1\cos\sigma_1+i_2\cos\sigma_2+\ldots+i_n\cos\sigma_n)\}$$

respective:

$$r_1r_2\{\cos 2\tau+2\cos\tau(i_1\cos\tau_1+i_2\cos\tau_2+\ldots+i_n\cos\tau_n)\}.$$

Hiebei erfüllen die $2(n+1)$ in den Factoren von r_1r_2 auftretenden Grössen: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2\ldots\sigma_n$; $\tau, \tau_1\ \tau_2\ldots\tau_n$ gemäss den beiden, aus (b) und (b) ableitbaren Relationen:

$$(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\cos\beta_1-\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_2-\cos\alpha_2)^2+\ldots$$
$$+(\cos\beta_n-\cos\alpha_n)^2=4\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$(\cos\beta+\cos\alpha)^2+(\cos\beta_1+\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_2+\cos\alpha_2)^2+\ldots$$
$$+(\cos\beta_n+\cos\alpha_n)^2=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

stets die Bedingungen:

$$\cos^2\sigma+\cos^2\sigma_1+\ldots+\cos^2\sigma_n=1,\ \cos^2\tau+\cos^2\tau_1+\ldots+\cos^2\tau_n=1$$

und lassen sich daher geometrisch als Winkel zweier gerader Linien mit den Halbaxen: $OJ_0, OJ_1, \ldots OJ_n$ interpretiren.

Die vorstehenden Ergebnisse legen selbstverständlicher Weise die Vermuthung nahe, dass auch das Product zweier complanarer n-fach complexer Zahlen:

$$(24)\ldots Z_1 Z_2 = (a_0 b_0 - d) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) i_1 + \\ + (a_2 b_0 + a_0 b_2) i_2 + \ldots + (a_n b_0 + a_0 b_n) i_n$$

durch Einführung passender Hilfswinkel noch bedeutend vereinfacht werden könne. Als solche wählen wir im Ganzen $(n+1)$ Winkel: $\alpha, \beta; \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$, welche — unter e_s allgemein den Ausdruck:

$$e_s = \sqrt{x_s^2 + x_{s+1}^2 + \ldots + x_n^2}$$

verstanden — aus jedem der beiden, einander gegenseitig bedingenden Gleichungssysteme:

$$(\mathfrak{f})\ldots \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_0}{r_1},\ \cos\beta = \dfrac{b_0}{r_2};\ \cos\omega_1 = \dfrac{x_1}{e_1}, \\ \ldots \cos\omega_s = \dfrac{x_s}{e_s} \quad \ldots \cos\omega_{n-1} = \dfrac{x_{n-1}}{e_{n-1}} \end{cases}$$

$$(\mathfrak{f}^*)\ldots \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a e_1}{r_1},\ \sin\beta = \dfrac{b e_1}{r_2};\ \sin\omega_1 = \dfrac{e_2}{e_1}, \\ \ldots \sin\omega_s = \dfrac{e_{s+1}}{e_s}, \ldots \sin\omega_{n-1} = \dfrac{x_n}{e_{n-1}} \end{cases}$$

bestimmbar sind, und transformiren mit Beibehaltung der Relationen: $a_0 = r_1 \cos\alpha$, $b_0 = r_2 \cos\beta$ zunächst die Coëfficienten: $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_{n-1}, b_{n-1}; a_n, b_n$ in Functionen der eben definirten Grössen und der Moduli: r_1, r_2.

Indem wir hierauf die so erhaltenen Ausdrücke:

$$a_1 = r_1 \sin\alpha \cos\omega_1,\ b_1 = r_2 \sin\beta \cos\omega_1;$$
$$a_2 = r_1 \sin\alpha \sin\omega_1 \cos\omega_2,\ b_2 = r_2 \sin\beta \sin\omega_1 \cos\omega_2;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{n-1} = r_1 \sin\alpha \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{n-2} \cos\omega_{n-1},$$
$$b_{n-1} = r_2 \sin\beta \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{n-2} \cos\omega_{n-1};$$
$$a_n = r_1 \sin\alpha \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{n-2} \sin\omega_{n-1},$$
$$b_n = r_2 \sin\beta \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{n-2} \sin\omega_{n-1}$$

in (24) substituiren, verwandeln sich die beiden Factoren linker Hand nach Absonderung der n-fach imaginären Zahl:

$$(25)\ldots I = i_1 \cos\omega_1 + i_2 \sin\omega_1 \cos\omega_2 + \ldots \\ + i_{n-1} \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{n-2} \cos\omega_{n-1} + i_n \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{n-1}$$

in: $r_1(\cos\alpha+I\sin\alpha)$, $r_2(\cos\beta+I\sin\beta)$, während der reelle Bestandtheil rechter Hand kraft der Identität:

$$a_0b_0-(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)=r_1r_2\left\{\left(\frac{a_0}{r_1}\right)\left(\frac{b_0}{r_2}\right)-\left(\frac{ae_1}{r_1}\right)\left(\frac{be_1}{r_2}\right)\right\}$$

in: $r_1r_2\cos(\alpha+\beta)$, und das Binom: $a_sb_0+a_0b_s$ für $s=1,2,\ldots n-1$ in:

$$r_1r_2\sin(\alpha+\beta)\sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{s-1}\cos\omega_s,$$

dagegen für $s=n$ in:

$$r_1r_2\sin(\alpha+\beta)\sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{n-1}$$

übergeht. Auf diese Art wird das Product: $r_1r_2\sin(\alpha+\beta)$ rechts gemeinsamer Factor einer n-fach imaginären Summe von Gliedern, welche ihrerseits wieder mit I zusammenfällt, so dass die ursprünglich vorgelegte Gleichung (24) augenscheinlich folgende Umformung ermöglicht:

$$(26)\ldots\{r_1(\cos\alpha+I\sin\alpha)\}\{r_2(\cos\beta+I\sin\beta)\}=$$
$$=r_1r_2\{\cos(\alpha+\beta)+I\sin(\alpha+\beta)\}.$$

Ihre weitere Deutung gestaltet sich sehr einfach, sobald man derselben jene, die reelle Zahlenaxe J_0J_0' enthaltende Ebene zu Grunde legt, welcher die, den beiden Factoren Z_1, Z_2 entsprechenden Punkte: M_1, M_2 angehören. Die Grössen: $r_1\cos\alpha$, $r_1\sin\alpha$; $r_2\cos\beta$, $r_2\sin\beta$ erscheinen dann als Coordinaten von M_1, M_2 bezüglich eines in derselben Ebene construirten rechtwinkligen Axensystems mit dem Ursprunge O und der Abscissenaxe J_0J_0', wonach man das Product: Z_1Z_2 unter Hinzuziehung der aus 2**) hervorgehenden Gleichung:

$$(27)\ldots I^2=-(\cos^2\omega_1+\sin^2\omega_1\cos^2\omega_2+\ldots$$
$$+\sin^2\omega_1\sin^2\omega_2\ldots\sin^2\omega_{n-1})=-1$$

wie ein Product zweier einfach complexer Zahlen interpretiren kann. Es ergibt sich daher speciell für complanare n-fach complexe Zahlen ein mit dem geforderten Resultate (26) formal identischer Ausdruck, wenn man dieselben nach Einführung des Factors I — er mag in Zukunft als Inclinationsfactor beider Zahlen bezeichnet werden

— wie reelle Binome multiplicirt und das hiebei auftretende Quadrat von I mit der negativen Einheit vertauscht.

Erst jetzt ist es möglich, im Anschlusse an unsere allgemeine explicite Definition des Multiplicirens die wesentlichen Eigenschaften dieser Grundoperation in ihrer Anwendung auf zwei beliebige n-fach complexe Zahlen vollständig zu übersehen und in folgende Sätze zusammenzufassen:

(I) Das Product: $Z_1 Z_2$ ist eine einwerthige, beziehungsweise zweiwerthige Grösse, je nachdem dessen Factoren complanar oder diplanar sind, und repräsentirt gemeiniglich eine n-fach complexe, bedingungsweise jedoch auch eine reelle Zahl.

(II) Das Product: $Z_1 Z_2$ ist allgemein commutativ [1] und speciell für complanare Zahlen in Bezug auf deren characteristische Ebene auch distributiv.

---

[1] Diese Eigenschaft fehlt dem Producte zweier beliebiger Quaternionen:

$$q_1 = a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k,\ q_2 = b_0+b_1 i+b_2 j+b_3 k,$$

indem das Resultat der Multiplication von q_1 mit q_2 bekanntlich (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 312) durch die Gleichung:

$$q_1 q_2 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + \{(a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\} i +$$
$$+ \{(a_0 b_2 + a_2 b_0) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\} j + \{(a_0 b_3 + a_3 b_0) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\} k$$

definirt wird, also bei einer Vertauschung der Factoren in:

$$q_2 q_1 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + \{(a_0 b_1 + a_1 b_0) - (a_2 b_3 - a_3 b_2)\} i +$$
$$+ \{(a_0 b_2 + a_2 b_0) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\} j + \{(a_0 b_3 + a_3 b_0) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\} k$$

übergeht. Anderseits erscheint nicht nur $q_1 q_2$, sondern auch $q_2 q_1$ gemäss den von Hamilton als Zeichengleichungen (l. c. p. 202) aufgestellten Formeln:

$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ k^2 = -1;\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j;$$
$$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

distributiv in Bezug auf sämmtliche Elemente, so dass die Übereinstimmung mancher specieller Resultate der vorliegenden Arbeit mit solchen des Quaternionen-Calculs als eine rein formale aufzufassen ist.

Dasselbe gilt von den „triplexen“ und „polydimensionalen“ Zahlen H. Scheffler's, deren Eigenschaften namentlich in zwei, 1851 beziehungsweise 1880 zu Braunschweig erschienenen Werken des genannten Autors:

(III) Der Modulus von $Z_1 Z_2$ besitzt jederzeit den Werth:

$$(28)\ldots \dot{r} = r_1 r_2,$$

wonach das Product zweier n-fach complexer Zahlen nur dann verschwindet, wenn einer der beiden Factoren gleich Null wird.

„Der Situationscalcul" — „Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen" — eingehend dargelegt worden sind.

Scheffler definirt nämlich zunächst (Situationscalcul, p. 170, 171) das Product zweier „triplexer" Zahlén:

$Z_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1} + c_1\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}$, $Z_2 = a_2 + b_2\sqrt{-1} + c_2\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}$,

welche zwei Raumpunkten mit den Coordinaten: a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 zugeordnet werden, durch die Gleichung:

$$x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1} = a_1 a_2 - \sqrt{b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{b_2^2 + c_2^2} +$$
$$+ \frac{(a_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} + a_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2})(b_1 b_2 - c_1 c_2)}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{b_2^2 + c_2^2}}\sqrt{-1} +$$
$$+ \frac{(a_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} + a_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2})(b_1 c_2 + b_2 c_1)}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{b_2^2 + c_2^2}}\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1},$$

so dass x, y, z wohl der Relation (20), nicht aber den Beziehungen (21) und (22) genügen. Infolgedessen ist auch die Scheffler'sche Generalisation des Multiplicirens (s. sein zweites, zuvor citirtes Werk, p. 52, 82) in ihrer Anwendung auf zwei beliebige „polydimensionale" Zahlen:

$$Z_1 = r_1\{\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\cos\beta_1\sqrt{-1} + \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1} +$$
$$+ \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1\cos\delta_1\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}\,\sqrt{\mp 1} + \ldots\},$$
$$Z_2 = r_2\{\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\beta_2\sqrt{-1} + \sin\alpha_2\sin\beta_2\cos\gamma_2\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1} +$$
$$+ \sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2\cos\delta_2\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}\,\sqrt{\mp 1} + \ldots\}$$

mit der hier gegebenen Verallgemeinerung des Multiplicirens nur insoferne verwandt, als das Product:

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2\{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\beta_1 + \beta_2)\sqrt{-1} +$$
$$+ \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\sin(\beta_1 + \beta_2)\cos(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1} +$$
$$+ \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\sin(\beta_1 + \beta_2)\sin(\gamma_1 + \gamma_2)\cos(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}\,\sqrt{\mp 1} + \ldots\}$$

ebenfalls commutativ bleibt, und sein Modulus mit $r_1 r_2$ zusammenfällt. Dagegen befriedigen dessen Coëfficienten weder die Gleichungen (18), (19) noch die vierte von uns aufgestellte Forderung, indem die Factoren gleicher „überimaginärer" Einheitsproducte in den „triplexen", „quadruplexen" etc Specialisirungen eines und desselben polydimensionalen Productes formal nicht vollständig mit einander übereinstimmen.

Unsere letzten Ergebnisse liefern ausserdem eine sichere Directive für die Multiplication von Aggregaten n-fach complexer Zahlen mit einem gegebenen Factor, sowie für die Bildung von Producten beliebig vieler Factoren, vermitteln also auch die Kenntniss jener Eigenschaften, welche der hier gegebenen universellen Verallgemeinerung des Multiplicirens in Bezug auf mehr als zwei n-fach complexe Zahlen zukommen.

Da übrigens die diesbezüglichen Sätze bereits durch eine Discussion der beiden Ausdrücke:

$$\Delta = (Z_1+Z_2)Z_3-(Z_1Z_3+Z_2Z_3),\ P = Z_1Z_2Z_3$$

inductiv erschlossen werden können, begnügen wir uns im Folgenden mit der Entwicklung von Δ und P und legen derselben, um jede überflüssige Complication der Resultate zu vermeiden, ausschliesslich bicomplexe Zahlen zu Grunde. — Die Ausdehnung der, jenen speciellen Resultaten entspringenden Schlüsse auf n-fach complexe Zahlen erhält dann ihre Begründung durch die Thatsache, dass die Verknüpfungsgesetze für die Coëfficienten der Factoren von Z_1Z_2, Z_1Z_3, Z_2Z_3 beim Übergange von bicomplexen zu n-fach complexen Zahlen infolge der Art unserer Verallgemeinerung der dritten algebraischen Grundoperation auch formal dieselben bleiben.

Indem wir nunmehr mit der Entwicklung der Grösse Δ beginnen, ist vor Allem zu beachten, dass sich die beiden Werthe des allgemeinen Productes: Z_1Z_2 gemäss früheren Betrachtungen in einander überführen lassen, wenn man r_1 mit: $-r_1$ vertauscht. Es können mithin, da anderseits der Modulus jeder complexen Zahl als eine wesentlich positive Grösse definirt wurde, bei Bildung von zwei oder mehreren Producten nur Werthe erster Art, beziehungsweise solche zweiter Art einander zugeordnet werden, durch welche Beschränkung im vorliegenden Falle von den acht möglichen Werthcombinationen der drei Producte: Z_1Z_3, Z_2Z_3 und:

$$(Z_1+Z_2)Z_3 = \{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i_1+(c_1+c_2)i_2\}Z_3$$

sechs entfallen. — Die übrigen Reductionen bedürfen bei ihrem elementaren Character keiner weiteren Erläuterung; sie führen, sobald man ausser den eingangs definirten Hilfsfunctionen: h_1,

k_1, l_1, m_1; h_2, k_2, l_2, m_2 noch die folgenden:

$$r = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2}$$

$$h_1+h_2 = h',\ k_1+k_2 = k',\ l_1+l_2 = l',\ m_1+m_2 = m';$$

$$r_1r_3-m_1 = p_1,\ r_1r_3+m_1 = q_1;\ r_2r_3-m_2 = p_2,\ r_2r_3+m_2 = q_2$$

verwendet, auf die einfache Doppelgleichung:

$$(29)\ldots\Delta = -\left\{\frac{h_1^2}{p_1}+\frac{h_2^2}{p_2}-\frac{h'^2}{rr_3-m'}\right\}-$$

$$-\left\{\frac{h_1k_1}{p_1}+\frac{h_2k_2}{p_2}-\frac{h'k'}{rr_3-m'}\right\}i_1-\left\{\frac{h_1l_1}{p_1}+\frac{h_2l_2}{p_2}-\frac{h'l'}{rr_3-m'}\right\}i_2$$

beziehungsweise:

$$\left\{\frac{h_1^2}{q_1}+\frac{h_2^2}{q_2}-\frac{h'^2}{rr_3+m'}\right\}+\left\{\frac{h_1k_1}{q_1}+\frac{h_2k_2}{q_2}-\frac{h'k'}{rr_3+m'}\right\}i_1+$$

$$+\left\{\frac{h_1l_1}{q_1}+\frac{h_2l_2}{q_2}-\frac{h'l'}{rr_3+m'}\right\}i_2.$$

Hienach besitzt Δ im Allgemeinen zwei von Null verschiedene Werthe, verschwindet jedoch identisch für $h_1 = h_2 = 0$, so dass bei Erfüllung der beiden Bedingungen: $b_1c_3 = b_3c_1$, $b_2c_3 = b_3c_2$ d. h. falls die in Betracht gezogenen Zahlen complanar sind, die fundamentale Beziehung gilt:

$$(30)\ldots(Z_1+Z_2)\,Z_3 = Z_1Z_3+Z_2Z_3.$$

Es ist also das Product eines gegebenen bicomplexen Factors in ein Aggregat bicomplexer Zahlen für alle complanaren bicomplexen Zahlen distributiv, während es im Gegenfalle dieser Eigenschaft ermangelt.

Ungleich weitläufiger als die Berechnung von Δ gestaltet sich jene des Productes dreier beliebiger bicomplexer Factoren, bei welcher man augenscheinlich von drei verschiedenen Grundproducten:

$$Z_1Z_2 = \begin{cases} x_1+y_1i_1+z_1i_2 \\ x_2+y_2i_1+z_2i_2 \end{cases} \quad Z_1Z_3 = \begin{cases} x_1'+y_1'i_1+z_1'i_2 \\ x_2'+y_2'i_1+z_2'i_2 \end{cases}$$

$$Z_2Z_3 = \begin{cases} x_1''+y_1''i_1+z_1''i_2 \\ x_2''+y_2''i_1+z_2''i_2 \end{cases}$$

ausgehen kann. Da jedoch aus früher erörterten Gründen die Verknüpfung des jeweiligen Grundproductes mit dem dritten Factor wieder nach derselben Regel zu erfolgen hat, mittelst welcher die Coëfficienten des Grundproductes selbst bestimmt wurden, und die Commutativität jedes aus zwei Factoren gebildeten Productes ihrerseits die Relationen:

$$(Z_1Z_2)Z_3 = Z_3(Z_1Z_2),\ (Z_1Z_3)Z_2 = Z_2(Z_1Z_3),$$
$$(Z_2Z_3)Z_1 = Z_1(Z_2Z_3)$$

nach sich zieht, resultiren für P im Ganzen nur sechs [1] verschiedene Darstellungen:

$$(x_1)+(y_1)i_1+(z_1)i_2,\ (x_1')+(y_1')i_1+(z_1')i_2,$$
$$(x_1'')+(y_1'')i_1+(z_1'')i_2;$$
$$(x_2)+(y_2)i_1+(z_2)i_2,\ (x_2')+(y_2')i_1+(z_2')i_2,$$
$$(x_2'')+(y_2'')i_1+(z_2'')i_2,$$

welche durch Bildung der drei Producte: $(Z_1Z_2)Z_3$, $(Z_1Z_3)Z_2$, $(Z_2Z_3)Z_1$ nach dem ersten resp. zweiten Verknüpfungsgesetze gewonnen werden.

Hiebei empfiehlt es sich, für Z_1Z_2, Z_1Z_3, Z_2Z_3 jene Ausdrücke zu substituiren, welche die Grössen: h, k, l; h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 überhaupt nicht enthalten, und erst bei der zweiten Multiplication die im Gleichungssysteme (e) präcisirte Darstellungsweise der Coëfficienten eines Productes zweier Factoren zu benützen. Die weiteren Details der durchzuführenden Rechnungen sind für die Discussion ihrer Resultate gegenstandslos und mögen daher übergangen werden; wohl aber erscheint es geboten, die zu einer übersichtlichen Formulirung der letzteren unentbehrlichen Hilfsfunctionen kurz zu characterisiren.

---

[1] Die Vielwerthigkeit jedes Productes dreier oder mehrerer diplanarer, n-fach complexer Factoren, welche unter Beibehaltung der vier eingangs aufgestellten Forderungen nicht vermieden werden kann, bedingt wohl eine wesentliche Complication der jeweiligen Rechnungen, liefert aber keineswegs ein logisch begründetes Argument gegen die hier entwickelten universellen Verallgemeinerungen des Multiplicirens. Denn sobald einmal, wie dies in der Lehre von den einfach complexen Zahlen geschehen ist, vielwerthige Potenzen zugelassen werden, liegt auch kein principielles Hinderniss mehr vor, vielwerthige Producte einzuführen.

Als solche dienen neben drei, allen sechs Werthen des in Frage stehenden Productes: P gemeinsamen, rationalen ganzen Functionen der Zahlencoëfficienten:

$$(a) = a_1a_2a_3 - a_1(b_2b_3+c_2c_3) - a_2(b_1b_3+c_1c_3) - a_3(b_1b_2+c_1c_2),$$
$$(b) = a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_1b_2b_3,$$
$$(c) = a_1a_2c_3 + a_1a_3c_2 + a_2a_3c_1 - c_1c_2c_3$$

zunächst die Producte:

$$(h') = (a_2r_1 - a_1r_2)(h_2r_1 - h_1r_2),\ (h'') = (a_2r_1 + a_1r_2)(h_2r_1 + h_1r_2)$$
$$(h'_1) = (a_3r_1 - a_1r_3)(h_2r_1 + hr_3),\ (h''_1) = (a_3r_1 + a_1r_3)(h_2r_1 - hr_3),$$
$$(h'_2) = (a_3r_2 - a_2r_3)(h_1r_2 - hr_3),\ (h''_2) = (a_3r_2 + a_2r_3)(h_1r_2 + hr_3)$$

welche offenbar identisch verschwinden, sobald sich die Coëfficienten: a_1, a_2, a_3 oder die Grössen: h, h_1, h_2 auf Null reduciren. Drei weitere Gruppen von Producten:

$$(k') = (a_2r_1 - a_1r_2)(k_2r_1 - k_1r_2),\ (k'') = (a_2r_1 + a_1r_2)(k_2r_1 + k_1r_2),$$
$$(k'_1) = (a_3r_1 - a_1r_3)(k_2r_1 + kr_3),\ (k''_1) = (a_3r_1 + a_1r_3)(k_2r_1 - kr_3),$$
$$(k'_2) = (a_3r_2 - a_2r_3)(k_1r_2 - kr_3),\ (k''_2) = (a_3r_2 + a_2r_3)(k_1r_2 + kr_3);$$

$$(l') = (a_2r_1 - a_1r_2)(l_2r_1 - l_1r_2),\ (l'') = (a_2r_1 + a_1r_2)(l_2r_1 + l_1r_2),$$
$$(l'_1) = (a_3r_1 - a_1r_3)(l_2r_1 + lr_3),\ (l''_1) = (a_3r_1 + a_1r_3)(l_2r_1 - lr_3),$$
$$(l'_2) = (a_3r_2 - a_2r_3)(l_1r_2 - lr_3),\ (l''_2) = (a_3r_2 + a_2r_3)(l_1r_2 + lr_3);$$

$$(m') = (a_2r_1 - a_1r_2)(m_2r_1 - m_1r_2),\ (m'') = (a_2r_1 + a_1r_2)(m_2r_1 + m_1r_2),$$
$$(m'_1) = (a_3r_1 - a_1r_3)(m_2r_1 - mr_3),\ (m''_1) = (a_3r_1 + a_1r_3)(m_2r_1 + mr_3),$$
$$(m'_2) = (a_3r_2 - a_2r_3)(m_1r_2 - mr_3),\ (m''_2) = (a_3r_2 + a_2r_3)(m_1r_2 + mr_3),$$

die zugleich mit a_1, a_2, a_3 entfallen, correspondiren den Grössen: k, k_1, k_2; l, l_1, l_2; m, m_1, m_2 während die letzte Gruppe von Hilfsfunctionen:

$$N' = pr_1r_2(r_3 - a_3) + (m'),\ N'' = qr_1r_2(r_3 - a_3) + (m''),$$
$$N'_1 = p_1r_1r_3(r_2 - a_2) + (m'_1),\ N''_1 = q_1r_1r_3(r_2 - a_2) + (m''_1),$$
$$N'_2 = p_2r_2r_3(r_1 - a_1) + (m'_2),\ N''_2 = q_2r_2r_3(r_1 - a_1) + (m''_2)$$

in gewissem Sinne den Nennern: p, q; $p_1\ q_1$; p_2, q_2 zugeordnet ist.

Die Substitution sämmtlicher sechs Gruppen von Hilfsgrössen in die für (x_1), (y_1), (z_1); . . . . (x''_2), (y''_2), (z''_2) resultirenden Ausdrücke verleiht denselben schliesslich die nachstehenden relativ einfachen und übersichtlichen Formen:

$$(x_1) = (a) + \frac{h}{p}(a_3h - b_3k - c_3l) + \frac{(h')^2}{pN'},$$

$$(y_1) = (b) - b_3c_1c_2 + \frac{h}{p}(b_3h + a_3k) + \frac{(h')}{pN'}\{(k') + c_3pr_1r_2\},$$

$$(z_1) = (c) - b_1b_2c_3 + \frac{h}{p}(c_3h + a_3l) + \frac{(h')}{pN'}\{(l') - b_3pr_1r_2\};$$

$$(x_1') = (a) + \frac{h_1}{p_1}(a_2h_1 - b_2k_1 - c_2l_1) + \frac{(h_1')^2}{p_1N_1'},$$

$$(y_1') = (b) - b_2c_1c_3 + \frac{h_1}{p_1}(b_2h_1 + a_2k_1) + \frac{(h_1')}{p_1N_1'}\{(k_1') - c_2p_1r_1r_3\},$$

$$(z_1') = (c) - b_1b_3c_2 + \frac{h_1}{p_1}(c_2h_1 + a_2l_1) + \frac{(h_1')}{p_1N_1'}\{(l_1') + b_2p_1r_1r_3\};$$

$$(x_1'') = (a) + \frac{h_2}{p_2}(a_1h_2 - b_1k_2 - c_1l_2) + \frac{(h_2')^2}{p_2N_2'},$$

$$(y_1'') = (b) - b_1c_2c_3 + \frac{h_2}{p_2}(b_1h_2 + a_1k_2) + \frac{(h_2')}{p_2N_2'}\{(k_2') - c_1p_2r_2r_3\},$$

$$(z_1'') = (c) - b_2b_3c_1 + \frac{h_2}{p_2}(c_1h_2 + a_1l_2) + \frac{(h_2')}{p_2N_2'}\{(l_2') + b_1p_2r_2r_3\};$$

$$(x_2) = (a) - \frac{h}{q}(a_3h - b_3k - c_3l) - \frac{(h'')^2}{qN''},$$

$$(y_2) = (b) - b_3c_1c_2 - \frac{h}{q}(b_3h + a_3k) - \frac{(h'')}{qN''}\{(k'') + c_3qr_1r_2\},$$

$$(z_2) = (c) - b_1b_2c_3 - \frac{h}{q}(c_3h + a_3l) - \frac{(h'')}{qN''}\{(l'') - b_3qr_1r_2\};$$

$$(x_2') = (a) - \frac{h_1}{q_1}(a_2h_1 - b_2k_1 - c_2l_1) - \frac{(h_1'')^2}{q_1N_1''},$$

$$(y_2') = (b) - b_2c_1c_3 - \frac{h_1}{q_1}(b_2h_1 + a_2k_1) - \frac{(h_1'')}{q_1N_1''}\{(k_1'') - c_2q_1r_1r_3\},$$

$$(z_2') = (c) - b_1b_3c_2 - \frac{h_1}{q_1}(c_2h_1 + a_2l_1) - \frac{(h_1'')}{q_1N_1''}\{(l_1'') + b_2q_1r_1r_3\};$$

$$(x_2'') = (a) - \frac{h_2}{q_2}(a_1h_2 - b_1k_2 - c_1l_2) - \frac{(h_2'')^2}{q_2N_2''},$$

$$(y_2'') = (b) - b_1c_2c_3 - \frac{h_2}{q_2}(b_1h_2 + a_1k_2) - \frac{(h_2'')}{q_2N_2''}\{(k_2'') - c_1q_2r_2r_3\},$$

$$(z_2'') = (c) - b_2b_3c_1 - \frac{h_2}{q_2}(c_1h_2 + a_1l_2) - \frac{(h_2'')}{q_2N_2''}\{(l_2'') + b_1q_2r_2r_3\},$$

Combinirt man hierauf diese sechs Werthsysteme mit den Annahmen: $h = h_1 = h_2 = 0$, so bestimmen die entsprechenden Reductionsgleichungen:

$$\text{(f)}\ldots\begin{cases}(x_1) = (x_1') = \ldots = (x_2'') = (a) = (\bar{x})\\ (y_1) = (y_1') = \ldots = (y_2'') = (b) - b_3c_1c_2 =\\ = (b) - b_2c_1c_3 = (b) - b_1c_2c_3 = (\bar{y}),\\ (z_1) = (z_1') = \ldots = (z_2'') = (c) - b_1b_2c_3\\ = (c) - b_1b_3c_2 = (c) - b_2b_3c_1 = (\bar{z})\end{cases}$$

direct die Coëfficienten von P für drei complanare bicomplexe Factoren, womit die vollständige explicite Definition des fraglichen Productes gegeben ist.

Eine vergleichende Betrachtung der sechs zuerst berechneten Coëfficientengruppen lehrt, dass $Z_1Z_2Z_3$ für drei diplanare bicomplexe Factoren je zwei, untereinander und von den übrigen Werthen verschiedene Werthe annimmt, je nachdem man der zweiten Multiplication das Product: Z_1Z_2 oder Z_1Z_3 oder Z_2Z_3 als ersten oder zweiten Factor zu Grunde legt. Es ist also $Z_1Z_2Z_3$ unter den gemachten Voraussetzungen eine sechswerthige Grösse und weder commutativ noch associativ.

Wird ferner einer der drei Factoren reell, so erhält man im Ganzen nur zwei von einander verschiedene Coëfficientengruppen, indem z. B. für $Z_3 = a_3$ nach einigen leichten Transformationen die Gleichungen:

$$(x_1) = (x_1') = (x_1'') = a_3x_1,\ (y_1) = (y_1') = (y_1'') = a_3y_1,$$
$$(z_1) = (z_1') = (z_1'') = a_3z_1;$$
$$(x_2) = (x_2') = (x_2'') = a_3x_2,\ (y_2) = (y_2') = (y_2'') = a_3y_2,$$
$$(z_2) = (z_2') = (z_2'') = a_3z_2$$

resultiren, d. h. das Product P ist für einen reellen und zwei diplanare bicomplexe Factoren jederzeit zweiwerthig, commutativ und — entsprechend den Beziehungen:

$$(Z_1Z_2)a_3 = Z_1(Z_2a_3),\ (Z_1a_3)Z_2 = Z_1(a_3Z_2),\ (Z_2a_3)Z_1 = Z_2(a_3Z_1)$$

— auch associativ.

Sind endlich sämmtliche Factoren des in Betracht gezogenen Productes bicomplex und complanar, so besitzt dasselbe gemäss dem Gleichungssysteme (I) stets nur einen einzigen Werth:

$$(31)\ldots P = (\bar{x}) + (\bar{y})i_1 + (\bar{z})i_2$$

und wird nicht allein commutativ und associativ, sondern auch bezüglich der characteristischen Ebene seiner Factoren distributiv.

Die erste und zweite Eigenschaft kommen in (31) unmittelbar zur Geltung; zur Feststellung der beiden letztgenannten Eigenschaften von P genügt es, die in (31) auftretenden Coëfficienten — unter M_1, M_2, M_3 die den Zahlen Z_1, Z_2, Z_3 zugehörigen Raumpunkte, unter α_1, α_2, α_3 die Winkel ihrer Radienvectoren: $OM_1 = r_1$, $OM_2 = r_2$, $OM_3 = r_3$ mit der Halbaxe OX verstanden — durch r_1, r_2, r_3, α_1, α_2, α_3 und durch den Neigungswinkel: ω der, die Punkte M_1, M_2, M_3 und die Axe XX' enthaltenden Ebene gegen die Ebene XOY auszudrücken. Die Einführung der diesbezüglichen, allgemein geläufigen Formeln liefert nämlich für $(\bar{x})$, $(\bar{y})$, $(\bar{z})$ die Producte:

$$r_1r_2r_3\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\ r_1r_2r_3\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cos\omega,$$
$$r_1r_2r_3\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\sin\omega,$$

so dass die Gleichung (31) nach Absonderung des in Z_1, Z_2, Z_3 und P vorkommenden Inclinationsfactors: $I = i_1\cos\omega + i_2\sin\omega$ folgende Schreibweise gestattet:

$$\{r_1(\cos\alpha_1 + I\sin\alpha_1)\}\{r_2(\cos\alpha_2 + I\sin\alpha_2)\}\{r_3(\cos\alpha_3 + I\sin\alpha_3)\} =$$
$$= r_1r_2r_3\{\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + I\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\}.$$

Hienach bleibt der Werth von P in der That derselbe, mag man einen der drei Factoren mit dem Producte der beiden übrigen oder das Product zweier Factoren mit dem dritten multipliciren, und kann die Multiplication unter Hinzuziehung der Gleichung:

$I^2 = -1$ auch nach jenen Regeln ausgeführt werden, welche für die Bildung des Productes dreier reeller algebraischer Binome gelten.

Es erübrigt jetzt noch die Berechnung des Modulus: R von P, welche für jeden der sechs möglichen Werthe dieses Productes dasselbe Endresultat liefert. Da nämlich die Moduli von Z_1Z_2, Z_1Z_3, Z_2Z_3 nach Satz (III) mit r_1r_2, r_1r_3, r_2r_3 identisch sind, ergeben sich bei nochmaliger Anwendung jenes Satzes auf die Producte: $(Z_1Z_2)Z_3$, $(Z_1Z_3)Z_2$, $(Z_2Z_3)Z_1$ als Moduli der drei, denselben entspringenden Werthpaare die Ausdrücke: $(r_1r_2)r_3$, $(r_1r_3)r_2$, $(r_2r_3)r_1$, d. h. man hat allgemein:[1]

$$(32)\ldots\quad R = r_1r_2r_3.$$

Auf Grundlage der für Δ und P erhaltenen Resultate gelangt man nunmehr mittelst vollständiger Induction zu sämmtlichen Sätzen, welche unsere erste universelle Verallgemeinernng der dritten algebraischen Grundoperation in ihrer Anwendung auf beliebig viele bicomplexe Zahlen characterisiren und sich gemäss unseren früheren Überlegungen direct auf n-fach complexe Zahlen übertragen lassen. Daher genügt es auch, hier lediglich die definitiven Generalisationen dieser Sätze anzuführen, indem deren ursprüngliche Formen durch Vertauschung von n mit 2 sofort wieder hergestellt werden können:

(I*) Das allgemeine Product: $P_s = Z_1 Z_2 \ldots Z_s$ besitzt, falls seine Factoren weder theilweise reell noch complanar sind, im Ganzen $s!$ — höchstens n-fach complexe Werthe, erhält dagegen $(s—s_1)!$ Werthe, sobald etwa s_1 —Factoren sich auf reelle Zahlen reduciren, und wird einwerthig, wenn $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ lauter complanare Zahlen vorstellen.

---

[1] Wollte man diese fundamentale Formel direct aus einem der sechs allgemeinen Werthe von P, z. B. dem ersten, ableiten, so müsste man hiebei die leicht erweislichen Hilfsgleichungen:

$$a_3(h')+b_3(k')+c_3(l')=0,\ x_1(h')+y_1(k')+z_1(l')=pr_1r_2(b_3z_1-c_3y_1),$$
$$(h')^2+(k')^2+(l')^2=2pr_1r_2\{a_3(m')+b_3(l')-c_3(k')\}-(m')^2$$

verwerthen und vor Allem beachten, dass der Zähler von:

$$\frac{(h')^2}{p^2N'^2}[(h')^2+\{(k')+c_3pr_1r_2\}^2+\{(l')-b_3pr_1r_2\}^2]$$

zufolge der letzten Identität durch N' ohne Rest theilbar ist.

(II*) Im letzteren Falle ist P_s zugleich distributiv hinsichtlich aller complanarer Summanden, in welche sich jeder Factor willkürlich zerlegen lässt, ferner commutativ, associativ und distributiv in Bezug auf die characteristische Ebene seiner Factoren, indem — unter $M_1\ M_2, \ldots M_s$ die den Zahlen: $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ entsprechenden Punkte einer $(n+1)$-fach ausgedehnten „ebenen" Mannigfaltigkeit, unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ die Winkel ihrer Radienvectoren: $OM_1 = r_1$, $OM_2 = r_2$, $\ldots OM_s = r_s$ mit der Halbaxe OJ_0 verstanden — nach Einführung des gemeinsamen, durch Gleichung (25) definirten Inclinationsfactors: I sämmtlicher Zahlen folgende einfache Relation stattfindet:

$$(33)\ldots P_s = r_1 r_2 \ldots r_s\{\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s)+ + I\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s)\}.$$

Die erstgenannte Eigenschaft geht bei diplanaren Factoren stets verloren, wohl aber bleibt P_s, wenn deren Anzahl nicht grösser als 2 ist, und die $(s-2)$ übrigen Factoren reell werden, noch commutativ und associativ.

(III*) Der Modulus von P_s ist für jeden Werth von P_s gleich dem Producte der Moduli sämmtlicher Factoren, wonach auch das Product beliebig vieler n-fach complexer Zahlen nur dann verschwindet, falls einer seiner Factoren gleich Null wird.

Berücksichtigt man schliesslich, dass die Coëfficienten jedes für P_s zulässigen Werthes zugleich Coordinaten von Punkten der hier eingeführten $(n+1)$-fach ausgedehnten „ebenen" Mannigfaltigkeit repräsentiren, so gestattet der dritte Satz mit Bezugnahme auf den ersten noch die nachstehende analytisch-geometrische Interpretation:

Durch die Multiplication von s-n-fach complexen Zahlen werden s-Punkten der ihnen zugehörigen Mannigfaltigkeit höchstens $s!$ — neue Punkte zugeordnet, welche ihrerseits insgesammt in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von der Gleichung:

$$(34)\ldots \xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2 = r_1^2 r_2^2 \ldots r_s^2$$

gelegen sind, also speciell für $n = 2$ einer aus dem Ursprunge des betreffenden dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: $r_1 r_2 \ldots r_s$ beschriebenen Kugeloberfläche angehören.

§. 4.

Erste Verallgemeinerung der Division.

Gleichwie die impliciten Definitionsgleichungen des Productes zweier beliebiger bicomplexer Zahlen den Ausgangspunkt für eine universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens gebildet haben, wird eine analoge Generalisation des Dividirens nur auf Grundlage jener Relationen möglich, welche die Ermittlung des speciellen Quotienten:

$$\frac{a_1+b_1i_1+c_1i_2}{a_2+b_2i_1+c_2i_2}=\xi+\eta i_1+\zeta i_2$$

betreffen. — Kraft der ursprünglichen Bedeutung der vierten algebraischen Grundoperation muss auch dieser Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend liefern,[1] wonach die charak-

---

[1] In demselben Sinne charakterisirt Hamilton (Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 220) den Quotienten zweier beliebiger Quaternionen: q_1, q_2:

$$\frac{q_1}{q_2}=\xi+\eta i+\zeta j+\omega k$$

durch die Gleichung: $(q_1:q_2).q_2=q_1$, wonach ξ, η, ζ, ω folgende relativ einfache Werthe besitzen:

$$\xi=\frac{m}{r_2^2},\quad \eta=-\frac{1}{r_2^2}\{(a_0b_1-a_1b_0)+(a_2b_3-a_3b_2)\},$$

$$\zeta=-\frac{1}{r_2^2}\{(a_0b_2-a_2b_0)-(a_1b_3-a_3b_1)\},\quad \omega=-\frac{1}{r_2^2}\{(a_0b_3-a_3b_0)+(a_1b_2-a_2b_1)\}.$$

Ungleich complicirter gestaltet sich die Division je zweier Scheffler'scher Zahlen, indem beispielsweise der Quotient der beiden früher in Betracht gezogenen triplexen Grössen: Z_1, Z_2 durch folgenden Ausdruck (s.: „Polydimensionale Grössen", p. 73) bestimmt erscheint:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1}{r_2^2}(a_1a_2+\sqrt{b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{b_2^2+c_2^2})+$$

$$+\frac{(a_2\sqrt{b_1^2+c_1^2}-a_1\sqrt{b_2^2+c_2^2})(b_1b_2+c_1c_2)}{r_2^2\sqrt{b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{b_2^2+c_2^2}}\sqrt{-1}+$$

$$+\frac{(a_2\sqrt{b_1^2+c_1^2}-a_1\sqrt{b_2^2+c_2^2})(b_2c_1-b_1c_2)}{r_2^2\sqrt{b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{b_2^2+c_2^2}}\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}.$$

Es ist übrigens, wie bei gewöhnlichen complexen Zahlen, auch der Modulus jedes derartigen Quotienten gleich dem Quotienten der Moduli seines Dividends und Divisors.

teristischen Bestimmungsgleichungen für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ direct aus (20), (21), (22) hervorgehen, indem man die Grössen:

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\ x,\ y,\ z \text{ mit: } \mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z};\ a_1,\ b_1,\ c_1$$

vertauscht. Die drei hiedurch erhaltenen Relationen:

$$r_1^2 = r_2^2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2),\ a_1\mathfrak{x}+b_1\mathfrak{y}+c_1\mathfrak{z} = a_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2),$$
$$m = r_2^2\mathfrak{x},$$

welche augenscheinlich den folgenden:

$$(35)\ldots \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

$$(36)\ldots a_1\mathfrak{x}+b_1\mathfrak{y}+c_1\mathfrak{z} = \frac{a_2 r_1^2}{r_2^2},\ (37)\ldots \mathfrak{x} = \frac{m}{r_2^2}$$

äquivalent sind, besitzen — unter $\bar{p}$, $\bar{q}$ die den Nennern: p, q correspondirenden Grössen:

$$\bar{p} = r_1 - a_1,\ \bar{q} = r_1 + a_1$$

verstanden — für $h \gtrless 0$, d. h. $b_1 c_2 \gtrless b_2 c_1$ stets zwei Lösungen:

$$(\mathfrak{m})\ldots \begin{cases} \mathfrak{x}_1 = \frac{m}{r_2^2},\ \mathfrak{y}_1 = -\frac{1}{r_2^2}\left(l+\frac{c_1 h}{\bar{p}}\right),\ \mathfrak{z}_1 = \frac{1}{r_2^2}\left(k+\frac{b_1 h}{\bar{p}}\right); \\ \mathfrak{x}_2 = \frac{m}{r_2^2},\ \mathfrak{y}_2 = -\frac{1}{r_2^2}\left(l-\frac{c_1 h}{\bar{q}}\right),\ \mathfrak{z}_2 = \frac{1}{r_2^2}\left(k-\frac{b_1 h}{\bar{q}}\right), \end{cases}$$

für $h = 0$ jedoch nur eine einzige Lösung, nämlich:

$$(\mathfrak{m}^*)\ldots \bar{\mathfrak{x}} = \frac{m}{r_2^2},\ \bar{\mathfrak{y}} = -\frac{l}{r_2^2},\ \bar{\mathfrak{z}} = \frac{k}{r_2^2}$$

und begründen daher folgende explicite Definition des Dividirens für den Specialfall: $n = 2$:

$a_1+b_1 i_1+c_1 i_2$ durch $a_2+b_2 i_1+c_2 i_2$ dividiren, heisst, diesen Zahlen, wenn sie diplanar sind, zwei neue, höchstens bicomplexe Zahlen: $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1 i_1+\mathfrak{z}_1 i_2$, $\mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}_2 i_1+\mathfrak{z}_2 i_2$ dagegen, falls sie complanar sind, eine einzige, höchstens bicomplexe Zahl: $\bar{\mathfrak{x}}+\bar{\mathfrak{y}} i_1+\bar{\mathfrak{z}} i_2$ zuordnen.

Im Anschlusse hieran charakterisiren wir die Division auch für zwei n-fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 als Umkehrung

der Multiplication und unterwerfen demgemäss die Coëfficienten von:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 i_1 + \mathfrak{x}_2 i_2 + \ldots + \mathfrak{x}_n i_n$$

den drei Bedingungsgleichungen:

$$(38)\ldots \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \ldots + \mathfrak{x}_n^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

$$(39)\ldots a_0\mathfrak{x}_0 + a_1\mathfrak{x}_1 + a_2\mathfrak{x}_2 + \ldots + a_n\mathfrak{x}_n = \frac{b_0 r_1^2}{r_2^2},$$

$$(40)\ldots \mathfrak{x}_0 = \frac{m}{r_2^2},$$

welche mit den Relationen: (17), (18), (19) in derselben Weise wie (35), (36), (37) mit (20), (21), (22) zusammenhängen.

Ihre Auflösung würde natürlich völlig unbestimmt ausfallen, wäre deren Form nicht bereits durch unsere vierte allgemeine Forderung und die eigenthümliche Beschaffenheit der beiden Werthsysteme $(\mathfrak{m})$ im vorhinein präcisirt.

Da nämlich $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$; $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ nach einigen leichten Transformationen die Darstellungsweise:

$$\mathfrak{y}_1 = \frac{1}{r_2^2}\{b_2 r_1 + \frac{b_1}{\bar{p}}(a_2 r_1 - m)\},\quad \mathfrak{y}_2 = -\frac{1}{r_2^2}\{b_2 r_1 - \frac{b_1}{\bar{q}}(a_2 r_1 + m)\};$$

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{1}{r_2^2}\{c_2 r_1 + \frac{c_1}{\bar{p}}(a_2 r_1 - m)\},\quad \mathfrak{z}_2 = -\frac{1}{r_2^2}\{c_2 r_1 - \frac{c_1}{\bar{q}}(a_2 r_1 + m)\}$$

gestatten, also eine Vertauschung von b_1, b_2 mit c_1, c_2 die Grössen: $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ in: $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ verwandelt, bedingt beim Übergange von zweifach zu n-fach complexen Zahlen die Form des Coëfficienten $\mathfrak{x}_1'$ resp. $\mathfrak{x}_1''$ auf analoge Art jene aller folgenden Coëfficienten, so dass sich für (38), (39), (40) ohne jede weitere Rechnung die zwei nachstehenden, völlig bestimmten Werthsysteme ergeben:

$$(\mathfrak{n})\ldots \begin{cases} \mathfrak{x}_0' = \frac{m}{r_2^2},\ \mathfrak{x}_1' = \frac{1}{r_2^2}\{b_1 r_1 + \frac{a_1}{\bar{p}}(b_0 r_1 - m)\}, \\ \mathfrak{x}_2' = \frac{1}{r_2^2}\{b_2 r_1 + \frac{a_2}{\bar{p}}(b_0 r_1 - m)\}, \\ \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \\ \mathfrak{x}_n' = \frac{1}{r_2^2}\{b_n r_1 + \frac{a_n}{\bar{p}}(b_0 r_1 - m)\}; \end{cases}$$

$$(\mathfrak{n}^*)\ldots\begin{cases} \mathfrak{x}'' = \dfrac{m}{r_2^2},\ \mathfrak{x}_1'' = -\dfrac{1}{r_2^2}\{b_1 r_1 - \dfrac{a_1}{\bar{q}}(b_0 r_1 + m)\}, \\ \mathfrak{x}_2'' = -\dfrac{1}{r_2^2}\{b_2 r_1 - \dfrac{a_2}{\bar{q}}(b_0 r_1 + m)\}, \\ \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \\ \mathfrak{x}_n'' = -\dfrac{1}{r_2^2}\{b_n r_1 - \dfrac{a_n}{\bar{q}}(b_0 r_1 + m)\}. \end{cases}$$

In beiden Lösungen repräsentiren $\bar{p}$, $\bar{q}$ wieder die Differenz respective die Summe des Modulus des Dividends und des reellen Bestandtheiles des letzteren, d. h. die Grössen:

$$\bar{p} = r_1 - a_0,\ \bar{q} = r_1 + a_0,$$

und lassen sich daher die Werthsysteme: (n), (n*) ebenso wie die Gleichungen: (f), (f*) durch Änderung des Zeichens von r_1 in einander überführen, während die drei allgemeinen Relationen (38), (39), (40) bei einer Vertauschung von r_1 mit: $-r_1$ ihre Formen beibehalten.

Um also darzuthun, dass die Beziehungen (38), 39), (40) thatsächlich durch die Werthsysteme: (n), (n*) befriedigt werden, genügt es, die Richtigkeit eines einzigen, z. B. von (n) nachzuweisen. Hiebei benützt man am zweckmässigsten die Identitäten:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \bar{p}\bar{q},$$
$$2r_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) = \bar{p}(b_0 r_1 + m) - \bar{q}(b_0 r_1 - m),$$
$$2(b_0 r_1^2 - a_0 m) = \bar{p}(b_0 r_1 + m) + \bar{q}(b_0 r_1 - m),$$

denn ihre Einführung in die Summen:

$$\mathfrak{x}_0'^2 + \mathfrak{x}_1'^2 + \mathfrak{x}_2'^2 + \ldots + \mathfrak{x}_n'^2,\ a_0\mathfrak{x}_0' + a_1\mathfrak{x}_1' + a_2\mathfrak{x}_2' + \ldots + a_n\mathfrak{x}_n'$$

liefert fast unmittelbar die Ausdrücke:

$$\frac{1}{r_2^4}\{m^2 + r_1^2(r_2^2 - b_0^2) + (b_0 r_1 - m)(b_0 r_1 + m)\},$$
$$\frac{1}{r_2^2}\{a_0 m + \frac{1}{2}\bar{p}(b_0 r_1 + m) + \frac{1}{2}\bar{q}(b_0 r_1 - m)\},$$

deren Übereinstimmung mit den vorgeschriebenen Quotienten: $\frac{r_1^2}{r_2^2}$, $\frac{b_0 r_1^2}{r_2^2}$ wohl nicht mehr einer weiteren Erläuterung bedarf.

Um nunmehr auch in den Werthsystemen: (n), (n*) eine formale Trennung der beiden Hauptfälle complanarer und diplanarer n-fach complexer Zahlen zu ermöglichen, verwandeln wir $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$; $\xi_1'', \xi_2'', \ldots \xi_n''$ vorerst in Brüche mit dem gemeinschaftlichen Nenner: $\bar{p}r_2^2$ beziehungsweise $\bar{q}r_2^2$ und führen die dieser Umformung entspringenden Coëfficienten von r_1 in die gewonnenen Ausdrücke als selbstständige Factoren von $\frac{1}{r_2^2}$ ein. Es resultiren dann nach Absonderung der früher definirten Hilfsfunctionen: d, d_1 für (n), (n*) ohne Schwierigkeit die neuen Darstellungen: [1]

$$\xi_0' = \frac{1}{r_2^2}(a_0 b_0 + d), \quad \xi_1' = \frac{1}{r_2^2}\{a_1 b_0 - a_0 b_1 - \frac{1}{\bar{p}}(a_1 d - b_1 d_1)\},$$

$$\xi_2' = \frac{1}{r_2^2}\{a_2 b_0 - a_0 b_2 - \frac{1}{\bar{p}}(a_2 d - b_2 d_1)\},$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\xi_n' = \frac{1}{r_2^2}\{a_n b_0 - a_0 b_n - \frac{1}{\bar{p}}(a_n d - b_n d_1)\};$$

$$\xi_0'' = \frac{1}{r_2^2}(a_0 b_0 + d), \quad \xi_1'' = \frac{1}{r_2^2}\{a_1 b_0 - a_0 b_1 + \frac{1}{\bar{q}}(a_1 d - b_1 d_1)\},$$

$$\xi_2'' = \frac{1}{r_2^2}\{a_2 b_0 - a_0 b_2 + \frac{1}{\bar{q}}(a_2 d - b_2 d_1)\},$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\xi_n'' = \frac{1}{r_2^2}\{a_n b_0 - a_0 b_n + \frac{1}{\bar{q}}(a_n d - b_n d_1)\},$$

---

[1] Auf Grundlage dieser Formeln ergeben sich speciell für den Quotienten zweier dreifach complexer Zahlen:

$$a_1 + b_1 i_1 + c_1 i_2 + d_1 i_3, \quad a_2 + b_2 i_1 + c_2 i_2 + d_2 i_3$$

unter Benützung der früher verwendeten Hilfsfunctionen: h, h', h'' die beiden Werthe:

$$\frac{1}{r_2^2}\{m + [a_2 b_1 - a_1 b_2 - \frac{1}{\bar{p}}(c_1 h + d_1 h')] i_1 +$$

$$+ [a_2 c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{\bar{p}}(b_1 h - d_1 h'')] i_2 + [a_2 d_1 - a_1 d_2 + \frac{1}{\bar{p}}(b_1 h' + c_1 h'')] i_3\},$$

$$\frac{1}{r_2^2}\{m + [a_2 b_1 - a_1 b_2 + \frac{1}{\bar{q}}(c_1 h + d_1 h')] i_1 +$$

$$+ [a_2 c_1 - a_1 c_2 - \frac{1}{\bar{q}}(b_1 h - d_1 h'')] i_2 + [a_2 d_1 - a_1 d_2 - \frac{1}{\bar{q}}(b_1 h' + c_1 h'')] i_3\},$$

in welchen $\bar{p}$, $\bar{q}$ natürlich wieder die Ausdrücke: $r_1 - a_1$, $r_1 + a_1$ vorstellen.

welche, falls Z_1, Z_2 complanar sind, also die Differenz: $a_s d - b_s d_1$ für $s = 1, 2, \ldots n$ verschwindet, für die fraglichen Coëfficienten von $\frac{Z_1}{Z_2}$ augenscheinlich nur ein einziges, die letzteren als rationale Functionen von $a_0, a_1, \ldots a_n$; $b_0, b_1, \ldots b_n$ definirendes Werthsystem:

$$(\mathfrak{d})\ldots\begin{cases} \mathfrak{x}'_0 = \mathfrak{x}''_0 = \frac{1}{r_2^2}(a_0 b_0 + d) = \bar{\mathfrak{x}}_0, \\ \mathfrak{x}'_1 = \mathfrak{x}''_1 = \frac{1}{r_2^2}(a_1 b_0 - a_0 b_1) = \bar{\mathfrak{x}}_1, \\ \mathfrak{x}'_2 = \mathfrak{x}''_2 = \frac{1}{r_2^2}(a_2 b_0 - a_0 b_2) = \bar{\mathfrak{x}}_2, \\ \quad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots \\ \mathfrak{x}'_n = \mathfrak{x}''_n = \frac{1}{r_2^2}(a_n b_0 - a_0 b_n) = \bar{\mathfrak{x}}_n \end{cases}$$

liefern. Hienach wird der Quotient zweier complanarer, n-fach complexer Zahlen in demselben Sinne unabhängig von den Nennern: $\bar{p}, \bar{q}$, in welchem sich seinerzeit das Product zweier derartiger Zahlen als unabhängig von den Nennern: p, q erwiesen hat. Da ferner $\bar{p}$ resp. $\bar{q}$ nur für einen reellen Dividend verschwinden kann, und sämmtliche reelle Zahlen zugleich in Bezug auf jede beliebige n-fach complexe Zahl complanar bleiben, sind wir gemäss früheren Überlegungen berechtigt, auch die Fälle:

$$\bar{p} > 0,\ \bar{q} = 0;\ \bar{p} = 0,\ \bar{q} > 0;\ \bar{p} = \bar{q} = 0$$

ausschliesslich auf Grundlage des Werthsystems ($\mathfrak{d}$) zu erledigen, so dass unsere erste universelle Verallgemeinerung des Dividirens die nachstehende explicite Definition zu erhalten hat:

Zwei n-fach complexe Zahlen: Z_1, Z_2 durch einander dividiren, heisst, denselben, falls sie diplanar sind, zwei neue, höchstens n-fach complexe Zahlen:

$$\mathfrak{x}'_0 + \mathfrak{x}'_1 i_1 + \mathfrak{x}'_2 i_2 + \ldots + \mathfrak{x}'_n i_n, \quad \mathfrak{x}''_0 + \mathfrak{x}''_1 i_1 + \mathfrak{x}''_2 i_2 + \ldots + \mathfrak{x}''_n i_n$$

dagegen, wenn sie complanar sind, eine einzige, höchstens n-fach complexe Zahl: $\bar{\mathfrak{x}}_0 + \bar{\mathfrak{x}}_1 i_1 + \bar{\mathfrak{x}}_2 i_2 + \ldots + \bar{\mathfrak{x}}_n i_n$ zuordnen.

Zur vollständigen Einsicht in die eigenthümliche Beschaffenheit der jeweiligen Werthe von $\frac{Z_1}{Z_2}$ gelangt man übrigens erst mittelst jener Substitutionen, welche die Coëfficienten: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$ für diplanare Zahlen durch:

$$r_1, r_2;\ \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n;\ \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$$

hingegen für complanare Zahlen in Function von:

$$r_1, r_2;\ \alpha, \beta;\ \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$$

ausdrücken. Hiebei ergeben sich im ersten Falle, wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\theta}{2}\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\psi,\quad \frac{\cos\frac{\beta+\theta}{2}\cos\frac{\beta-\theta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\chi;$$

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1} = \operatorname{tg}\varphi_1,\quad \frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_2} = \operatorname{tg}\varphi_2,\quad \ldots \frac{\cos\alpha_n}{\cos\beta_n} = \operatorname{tg}\varphi_n$$

setzt, für $\xi_0', \xi_0''; \xi_1', \xi_1''; \ldots \xi_n', \xi_n''$ die Ausdrücke:

$$\xi_0' = \xi_0'' = \frac{r_1}{r_2}\cos\theta$$

$$\xi_1' = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\alpha_1\cos(\varphi_1+\psi)}{\sin\varphi_1\cos\psi},\quad \xi_1'' = -\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\alpha_1\cos(\varphi_1+\chi)}{\sin\varphi_1\cos\chi};$$

$$\xi_2' = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\alpha_2\cos(\varphi_2+\psi)}{\sin\varphi_2\cos\psi},\quad \xi_2'' = -\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\alpha_2\cos(\varphi_2+\chi)}{\sin\varphi_2\cos\chi};$$

. . . .

$$\xi_n' = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\alpha_n\cos(\varphi_n+\psi)}{\sin\varphi_n\cos\psi},\quad \xi_n'' = -\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\alpha_n\cos(\varphi_n+\chi)}{\sin\varphi_n\cos\chi},$$

während im zweiten Falle der reelle Bestandtheil des umzuformenden Quotienten:

$$(41)\ldots\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{r_2^2}\{(a_0b_0+d)+(a_1b_0-a_0b_1)i_1+$$
$$+(a_2b_0-a_0b_2)i_2+\ldots+(a_nb_0-a_0b_n)i_n\}$$

kraft der Identität:

$$a_0b_0+(a_1b_1+\ldots+a_nb_n) = r_1r_2\left\{\left(\frac{a_0}{r_1}\right)\left(\frac{b_0}{r_2}\right)+\left(\frac{ae_1}{r_1}\right)\left(\frac{be_1}{r_2}\right)\right.$$

in $\frac{r_1}{r_2}\cos(\alpha-\beta)$, und der Factor von i_s, nämlich: $\frac{a_s b_0 - a_0 b_s}{r_2^2}$, für $s = 1, 2, \ldots n-1$ in:

$$\frac{r_1}{r_2}\sin(\alpha-\beta)\sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{s-1}\cos\omega_s,$$

für $s = n$ jedoch in:

$$\frac{r_1}{r_2}\sin(\alpha-\beta)\sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{n-1}$$

übergeht. Es gilt daher für den Quotienten zweier beliebiger, diplanarer Zahlen die wichtige Doppelgleichung:

$$(42)\ldots\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big[\cos\vartheta + \sec\psi\Big\{\frac{\cos\alpha_1\cos(\varphi_1+\psi)}{\sin\varphi_1}i_1 + \\ + \frac{\cos\alpha_2\cos(\varphi_2+\psi)}{\sin\varphi_2}i_2 + \ldots + \frac{\cos\alpha_n\cos(\varphi_n+\psi)}{\sin\varphi_n}i_n\Big\}\Big]$$

respective:

$$\frac{r_1}{r_2}\Big[\cos\vartheta - \sec\chi\Big\{\frac{\cos\alpha_1\cos(\varphi_1+\chi)}{\sin\varphi_1}i_1 + \\ + \frac{\cos\alpha_2\cos(\varphi_2+\chi)}{\sin\varphi_2}i_2 + \ldots + \frac{\cos\alpha_n\cos(\varphi_n+\chi)}{\sin\varphi_n}i_n\Big\}\Big],$$

wogegen der Quotient zweier complanarer Zahlen nach Absonderung des in Z_1, Z_2 und $\frac{Z_1}{Z_2}$ auftretenden Inclinationsfactors: I die einfache Darstellungsweise:

$$(43)\ldots\frac{r_1(\cos\alpha + I\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta + I\sin\beta)} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\alpha-\beta) + I\sin(\alpha-\beta)\}$$

erlaubt. Während also das Resultat der Division im ersten Falle überhaupt keiner elementaren Deutung zugänglich ist, gestattet dasselbe im zweiten Falle entsprechend der eben abgeleiteten Formel und der Gleichung: $I^2 = -1$ wenigstens in formaler Hinsicht dieselbe Interpretation wie der Quotient zweier einfach complexer Zahlen.

An dieses Ergebniss knüpft sich jetzt die wichtige Frage, unter welchen Bedingungen es überhaupt zulässig

sei, die bekannten, für alle derartigen Quotienten geltenden Gleichungen:

$$(44)\ldots\frac{Z_1+Z_2}{Z_3}=\frac{Z_1}{Z_3}+\frac{Z_2}{Z_3},\quad (45)\ldots\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_3}=\frac{Z_1}{Z_2},$$

$$(46)\ldots\frac{Z_1:Z_3}{Z_2:Z_3}=\frac{Z_1}{Z_2}$$

auf Quotienten n-fach complexer Zahlen zu übertragen?

Da die Divisionsregeln beim Übergange von zweifach zu n-fach complexen Zahlen formal dieselben bleiben, können wir uns bei der Beantwortung der vorgelegten Frage, ohne die Allgemeinheit unserer definitiven Folgerungen zu beeinträchtigen, auf bicomplexe Zahlen beschränken und demgemäss vorerst die Differenz:

$$\underline{\Delta}=\frac{Z_1+Z_2}{Z_3}-\left(\frac{Z_1}{Z_3}+\frac{Z_2}{Z_3}\right),$$

deren Verschwinden zugleich die Relation (44) verificirt, auf Grundlage der beiden einfachen Werthsysteme (m) untersuchen.

Infolge des eigenthümlichen, bereits erörterten Zusammenhanges zwischen den zwei Werthen des Quotienten beliebiger diplanarer Zahlen bedingt die Verwerthung eines bestimmten Verknüpfungsgesetzes bei der Ermittlung von $(Z_1+Z_2):Z_3$ die Benützung desselben Verknüpfungsgesetzes zur Bestimmung von $Z_1:Z_3$, $Z_2:Z_3$, so dass $\underline{\Delta}$ im Ganzen nur zwei Werthe annehmen kann. Ihre Berechnung führt bei Anwendung der Substitutionen:

$$a_1+a_2=a',\ b_1+b_2=b',\ c_1+c_2=c'$$

$$r_2-a_2=\bar{p}_1,\ r_2+a_2=\bar{q}_1$$

auf die Doppelgleichung:

$$(47)\ldots\underline{\Delta}=\frac{1}{r_3^2}\left\{\left(\frac{c_1h_1}{\bar{p}}+\frac{c_2h_2}{\bar{p}_1}-\frac{c'h'}{r-a'}\right)i_1-\left(\frac{b_1h_1}{\bar{p}}+\frac{b_2h_2}{\bar{p}_1}-\frac{b'h'}{r-a'}\right)i_2\right\},$$

beziehungsweise:

$$-\frac{1}{r_3^2}\left\{\left(\frac{c_1h_1}{\bar{q}}+\frac{c_2h_2}{\bar{q}_1}-\frac{c'h'}{r+a'}\right)i_1-\left(\frac{b_1h_1}{\bar{q}}+\frac{b_2h_2}{\bar{q}_1}-\frac{b'h'}{r+a'}\right)i_2\right\},$$

d. h. die fragliche Differenz ist für diplanare Zahlen eine zweiwerthige, zweifach imaginäre Grösse, während sie sich für complanare Zahlen wegen $h_1=h_2=0$ stets auf Null reducirt.

Im letzteren Falle ist also auch die Relation (44) allgemein giltig.

Etwas schwieriger fällt der Nachweis, dass die Gleichungen (45), 46) ebenfalls nur unter denselben Bedingungen richtig bleiben.

Da nämlich $Z_1 Z_2$ und $Z_1 : Z_2$ im Allgemeinen zweiwerthig sind, kann ohne Klarlegung des Verhältnisses, in welches die beiden Verknüpfungsgesetze der Coëfficienten von $Z_1 Z_2$ zu jenen der Coëfficienten von $Z_1 : Z_2$ treten, nicht einmal über die Anzahl der, einer gegebenen Combination von Producten und Quotienten zukommenden Werthe sicher entschieden werden. Wir haben demgemäss vor Allem festzustellen, für welche der vier mit einander combinirbaren Verknüpfungsgesetze die Relationen:

$$(48)\ldots(Z_1 Z_2) : Z_2 = Z_1, \quad (49)\ldots\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)\times Z_2 = Z_1$$

identisch erfüllt werden. [1]

Die diesbezüglichen Rechnungen gestalten sich am einfachsten bei Benützung der zweiten Darstellungsweise von $Z_1 Z_2$ respective $Z_1 : Z_2$ und liefern für jede der vier Zahlenfunctionen:

$$(x_1 + y_1 i_1 + z_1 i_2) : Z_2, \quad (x_2 + y_2 i_1 + z_2 i_2) : Z_2;$$
$$(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1 i_1 + \mathfrak{z}_1 i_2)\times Z_2, \quad (\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{y}_2 i_1 + \mathfrak{z}_2 i_2)\times Z_2$$

je zwei Ausdrücke:

$$\mathfrak{x}^{(1)} + \mathfrak{y}^{(1)} i_1 + \mathfrak{z}^{(1)} i_2, \quad \mathfrak{x}^{(2)} + \mathfrak{y}^{(2)} i_1 + \mathfrak{z}^{(2)} i_2;$$
$$\mathfrak{x}^{(3)} + \mathfrak{y}^{(3)} i_1 + \mathfrak{z}^{(3)} i_2, \quad \mathfrak{x}^{(4)} + \mathfrak{y}^{(4)} i_1 + \mathfrak{z}^{(4)} i_2;$$
$$x^{(1)} + y^{(1)} i_1 + z^{(1)} i_2, \quad x^{(2)} + y^{(2)} i_1 + z^{(2)} i_2;$$
$$x^{(3)} + y^{(3)} i_1 + z^{(3)} i_2, \quad x^{(4)} + y^{(4)} i_1 + z^{(4)} i_2,$$

indem man der vorzunehmenden Rechnungsoperation sowohl die erste als die zweite Divisions- respective Multiplicationsregel zu Grunde legen kann. Auf dem hier angedeuteten Wege gelangt

[1] Zufolge der Commutativität jedes, aus zwei bicomplexen Factoren gebildeten Productes ist dann auch $(Z_2 Z_1) : Z_2 = Z_1$ und $Z_2 \times (Z_1 : Z_2) = Z_1$, während, wie bereits Hankel (l. c. p. 33) hervorgehoben hat, in sämmtlichen Zahlensystemen, für welche das Product zweier Zahlen: Z_1, Z_2 nicht commutativ bleibt, im Allgemeinen weder $(Z_2 Z_1) : Z_2$ noch $Z_2 \times (Z_1 : Z_2)$ mit Z_1 zusammenfallen. Es finden daher beispielsweise für diplanare Quaternionen die Reductionsgleichungen: $(q_2 q_1) : q_2 = q_1$; $q_2 \times (q_1 : q_2) = q_1$ überhaupt keine Anwendung.

man nach Einführung der Abkürzungen: $\bar{N}_1'$, $\bar{N}_2'$; $\bar{N}_1''$, $\bar{N}_2''$ für die den Nennern:

$$2pr_1r_2-(a_2r_1-a_1r_2)^2, \quad 2qr_1r_2-(a_2r_1+a_1r_2)^2;$$
$$2\bar{p}r_1r_2^2-(a_2r_1-m)^2, \quad 2\bar{q}r_1r_2^2-(a_2r_1+m)^2$$

äquivalenten Quadratsummen:

$$(b_2r_1-b_1r_2)^2+(c_2r_1-c_1r_2)^2, \quad (b_2r_1+b_1r_2)^2+(c_2r_1+c_1r_2)^2;$$
$$h^2+(c_2r_1+k)^2+(b_2r_1-l)^2, \quad h^2+(c_2r_1-k)^2+(b_2r_1+l)^2$$

schliesslich zu folgenden Resultaten:

$$\mathfrak{x}^{(1)}=\mathfrak{x}^{(2)}=\mathfrak{x}^{(3)}=\mathfrak{x}^{(4)}=a_1; \quad \mathfrak{y}^{(1)}=\mathfrak{y}^{(4)}=b_1; \quad \mathfrak{z}^{(1)}=\mathfrak{z}^{(4)}=c_1;$$
$$\mathfrak{y}^{(2)}=b_1-\frac{2hr_1}{\bar{N}_1'}(c_2r_1-c_1r_2), \quad \mathfrak{y}^{(3)}=b_1-\frac{2hr_1}{\bar{N}_2'}(c_2r_1+c_1r_2);$$
$$\mathfrak{z}^{(2)}=c_1+\frac{2hr_1}{\bar{N}_1'}(b_2r_1-b_1r_2), \quad \mathfrak{z}^{(3)}=c_1+\frac{2hr_1}{\bar{N}_2'}(b_2r_1+b_1r_2).$$

$$x^{(1)}=x^{(4)}=a_1; \quad y^{(1)}=y^{(4)}=b_1; \quad z^{(1)}=z^{(4)}=c_1;$$
$$x^{(2)}=a_1-\frac{2h^2r_1}{\bar{N}_1''}, \quad x^{(3)}=a_1+\frac{2h^2r_1}{\bar{N}_2''};$$
$$y^{(2)}=b_1-\frac{2hr_1}{\bar{N}_1''}(c_2r_1+k), \quad y^{(3)}=b_1-\frac{2hr_1}{\bar{N}_2''}(c_2r_1-k),$$
$$z^{(2)}=c_1+\frac{2hr_1}{\bar{N}_1''}(b_2r_1-l), \quad z^{(3)}=c_1+\frac{2hr_1}{\bar{N}_2''}(b_2r_1+l).$$

Dieselben lehren, dass die in den Gleichungen: [1]

$$Z_1Z_2=x_1+y_1i_1+z_1i_2, \quad \frac{Z_1}{Z_2}=\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1i_1+\mathfrak{z}_1i_2$$

beziehungsweise:

$$Z_1Z_2=x_2+y_2i_1+z_2i_2, \quad \frac{Z_1}{Z_2}=\mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}_2i_1+\mathfrak{z}_2i_2$$

---

[1] Die elementarste Erläuterung des Verhältnisses zwischen den beiden Verknüpfungsgesetzen der Multiplication und Division bilden wohl die Identitäten:

$$(u^2-v):(u-\sqrt{v})=u+\sqrt{v}, \quad (u+\sqrt{v})\times(u-\sqrt{v})=u^2-v,$$

welche augenscheinlich sofort unrichtig werden, wenn man die, dem Modulus r_1 correspondirende Grösse: $\sqrt{v}$ in einer und derselben Gleichung mit verschiedenen Zeichen versieht.

ausgedrückten Multiplications- und Divisionsregeln einander direct correspondiren, denn die Relationen (48), (49) werden bei Combination dieser Regeln thatsächlich zu Identitäten. Dagegen entspringt jeder anderen Combination ein von der geforderten Zahl: Z_1 verschiedenes Resultat, welches mit der letzteren nur insoferne zusammenhängt, als es kraft den, fast ohne jede Rechnung sich ergebenden Gleichungen:

$$\{\mathfrak{x}^{(2)}\}^2+\{\mathfrak{y}^{(2)}\}^2+\{\mathfrak{z}^{(2)}\}^2=\{\mathfrak{x}^{(3)}\}^2+\{\mathfrak{y}^{(3)}\}^2+\{\mathfrak{z}^{(3)}\}^2=$$
$$=\{x^{(2)}\}^2+\{y^{(2)}\}^2+\{z^{(2)}\}^2=\{x^{(3)}\}^2+\{y^{(3)}\}^2+\{z^{(3)}\}^2=r_1^2$$

denselben Modulus wie Z_1 besitzt.

Nachdem hiemit der Zusammenhang zwischen den einzelnen Verknüpfungsgesetzen der Multiplication und Division vollständig klargelegt ist, können wir die Prüfung der Gleichungen (45), (46) unmittelbar in Angriff nehmen, zu welchem Zwecke vorerst die beiden zusammengesetzten Quotienten:

$$Q_1=\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_3},\quad Q_2=\frac{Z_1:Z_3}{Z_2:Z_3}$$

als bicomplexe Zahlen darzustellen sind. Gemäss unseren letzten Betrachtungen kommen jedem derselben im Allgemeinen je zwei Werthe zu:

$$(\mathfrak{x}_1)+(\mathfrak{y}_1)i_1+(\mathfrak{z}_1)i_2,\quad (\mathfrak{x}_2)+(\mathfrak{y}_2)i_1+(\mathfrak{z}_2)i_2;$$
$$(\bar{\mathfrak{x}}_1)+(\bar{\mathfrak{y}}_1)i_1+(\bar{\mathfrak{z}}_1)i_2,\quad (\bar{\mathfrak{x}}_2)+(\bar{\mathfrak{y}}_2)i_1+(\bar{\mathfrak{z}}_2)i_2,$$

welche der Reihe nach berechnet werden können, indem man die aus den bicomplexen Zahlen:

$$(Z_1)=\left(\bar{x}'+\frac{h_1^2}{p_1}\right)+\left(\bar{y}'+\frac{h_1k_1}{p_1}\right)i_1+\left(\bar{z}'+\frac{h_1l_1}{p_1}\right)i_2,$$
$$(Z_2)=\left(\bar{x}''+\frac{h_2^2}{p_2}\right)+\left(\bar{y}''+\frac{h_2k_2}{p_2}\right)i_1+\left(\bar{z}''+\frac{h_2l_2}{p_2}\right)i_2,$$
$$(Z_1')=\left(\bar{x}'-\frac{h_1^2}{q_1}\right)+\left(\bar{y}'-\frac{h_1k_1}{q_1}\right)i_1+\left(\bar{z}'-\frac{h_1l_1}{q_1}\right)i_2,$$
$$(Z_2')=\left(\bar{x}''-\frac{h_2^2}{q_2}\right)+\left(\bar{y}''-\frac{h_2k_2}{q_2}\right)i_1+\left(\bar{z}''-\frac{h_2l_2}{q_2}\right)i_2;$$

$$(\bar{Z}_1) = \frac{m_1}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2}\left(l_1 + \frac{c_1 h_1}{\bar{p}}\right) i_1 + \frac{1}{r_3^2}\left(k_1 + \frac{b_1 h_1}{\bar{p}}\right) i_2,$$

$$(\bar{Z}_2) = \frac{m_2}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2}\left(l_2 + \frac{c_2 h_2}{\bar{p}_1}\right) i_1 + \frac{1}{r_3^2}\left(k_2 + \frac{b_2 h_2}{\bar{p}_1}\right) i_2,$$

$$(\bar{Z}_1') = \frac{m_1}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2}\left(l_1 - \frac{c_1 h_1}{\bar{q}}\right) i_1 + \frac{1}{r_3^2}\left(k_1 - \frac{b_1 h_1}{\bar{q}}\right) i_2.$$

$$(\bar{Z}_2') = \frac{m_2}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2}\left(l_2 - \frac{c_2 h_2}{\bar{q}_1}\right) i_1 + \frac{1}{r_3^2}\left(k_2 - \frac{b_2 h_2}{\bar{q}_1}\right) i_2$$

gebildeten einfachen Quotienten:

$$(Z_1):(Z_2), \quad (Z_1'):(Z_2'); \quad (\bar{Z}_1):(\bar{Z}_2), \quad (\bar{Z}_1'):(\bar{Z}_2')$$

nach der

ersten zweiten ersten zweiten

Divisionsregel ermittelt. Da übrigens schon die Verschiedenheit eines einzigen Systems gleichnamiger Coëfficienten in Q_1 resp. Q_2 von den correspondirenden Coëfficienten in $Z_1 : Z_2$ die Unzulässigkeit von (45), (46) für die mit einander verknüpften Zahlen zur Folge hat, mögen vorläufig nur die Werthe von $(\mathfrak{x}_1)$, $(\mathfrak{x}_2)$, $(\bar{\mathfrak{x}}_1)$, $(\bar{\mathfrak{x}}_2)$ bestimmt werden, um bei der Ausscheidung jener Fälle, für welche die zu prüfenden Relationen überhaupt nicht in Betracht kommen, jede überflüssige Rechnung zu vermeiden.

Verwendet man zur Reduction der fraglichen Coëfficienten die Identitätengruppen: $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{H})$ und $(\mathfrak{K})$, so erhalten alle für die ersteren gesuchten Ausdrücke leicht discutirbare Formen, indem hiebei die nachstehenden vier Gleichungen resultiren:

$$(50)\ldots(\mathfrak{x}_1) = \frac{m}{r_2^2}\left(1 + \frac{h_1 h_2}{p_1 p_2}\right) -$$

$$- \frac{1}{r_2^2 r_3^2}\left\{a_3 g\left(\frac{h_1}{p_1} - \frac{h_2}{p_2}\right) + \left(h_1 + \frac{h_2 m_1}{p_2}\right)\left(h_2 + \frac{h_1 m_2}{p_1}\right)\right\},$$

$$(51)\ldots(\mathfrak{x}_2) = \frac{m}{r_2^2}\left(1 + \frac{h_1 h_2}{q_1 q_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r_2^2 r_3^2}\left\{a_3 g\left(\frac{h_1}{q_1} - \frac{h_2}{q_2}\right) - \left(h_1 - \frac{h_2 m_1}{q_2}\right)\left(h_2 - \frac{h_1 m_2}{q_1}\right)\right\},$$

$$(52)\ldots(\bar{\mathfrak{x}}_1) = \frac{m}{r_2^2} + \frac{1}{r_2^2 r_3^2}\left\{g\left(\frac{h_1}{\bar{p}} - \frac{h_2}{\bar{p}_1}\right) - \frac{h_1 h_2 p}{\bar{p}\,\bar{p}_1}\right\},$$

$$(53)\ldots(\bar{\xi}_2) = \frac{m}{r_2^2} - \frac{1}{r_2^2 r_3^2}\left\{q\left(\frac{h_1}{\bar{q}} - \frac{h_2}{\bar{q}_1}\right) + \frac{h_1 h_2 p}{\bar{q}\,\bar{q}_1}\right\}.$$

Es sind demnach für $h_1, h_2 \gtrless 0$ sämmtliche vier Coëfficienten von dem reellen Bestandtheile in $Z_1 : Z_2$, nämlich $\frac{m}{r_2^2}$ verschieden, während sie für $h_1 = h_2 = 0$ ohne Ausnahme dem letzteren gleich werden. Lässt sich also zeigen, dass unter diesen Annahmen, welche die Grössen: Z_1, Z_2, Z_3 zugleich als complanare bicomplexe Zahlen kennzeichnen, ausserdem noch die Relationen:

$$(\mathfrak{y}_1) = (\mathfrak{y}_2) = (\bar{\mathfrak{y}}_1) = (\bar{\mathfrak{y}}_2) = -\frac{l}{r_2^2},\quad (\mathfrak{z}_1) = (\mathfrak{z}_2) = (\bar{\mathfrak{z}}_1) = (\bar{\mathfrak{z}}_2) = \frac{k}{r_2^2}$$

gelten, so erscheint dann auch unsere auf die Gleichungen (45), (46) bezügliche Behauptung vollständig begründet.

Die Herstellung des fraglichen Beweises wird durch die Thatsache ermöglicht, dass gemäss früheren Untersuchungen die Multiplication und Division complanarer Zahlen ebenfalls gleichartige Zahlen liefert, mithin die beiden Ausdrücke:

$$(\bar{x}' + \bar{y}' i_1 + \bar{z}' i_2) : (\bar{x}'' + \bar{y}'' i_1 + \bar{z}'' i_2),$$
$$\left(\frac{m_1}{r_3^2} - \frac{l_1}{r_3^2} i_1 + \frac{k_1}{r_3^2} i_2\right) : \left(\frac{m_2}{r_3^2} - \frac{l_2}{r_3^2} i_1 + \frac{k_2}{r_3^2} i_2\right),$$

auf welche sich die Quotienten: $(Z_1) : (Z_2)$, $(Z_1') : (Z_2')$ respective $(\bar{Z}_1) : (\bar{Z}_2)$, $(\bar{Z}_1') : (Z_2')$ infolge des Verschwindens von h_1, h_2 reduciren, nach den für complanare bicomplexe Zahlen bestehenden Divisionsregeln zu berechnen sind.

Ihre Anwendung führt unter Benützung der aus (𝔈) und (𝔊) für den vorliegenden Fall entspringenden Beziehungen:

$$k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2 = r_1^2 r_3^2,$$
$$k_2^2 + l_2^2 + m_2^2 = \bar{x}''^2 + \bar{y}''^2 + \bar{z}''^2 = r_2^2 r_3^2$$

direct zu den Formeln:

$$(\mathfrak{y}_1) = (\mathfrak{y}_2) = \frac{\bar{x}''\bar{y}' - \bar{x}'\bar{y}''}{r_2^2 r_3^2},\quad (\bar{\mathfrak{y}}_1) = (\bar{\mathfrak{y}}_2) = \frac{l_2 m_1 - l_1 m_2}{r_2^2 r_3^2};$$

$$(\mathfrak{z}_1) = (\mathfrak{z}_2) = \frac{\bar{x}''\bar{z}' - \bar{x}'\bar{z}''}{r_2^2 r_3^2},\quad (\bar{\mathfrak{z}}_1) = (\bar{\mathfrak{z}}_2) = \frac{k_1 m_2 - k_2 m_1}{r_2^2 r_3^2},$$

und so ergeben sich, da die allgemeinen Werthe der Zähler von $r_2^2 r_3^2$:

$$\begin{aligned}
\bar{x}''\bar{y}' - \bar{x}'\bar{y}'' &= -l r_3^2 - c_3(a_3 h + a_2 h_1 - a_1 h_2),\\
\bar{x}''\bar{z}' - \bar{x}'\bar{z}'' &= k r_3^2 + b_3(a_3 h + a_2 h_1 - a_1 h_2),\\
l_2 m_1 - l_1 m_2 &= -l r_3^2 + c_3(a_3 h - a_2 h_1 + a_1 h_2),\\
k_1 m_2 - k_2 m_1 &= k r_3^2 - b_3(a_3 h - a_2 h_1 + a_1 h_2)
\end{aligned}$$

für complanare Zahlen augenscheinlich den Producten: $-lr_3^2$, kr_3^2 äquivalent werden,[1] in letzter Linie thatsächlich jene Relationen, von deren Zutreffen die Giltigkeit der Gleichungen (45) und (46) abhängig gemacht wurde.

Die hier zunächst für bicomplexe Zahlen gezogenen Schlüsse lassen sich durch vollständige Induction leicht auf n-fach complexe Zahlen ausdehnen und begründen im Vereine mit den übrigen in diesem Paragraphen abgeleiteten Resultaten die nachstehende umfassende Charakteristik unserer ersten universellen Verallgemeinerung der vierten algebraischen Grundoperation:

(I) Der Quotient zweier beliebiger n-fach complexer Zahlen: Z_1, Z_2 ist höchstens n-fach complex, unter Umständen aber auch reell; er repräsentirt eine einwerthige oder zweiwerthige Grösse, je nachdem die beiden, durch einander zu dividirenden Zahlen complanar oder diplanar sind, und wird nur dann unbe-

---

[1] Die vier zuletzt benützten Identitäten bilden natürlich nur integrirende Bestandtheile zweier grösserer selbstständiger Identitätengruppen:

$$\bar{x}'\bar{y} - \bar{x}\bar{y}' = -l_2 r_1^2 - c_1(-a_3 h + a_2 h_1 + a_1 h_2),$$

$$\bar{x}'\bar{z} - \bar{x}\bar{z}' = k_2 r_1^2 + b_1(-a_3 h + a_2 h_1 + a_1 h_2), \quad \bar{y}'\bar{z} - \bar{y}\bar{z}' = -a_1(-a_3 h + a_2 h_1 + a_1 h_2),$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$l_1 m - l m_1 = l_2 r_1^2 - c_1(a_3 h - a_2 h_1 + a_1 h_2),$$

$$k m_1 - k_1 m = -k_2 r_1^2 + b_1(a_3 h - a_2 h_1 + a_1 h_2), \quad k_1 l - k l_1 = -a_1(a_3 h - a_2 h_1 + a_1 h_2),$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

welche ich nur deshalb nicht im Anschlusse an die Gleichungssysteme (𝔏) und (𝔓) mitgetheilt habe, weil sie im Übrigen in der vorliegenden Arbeit absolut keine Verwendung finden. Schliesslich sei noch bemerkt, dass die, allen Relationen der zweiten Gruppe gemeinsame Function von h, h_1, h_2: $a_3 h - a_2 h_1 + a_1 h_2$, wie eine einfache Umformung dieses Ausdruckes lehrt, mit der Determinante: g zusammenfällt, aus welcher übrigens auch sämmtliche, im ersten Identitätensysteme auftretenden Functionen von h, h_1, h_2 durch partielle Änderung der Zeichen von a_1, a_2, a_3 abgeleitet werden können.

stimmt, beziehungsweise unendlich,[1] wenn sämmtliche Coëfficienten des Dividends und Divisors, beziehungsweise nur jene des letzteren verschwinden.

(II) Der genannte Quotient ist für jeden reellen Divisor distributiv hinsichtlich aller Coëfficienten des Dividends, ferner für zwei beliebige complanare n-fach complexe Zahlen distributiv in Bezug auf sämmtliche complanare Summanden, in welche sich der Dividend willkürlich zerlegen lässt, und bleibt im letzteren Falle auch unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit irgend einer dritten endlichen und complanaren Zahl multiplicirt oder durch dieselbe dividirt.

(III) Der Modulus von $Z_1 : Z_2$ besitzt stets den Werth:

$$(54)\ldots \ddot{r} = \frac{r_1}{r_2},$$

ist also — unter Z_3 nunmehr irgend eine endliche, n-fach complexe Zahl gedacht — zugleich Modulus der beiden Quotienten: Q_1, Q_2, indem die Moduli von $Z_1 Z_3$, $Z_2 Z_3$; $Z_1 : Z_3$, $Z_2 : Z_3$ der Reihe nach mit: $r_1 r_3$, $r_2 r_3$; $r_1 : r_3$, $r_2 : r_3$ zusammenfallen.

Der letzte Satz bleibt natürlich auch giltig, falls man dem Zahlenpaare: Z_1, Z_2 statt einer einzigen neuen Zahl: Z_3 allgemein s — endliche n-fach complexe Zahlen: $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots Z^{(s)}$ in analoger Weise zuordnet, d. h. die Quotienten:

$$\frac{Z_1 Z^{(1)}}{Z_2 Z^{(1)}}, \cdots \frac{Z_1 Z^{(s)}}{Z_2 Z^{(s)}}; \quad \frac{Z_1 : Z^{(1)}}{Z_2 : Z^{(1)}}, \cdots \frac{Z_1 : Z^{(s)}}{Z_2 : Z^{(s)}}$$

bildet, und liefert schliesslich noch die Folgerung:

Sind Z_1, Z_2; $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots Z^{(s)}$ irgend welche endliche n-fach complexe Zahlen, so liegen alle, jenen Quotienten zugehörigen Punkte in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von der Gleichung:

$$(55)\ldots \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

mithin speciell für $n = 2$ auf der Oberfläche einer aus dem Ursprunge des betreffenden dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: $\ddot{r}$ beschriebenen Kugel.

[1] Eine n-fach complexe Zahl ist ebenso wie eine einfach complexe als endlich, unendlich gross oder unendlich klein zu betrachten, je nachdem ihr Modulus endlich, unendlich gross oder unendlich klein ist.

§. 5.

Entwicklung des Potenzbegriffes für n-fach complexe Zahlen.

Definiren wir — unter s irgend eine positive ganze Zahl verstanden — die s-te Potenz einer beliebigen n-fach complexen Zahl: Z_1 als Product von s einander gleichen Factoren: Z_1 und bezeichnen dessen Werth symbolisch mit Z_1^s, so gilt vor Allem die aus (33) für:

$$r_2 = r_3 = \ldots = r_s = r_1,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = \alpha$$

hervorgehende Fundamentalgleichung: [1]

$$(56)\ldots Z_1^s = r_1^s\{\cos(s\alpha) + I\sin(s\alpha)\}.$$

Analog ist die s-te Potenz einer zweiten, mit Z_1 complanaren Zahl: Z_2:

$$Z_2^s = r_2^s\{\cos(s\beta) + I\sin(s\beta)\},$$

mithin kraft der Formeln (26) und (43):

$$Z_1^s Z_2^s = r_1^s r_2^s\{\cos(s\alpha + s\beta) + I\sin(s\alpha + s\beta)\},$$

$$\frac{Z_1^s}{Z_2^s} = \frac{r_1^s}{r_2^s}\{\cos(s\alpha - s\beta) + I\sin(s\alpha - s\beta)\},$$

in welchen Resultaten die rechter Hand stehenden Ausdrücke unter nochmaliger Benützung von (56), (26) und (43) als s-te Potenz von $Z_1 Z_2$ respective $\frac{Z_1}{Z_2}$ interpretirt werden können, d. h. man hat unter den gemachten Voraussetzungen allgemein:

$$(57)\ldots Z_1^s Z_2^s = (Z_1 Z_2)^s, \quad (58)\ldots \frac{Z_1^s}{Z_2^s} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^s,$$

---

[1] Diese Gleichung fällt für $n=1$ mit der bekannten Moivre'schen Binomialformel zusammen und liefert ausserdem für die Coëfficienten der s-ten Potenz einer beliebigen dreifach complexen Zahl:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$$

dieselben Verknüpfungsgesetze, welche im Quaternionen-Calcul (Vergl. Elem. d. Quat., I. Bd., 2. Th., p. 335, 341) für die Coëfficienten der s-ten Potenz des Quaternions:

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = r_1\left\{\frac{a_0}{r_1} + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{r_1}\right\} =$$

$$= r_1\left\{\cos\alpha + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\sin\alpha\right\} = r_1(\cos\alpha + \iota\sin\alpha)$$ gelten.

während für gleich hohe Potenzen diplanarer Zahlen infolge der Verschiedenheit ihrer Inclinationsfactoren überhaupt keine derartigen Relationen bestehen.

Um nunmehr auch die Beziehungen zwischen den verschiedenen Potenzen einer und derselben n-fach complexen Zahl kennen zu lernen, substituire man in (56) für s der Reihe nach: $m+n$, $m-n$, mn, wobei sich unter Hinzuziehung der für r_1 als eine reelle Grösse geltenden Potenzregeln:

$$r_1^{m+n} = r_1^m r_1^n, \qquad r_1^{m-n} = \frac{r_1^m}{r_1^n}, \qquad r_1^{mn} = (r_1^m)^n$$

die Gleichungen:

$$Z_1^{m+n} = r_1^m r_1^n \{\cos(m\alpha+n\alpha) + I\sin(m\alpha+n\alpha)\},$$
$$Z_1^{m-n} = \frac{r_1^m}{r_1^n}\{\cos(m\alpha-n\alpha) + I\sin(m\alpha-n\alpha)\},$$
$$Z_1^{mn} = (r_1^m)^n\{\cos(mn\alpha) + I\sin(mn\alpha)\}$$

ergeben, deren weitere Deutung in der That die fraglichen Beziehungen liefert. Man kann nämlich wieder auf Grundlage von (56), (26) und (43) die für Z_1^{m+n}, Z_1^{m-n} gegebenen Werthe als Product und Quotienten der beiden complanaren Zahlen: Z_1^m, Z_1^n auffassen, ferner den, in der dritten Relation auftretenden n-fach complexen Factor:

$\cos(mn\alpha) + I\sin(mn\alpha)$ durch: $\{\cos(m\alpha)+I\sin(m\alpha)\}^n$

ersetzen und gelangt so ohne jede Rechnung zu den Formeln:

$$(59)\ldots Z_1^m \times Z_1^n = Z_1^{m+n}, \quad (60)\ldots Z_1^m : Z_1^n = Z_1^{m-n},$$
$$(61)\ldots (Z_1^m)^n = Z_1^{mn}.$$

Indem man ferner in (60) einerseits $m=n$, anderseits $m=0$ wählt und im ersten Falle die Thatsache verwerthet, dass der Quotient zweier gleicher n-fach complexer Zahlen kraft (43) mit der positiven Einheit zusammenfällt, erhält man noch die Gleichungen:

$$(62)\ldots Z_1^0 = +1, \quad (63)\ldots Z_1^{-n} = \frac{Z_1^0}{Z_1^n} = \frac{1}{Z_1^n},$$

welche gemäss der Art ihrer Ableitung für beliebige endliche n-fach complexe Zahlen richtig bleiben.

Die wichtigsten aus (56) zu gewinnenden Folgerungen resultiren jedoch erst nach Einführung der beiden Specialisirungen: $r_1 = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und der bekannten[1] Entwicklungen von $\cos(s\alpha)$ und $\sin(s\alpha)$:

$$\cos(s\alpha) = \cos^s\alpha - (s)_2 \cos^{s-2}\alpha \sin^2\alpha + \ldots,$$
$$\sin(s\alpha) = (s)_1 \cos^{s-1}\alpha \sin\alpha - (s)_3 \cos^{s-3}\alpha \sin^3\alpha + \ldots,$$

welche im vorliegenden Falle gemäss den Beziehungen:

$$\cos\alpha = \frac{a_0}{r_1},\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}{r_1} = \frac{\sqrt{d_1}}{r_1}$$

die rein algebraischen Formen:

$$\cos(s\alpha) = \frac{1}{r_1^s}\{a_0^s - (s)_2 a_0^{s-2}(\sqrt{d_1})^2 + \ldots\},$$
$$\sin(s\alpha) = \frac{1}{r_1^s}\{(s)_1 a_0^{s-1}\sqrt{d_1} - (s)_3 a_0^{s-3}(\sqrt{d_1})^3 + \ldots\}$$

annehmen. — Vertauscht man nämlich in (56) r_1 mit 1, α mit $\frac{1}{2}\pi$, so entsteht für I^s die Gleichung:

$$(64)\ldots I^s = \cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right) + I\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right),$$

d. h. es wird — unter $\mathfrak{k}$ irgend ein Glied der Zahlenreihe: 0, 1, 2, 3, ... gedacht — allgemein:

$$I^{4\mathfrak{k}} = +1,\quad I^{4\mathfrak{k}+1} = I,\quad I^{4\mathfrak{k}+2} = -1,\quad I^{4\mathfrak{k}+3} = -I,$$

wonach der jeweilige Werth von I^s für alle geradzahligen Specialisirungen von s mit jenem von i^s übereinstimmt und, wenn s eine ungerade Zahl ist, zu I in derselben Relation steht, welche im letzteren Falle i^s mit i verbindet.

Im Anschlusse hieran lässt sich jetzt der Ausdruck:

$r_1^s\{\cos(s\alpha) + I\sin(s\alpha)\}$ durch die Reihe:

$$a_0^s + (s)_1 a_0^{s-1}(I\sqrt{d_1}) + (s)_2 a_0^{s-2}(I\sqrt{d_1})^2 + (s)_3 a_0^{s-3}(I\sqrt{d_1})^3 + \ldots$$

[1] Ich schreibe für die aufeinanderfolgenden Binomialcoëfficienten statt der gegenwärtig üblichen Symbole: $s_1, s_2, s_3 \ldots$ deshalb die älteren: $(s)_1, (s)_2, (s)_3, \ldots$, weil ein einfacher Index diese Coëfficienten von anderen, gleich signirten Grössen zu wenig scharf trennen würde.

darstellen, während die linke Seite von (56) in:

$$\left\{r_1\left(\frac{a_0}{r_1}+I\frac{\sqrt{d_1}}{r_1}\right)\right\}^s=(a_0+I\sqrt{d_1})^s$$

transformirt werden kann. Die Äquivalenz beider Ausdrücke lehrt mithin, dass der jeweilige Werth von Z_1^s, als Function von a_0 und $I\sqrt{d_1}$ betrachtet, nach denselben Gesetzen gebildet ist, welche kraft des binomischen Lehrsatzes für die s-te Potenz eines reellen algebraischen Binomes gelten. Auf diese Art bestehen für die aufeinanderfolgenden Potenzen von Z_1 mit positivem, ganzzahligen Exponenten die Formeln:

$$Z_1^2=a_0^2-d_1+2a_0I\sqrt{d_1},$$
$$Z_1^3=a_0(a_0^2-3d_1)+(3a_0^2-d_1)I\sqrt{d_1},$$
$$Z_1^4=a_0^4-6a_0^2d_1+d_1^2+4a_0(a_0^2-d_1)I\sqrt{d_1},$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

und allgemein für Z_1^n die relativ einfache Gleichung:

$$(65)\ldots Z_1^n=$$
$$=\sum_{s=0}^{s=n'}(-1)^s(n)_{2s}a_0^{n-2s}d_1^s+I\sqrt{d_1}\sum_{s=0}^{s=n''}(-1)^s(n)_{2s+1}a_0^{n-2s-1}d_1^s,$$

in welcher die oberen Grenzen beider Summen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt, die Werthe:

$$n'=\frac{1}{2}n,\ n''=\frac{1}{2}n-1 \text{ beziehungsweise: } n'=n''=\frac{1}{2}(n-1)$$

zu erhalten haben. Reducirt man also schliesslich das Product: $I\sqrt{d_1}$ auf seine ursprüngliche Form: $a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_ni_n$ und setzt der Kürze wegen:

$$\sum_{s=0}^{s=n'}(-1)^s(n)_{2s}a_0^{n-2s}d_1^s=K_n,\ \sum_{s=0}^{s=n''}(-1)^s(n)_{2s+1}a_0^{n-2s-1}d_1^s=L_n,$$

so ergibt sich für Z_1^n die nachstehende explicite Definition:

Eine gegebene n-fach complexe Zahl: Z_1 auf irgend eine positive ganzzahlige Potenz: n erheben, heisst, derselben eine einzige, jederzeit n-fach complexe Zahl:

$$K_n+L_n(a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_ni_n)=K_n+L_n(Z_1-a_0)$$

zuordnen. Infolgedessen gilt speciell für $a_0 = 0$ die einfache Doppelgleichung:

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n)^n = \begin{cases} (-d_1)^{\frac{1}{2}n} & \text{n gerade} \\ (-d_1)^{\frac{1}{2}(n-1)} I\sqrt{d_1} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

d. h. die n-te Potenz jeder n-fach imaginären Zahl ist reell oder n-fach imaginär, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt.

Unsere letzten Resultate ermöglichen nunmehr auch eine vollständige Beantwortung der Frage nach den jeweiligen Werthen der n-ten Wurzel aus Z_1, — sie mag, entsprechend der üblichen Symbolik, mit: $\sqrt[n]{Z_1}$ bezeichnet werden — falls wir unter $\sqrt[n]{Z_1}$ in rein formaler Erweiterung der bekannten Definition der n-ten Wurzel für gewöhnliche complexe Zahlen allgemein jede Zahl:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 i_1 + \mathfrak{a}_2 i_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n i_n$$

verstehen, deren n-te Potenz mit Z_1 zusammenfällt.

Da nämlich $\mathfrak{Z}^n$ kraft der Formel (65) und den an sie geknüpften Schlüssen nach Einführung der Hilfsgrössen:

$$\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \ldots + \mathfrak{a}_n^2 = \mathfrak{b}_1,$$

$$\sum_{s=0}^{s=n'} (-1)^s (n)_{2s}\, \mathfrak{a}_0^{n-2s} \mathfrak{b}_1^s = \mathfrak{R}_n, \quad \sum_{s=0}^{s=n''} (-1)^s (n)_{2s+1}\, \mathfrak{a}_0^{n-2s-1} \mathfrak{b}_1^s = \mathfrak{L}_n$$

die Darstellungsweise:

$$\mathfrak{Z}^n = \mathfrak{R}_n + \mathfrak{L}_n (\mathfrak{a}_1 i_1 + \mathfrak{a}_2 i_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n i_n)$$

gestattet, involvirt die Erfüllung der Bedingung: $\mathfrak{Z}^n = Z_1$ gemäss unserer Definition der Gleichheit zweier n-fach complexer Zahlen unmittelbar die $(n+1)$ Beziehungen:

$$\mathfrak{R}_n = a_0, \quad \mathfrak{a}_1 \mathfrak{L}_n = a_1, \quad \mathfrak{a}_2 \mathfrak{L}_n = a_2, \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{L}_n = a_n,$$

welche ihrerseits die fortlaufende Proportion:

$$\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2 : \ldots : \mathfrak{a}_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$$

zur nothwendigen Folge haben, d. h. $\mathfrak{Z}$ als eine mit Z_1 complanare Zahl charakterisiren. Sind aber die Zahlen: $\mathfrak{Z}$ und Z_1 complanar, so besitzen sie unter allen Umständen einen und

denselben Inclinationsfactor: I, dessen Absonderung in $\mathfrak{Z}$ der gesuchten Zahl jedenfalls die Form:

$$\mathfrak{Z} = \rho\,(\cos\zeta + I\sin\zeta)$$

verleiht. Die Anwendung der Gleichung (56) auf $\mathfrak{Z}^n$ führt daher im vorliegenden Falle unmittelbar zu den beiden Relationen:

$$\rho^n\cos(n\zeta) = r_1\cos\alpha, \quad \rho^n\sin(n\zeta) = r_1\sin\alpha,$$

deren Auflösung im Einklange mit bekannten Resultaten der Theorie einfach complexer Zahlen eine einzige Substitution für ρ, nämlich: $\rho = r_1^{\frac{1}{n}}$ und n von einander verschiedene Werthe für $\cos\zeta + I\sin\zeta$ mit den Argumenten:

$$\zeta_1 = \frac{\alpha}{n},\ \zeta_2 = \frac{\alpha+2\pi}{n},\ \ldots\zeta_n = \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}$$

liefert. Hiemit erscheint zugleich die gesuchte explicite Definition von $\sqrt[n]{Z_1}$ vollständig präcisirt; sie lautet: Aus einer gegebenen n-fach complexen Zahl: Z_1 die n-te Wurzel ausziehen, heisst, derselben im Ganzen n — jederzeit n-fach complexe Zahlen:[1]

$$r_1^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\alpha}{n} + I\sin\frac{\alpha}{n}\right\},\ r_1^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\alpha+2\pi}{n} + I\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\right\},$$

$$\ldots r_1^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} + I\sin\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}\right\}$$

zuordnen, so dass speciell der n-ten Wurzel aus $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n$ folgendes Werthsystem entspricht:

$$(\sqrt{d_1})^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\pi}{2n} + I\sin\frac{\pi}{2n}\right\},\ (\sqrt{d_1})^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{5\pi}{2n} + I\sin\frac{5\pi}{2n}\right\},$$

$$\ldots(\sqrt{d_1})^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{(4n-3)\pi}{2n} + I\sin\frac{(4n-3)\pi}{2n}\right\}.$$

---

[1] Dieselben verhalten sich kraft der in den Formeln (26) und (56) begründeten Gleichung:

$$\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + I\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{\alpha}{n} + I\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + I\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

zu einander wie die successiven Potenzen einer und derselben, von α unabhängigen, n-fach complexen Zahl: $\cos\frac{2\pi}{n} + I\sin\frac{2\pi}{n}$.

Gemäss dieser Definition kommen der n-ten Wurzel aus Z_1^m:

$$\sqrt[n]{Z_1^m} = \sqrt[n]{r_1^m\{\cos(m\alpha)+I\sin(m\alpha)\}},$$

sobald m und n relative Primzahlen vorstellen, ebenfalls n —von einander verschiedene Werthe zu, welche aus dem Producte:

$$r_1^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\alpha+2\mathfrak{k}_1\pi}{n}+I\sin\frac{m\alpha+2\mathfrak{k}_1\pi}{n}\right\}$$

durch die Substitutionen: $\mathfrak{k}_1 = 0, 1, 2, \ldots n-1$ hervorgehen, sich aber auch direct auf die m-te Potenz von $\mathfrak{Z}$ beziehen lassen.

Zur Einsicht in die Art dieses Zusammenhanges führt die Überlegung, dass die n Werthe von $\mathfrak{Z}^m$ als der m-ten Potenz eines Ausdruckes von der Gestalt:

$$r_1^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\alpha+2\mathfrak{k}_1\pi}{n}+I\sin\frac{\alpha+2\mathfrak{k}_1\pi}{n}\right\}$$

mittelst derselben Substitutionen für $\mathfrak{k}_1$ aus dem Producte:

$$r_1^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\alpha+2\mathfrak{k}_1 m\pi}{n}+I\sin\frac{m\alpha+2\mathfrak{k}_1 m\pi}{n}\right\}$$

resultiren. Da nun die Division von 0, m, 2m, ...(n—1)m durch n unter den bezüglich m und n gemachten Annahmen lauter von einander verschiedene Reste liefert, können die, den beiden Quotienten:

$$\frac{m\alpha+2\mathfrak{k}_1\pi}{n}, \quad \frac{m\alpha+2\mathfrak{k}_1 m\pi}{n}$$

für die erwähnten Specialisirungen von $\mathfrak{k}_1$ entspringenden Werthe — abgesehen von ihrer verschiedenen Reihenfolge — nur um ganze Vielfache von 2π von einander differiren, welche Unterschiede für sämmtliche goniometrische Functionen derselben entfallen. Infolgedessen bestimmen die beiden, für $\sqrt[n]{Z_1^m}$ und $\mathfrak{Z}^m$ aufgestellten Producte ein und dasselbe Werthsystem, d. h. es ist allgemein:

$$(66)\ldots\sqrt[n]{Z_1^m} = (\sqrt[n]{Z_1})^m.$$

Die vorliegende Gleichung lässt ausserdem klar erkennen, wie die noch ausständige Definition der Potenz: $Z_1^{\frac{m}{n}}$ formulirt werden muss, um die ursprünglich für positive ganzzahlige Exponenten abgeleiteten Relationen: (57), (58), (59), (60), (61) und (63) mit Hilfe derselben Schlüsse, deren man sich zu diesem Zwecke

in der Theorie der gewöhnlichen complexen Zahlen bedient, auf beliebige gebrochene Potenzexponenten ausdehnen zu können.

Verstehen wir nämlich in vollständigem Anschlusse an die bekannte Auffassung der Potenzgrösse: $r_1^{\frac{n}{}}$ unter $Z_1^{\frac{m}{n}}$ die n-te Wurzel aus Z_1^m, so involvirt eine derartige Definition kraft (66) zugleich die folgende:

$$(67)\ldots Z_1^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{Z_1})^m,$$

wonach die Rechnungsoperationen mit solchen Potenzgrössen, da sämmtliche Werthe von $\sqrt[n]{Z_1}$ mit Z_1 complanar bleiben, auf gleichartige Operationen mit ganzzahligen Potenzen complanarer Zahlen zurückzuführen, und die gewonnenen Resultate wirklich in dem oben präcisirten Sinne zu interpretiren sind.

Auf Grundlage unserer letzten Definition ergibt sich schliesslich auch die Bedeutung der Potenzgrösse mit beliebigem irrationalen Exponenten: $\mathfrak{p}: Z_1^{\mathfrak{p}}$, wenn wir hiebei von der, die betreffende Irrationalzahl definirenden Reihe von rationalen Zahlen: $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$ ausgehen, und $Z_1^{\mathfrak{p}}$ consequent als Grenzwerth der Grössenreihe: $Z_1^{\frac{m_1}{n_1}}, Z_1^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots$ betrachten. Die Moduli und Argumente ihrer einzelnen Glieder sind dann:

$$r_1^{\frac{m_1}{n_1}},\ \frac{m_1(\alpha+2\mathfrak{k}\pi)}{n_1};\ r_1^{\frac{m_2}{n_2}},\ \frac{m_2(\alpha+2\mathfrak{k}\pi)}{n_2};\ldots$$
$$(\mathfrak{k}=0,\ 1,\ 2,\ldots n_1-1,\ n_1,\ n_1+1,\ldots n_2-1,\ n_2,\ldots),$$

so dass beim Übergange zur Grenze: $\mathfrak{p}$ die Gleichung:

$$(68)\ldots Z_1^{\mathfrak{p}} = r_1^{\mathfrak{p}}\{\cos(\mathfrak{p}[\alpha+2\mathfrak{k}\pi]) + I\sin(\mathfrak{p}[\alpha+2\mathfrak{k}\pi])\}$$

resultirt,[1] in welcher jedem positiven ganzzahligen Werthe von $\mathfrak{k}$ ein charakteristischer Werth des Factors von $r_1^{\mathfrak{p}}$ zugehört. Auf diese Art liefert jede Potenzirung von Z_1 mit irrationalem Exponenten unendlich viele n-fach complexe Zahlen.

---

[1] Die Gleichung (68) wird hienach durch dieselben Überlegungen begründet, welche in der Lehre von den einfach complexen Zahlen (vergl. z. B. das 1881 zu Leipzig erschienene Werk v. A. Harnack: „Die Elemente der Differential- und Integralrechnung", p. 123, 124) die Feststellung der Bedeutung von $\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^{\mathfrak{p}}$ ermöglichen.

Hiemit erscheint die Discussion des Potenzbegriffes, insoweit derselbe noch direct aus elementaren algebraischen Operationen abzuleiten ist,[1] vollendet, und begründen die Resultate unserer diesbezüglichen Betrachtungen nunmehr folgende Sätze:

(I) Die q-te Potenz einer beliebigen endlichen, n-fach complexen Zahl: Z_1 wird, so lange ihr Exponent: q der beschränkenden Bedingung: $-\infty < q < +\infty$ unterworfen bleibt, ausschliesslich für $q = 0$ reell, während sie für alle übrigen Specialisirungen von q, je nachdem dieselben der Reihe der ganzen oder gebrochenen oder irrationalen Zahlen angehören, eine einwerthige oder mehrwerthige, beziehungsweise unendlich vielwerthige n-fach complexe Grösse vorstellt.

(II) Die Regeln, nach welchen gleiche oder verschiedene Potenzen von Z_1 multiplicirt oder dividirt, beziehungsweise potenzirt werden, bleiben für sämmtliche Werthe von n dieselben und führen stets auf Zahlen, welche mit der gegebenen Zahl Z_1 complanar sind.

(III) Der Modulus von Z_1^q besitzt für jede hier in Betracht kommende Specialisirung von q nur einen einzigen Werth: r_1^q, so dass sämmtliche Punkte, welche der Zahl: Z_1 durch eine Potenzirung mit dem Exponenten: q zugeordnet werden, in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von der Gleichung:

$$(69)\ldots\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2=r_1^{2q}$$

liegen, z. B. also für $n = 2$ Oberflächenpunkte einer, aus dem Ursprunge des betreffenden dreiaxigen Coordinatensystems mit dem Radius: r_1^q beschriebenen Kugel bilden.

Das Gesammtresultat unserer bisherigen Untersuchungen ist mithin ein relativ einfaches; wir sind zu der Einsicht gelangt, dass alle algebraischen Grundoperationen sich auf dem hier eingeschlagenen Wege universell verallgemeinern lassen, wobei die Regeln, welche bezüglich der Ausführung dieser Rechnungsoperationen mit einfach complexen Zahlen gelten, nach Absonderung des Inclinationsfactors I unmittelbar auf n-fach

[1] Die Discussion des allgemeinen Potenzbegriffes: $Z_1^{Z_2}$ gehört bereits in die Theorie der wichtigsten einfachen Functionen eines n-fach complexen Argumentes.

complexe complanare Zahlen übertragen werden können. Ausserdem haben die zur Feststellung der letzteren Thatsache dienenden Entwicklungen gelehrt, dass die Grösse I bei allen in Betracht gezogenen Verknüpfungen derartiger Zahlen dieselbe Rolle spielt, welche dem Factor i in der Lehre von den gewöhnlichen complexen Zahlen zufällt.

Wir überzeugten uns nämlich allgemein von der Giltigkeit der Gleichung: $I^2 = -1$, bei deren Herleitung wir jedoch keineswegs genöthigt wurden, die Unterscheidungszeichen $i_1, i_2, \ldots i_n$ willkürlich als irgend welche neue imaginäre Einheiten zu definiren. Es war vielmehr die erwähnte Relation nur eine logische Consequenz jener Verknüpfungsgesetze für die Coëfficienten von I, welche aus unserer Definition des Productes zweier complanarer n-fach complexer Zahlen für den Specialfall gleicher, n-fach imaginärer Factoren resultirten. In demselben Sinne bilden also auch die specielleren Beziehungen:

$$i_1^2 = -1, \; i_2^2 = -1, \ldots i_n^2 = -1$$

lediglich den analytischen Ausdruck jener Regeln, nach welchen die Coëfficienten: $(+1)$, $(+1)$ je zweier gleicher, einfach imaginärer Zahlen bei Ausführung der Multiplicationen:

$$\{(+1)i_1\}\{(+1)i_1\}, \; \{(+1)i_2\}\{(+1)i_2\}, \ldots \{(+1)i_n\}\{(+1)i_n\}$$

mit einander zu verknüpfen sind. Dagegen wäre es widersinnig, die angeführten Relationen etwa noch als Bestimmungsgleichungen für die Symbole: $i_1, i_2, \ldots i_n$ zu betrachten; denn da die letzteren, sachlich genommen, Unterscheidungszeichen für verschiedene Coordinatenrichtungen vorstellen, darf man sie selbstverständlicher Weise nicht gleichzeitig mit Zahlengrössen identificiren.

Von diesem Standpunkte aus muss schliesslich auch die bekannte, von Argand[1] herrührende Auffassungsweise der imaginären Einheit: $i = \sqrt{-1}$ als der mittleren geometrischen

[1] Argand geht hiebei (Gergonne's Annalen, IV. Bd. p. 135) von dem Analogieschlusse aus, dass die unmittelbar evidente Proportion: $(+1):(-1) = (-1):(+1)$ auch zur Aufstellung der Proportion:

$$(+1) : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : (-1)$$ berechtige.

Proportionalen zwischen der positiven und negativen Einheit[1] definitiv verworfen werden, welche Ansicht übrigens schon Servois[2] mit folgenden Worten nahegelegt hat: „Cette proposition: ‚la quantité $\pm a\sqrt{-1}$ est une moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre $+a$ et $-a$' équivaut à ces deux-ci, dont une ($\pm a\sqrt{-1}$ moyenne de grandeur entre $+a$ et $-a$) est évidente, et dont l'autre ($\pm a\sqrt{-1}$ moyenne de position entre $+a$ et $-a$) n'est pas prouvée, et renferme précisément le théorème dont il s'agit. Cela est d'autant plus fâcheux que tout le reste du mémoire porte sur ce premier théorème. Quant à M. Argand, il s'est contenté d'appuyer cette proposition sur une sorte d'analogie et de convenance. Or, il me paraît que, lorsqu'il s'agit de fonder une doctrine extraordinaire, opposée en quelque sorte aux principes reçus, dans une science telle que l'analise mathématique, la simple analogie n'est point un moyen suffisant."

§. 6.

Zweite Verallgemeinerung der Addition.

Alle in den §§. 1—4 entwickelten universellen Verallgemeinerungen algebraischer Grundoperationen entsprangen einer rein algebraischen, in je drei Relationen gegebenen Charakteristik derselben für den Specialfall: $n = 1$, so dass die fraglichen Coëfficienten des Resultates der betreffenden Grundoperation für den allgemeinen Fall n-fach complexer Zahlen immer erst nach Hinzufügung weiterer beschränkender Bedingungen vollständig bestimmt werden konnten.

Es liegt daher nahe, jene algebraische Charakteristik noch mit einer geometrischen zu combiniren, welche von Fall zu Fall die Aufstellung ebenso vieler Gleichungen ermöglicht, als unbekannte Coëfficienten vorhanden sind.

Zu diesem Zwecke gehe man von der Überlegung aus, dass alle, mit zwei einfach complexen Zahlen: Z_1, Z_2 vorgenom-

[1] Die schärfste Kritik dieser Behauptung findet sich in dem 1884 zu Leipzig erschienenen Werke von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring: „Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung und zugehörigen Geometrie", p. 30, 31.

[2] S. h. Gergonne's Annalen, IV. Bd., p. 228, 229.

menen Rechnungsoperationen denselben ausschliesslich solche Zahlen zuordnen, welche mit Z_1, Z_2 und dem Nullpunkte des Zahlensystems einer und derselben Ebene angehören. Betrachtet man nun das eben präcisirte Merkmal als ein universelles, d. h. als eine auch für n-fach complexe Zahlen geltende Eigenschaft des Resultates jeder Rechnungsoperation, so ergeben sich für sämmtliche algebraische Grundoperationen gewisse analytisch-geometrische Bedingungsgleichungen, deren typische Formen durch folgende einfache Erwägungen erhalten werden:

Denkt man sich in der hier angenommenen $(n+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit irgend eine, den Ursprung O durchsetzende Ebene gegeben, so wird dieselbe allgemein durch $(n-1)$ lineare Gleichungen zwischen $(n+1)$ veränderlichen Coordinaten: $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \xi_n$ analytisch beschrieben, welche im vorliegenden Falle für die Coordinaten des Punktes O in Identitäten übergehen müssen und infolgedessen stets die Darstellungsweise:

$$A_0\xi_0 + B_0\xi_{n-1} + C_0\xi_n = 0,\ A_1\xi_1 + B_1\xi_{n-1} + C_1\xi_n = 0,$$
$$\ldots A_{n-2}\xi_{n-2} + B_{n-2}\xi_{n-1} + C_{n-2}\xi_n = 0$$

gestatten. Die weitere Forderung, dass jene Ebene überdies die, den beiden n-fach complexen Zahlen: Z_1, Z_2 zugeordneten Punkte: M_1, M_2 in sich aufzunehmen hat, liefert mithin nach Einführung der Abkürzungen:

$$a_s b_n - a_n b_s = h_s,\ a_{n-1} b_s - a_s b_{n-1} = k_s$$

die nachstehenden, von allen unbestimmten Coëfficienten befreiten Relationen:

$$h_{n-1}\xi_0 - h_0\xi_{n-1} = k_0\xi_n,\ h_{n-1}\xi_1 - h_1\xi_{n-1} = k_1\xi_n,$$
$$\ldots h_{n-1}\xi_{n-2} - h_{n-2}\xi_{n-1} = k_{n-2}\xi_n,$$

deren constante Parameter, da die Determinanten;

$$\begin{vmatrix} a_s & a_s & b_s \\ a_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & a_n & b_n \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_s & a_s & b_s \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & a_n & b_n \end{vmatrix}$$

infolge der Gleichheit je zweier Colonnen identisch verschwinden, für jeden in Betracht kommenden Werth von s den Beziehungen:

$$(\mathfrak{p})\ldots\begin{cases} a_s h_{n-1} - a_{n-1} h_s = a_n k_s, \\ b_s h_{n-1} - b_{n-1} h_s = b_n k_s \end{cases}$$

Genüge leisten. Hiemit erscheinen zugleich Anzahl und Typus der fraglichen Bedingungsgleichungen bestimmt; denn sobald das Resultat irgend einer operativen Verknüpfung zweier n-fach complexer Zahlen die früher ausgesprochene Eigenschaft besitzt, müssen seine Coëfficienten: $x_0, x_1, \ldots x_n$, an Stelle von $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ substituirt, natürlich auch die zwischen diesen Grössen vorhandenen Relationen befriedigen, d. h. für $s = 0, 1, 2, \ldots n-2$ die Bedingung:

$$(70)\ldots h_{n-1} x_s - h_s x_{n-1} = k_s x_n$$

erfüllen. Es sind demzufolge für jede algebraische Grundoperation nur mehr zwei Ergänzungsgleichungen zulässig, bei deren Auswahl wir speciell in Bezug auf das Addiren und Multipliciren gemäss unserer dritten, eingangs aufgestellten Forderung lediglich auf jene Relationen beschränkt bleiben, welche die Commutativität beider Summanden respective Factoren analytisch ausdrücken. Auf diese Art erhalten die früher als Fundamentalbedingungen verwendeten Modulformeln gegenwärtig den Charakter accessorischer Gleichungen und können daher bedingungsweise ihre Giltigkeit verlieren, ohne deshalb die Brauchbarkeit der betreffenden universellen Verallgemeinerung aufzuheben.

Ausserdem ist leicht darzuthun, dass das allgemeine Problem der Coëfficientenbestimmung in der Folge nur die Auflösung von je zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen erheischen wird.

Bedient man sich nämlich — unter u, v zwei beliebige variable Hilfsgrössen gedacht — durchgängig der Substitutionen:

$$(\mathfrak{q})\ldots\begin{cases} x_0 = a_0 u + b_0 v, \quad x_1 = a_1 u + b_1 v, \\ x_2 = a_2 u + b_2 v, \ldots x_n = a_n u + b_n v, \end{cases}$$

so verwandelt sich (70) in:

$$(a_s h_{n-1} - a_{n-1} h_s - a_n k_s) u + (b_s h_{n-1} - b_{n-1} h_s - b_n k_s) v = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf die Beziehungen (p) hervorgeht, dass die jeweiligen Bestimmungsgleichungen der betreffenden Coëfficienten insgesammt befriedigt werden, falls man die beiden,

der $(n-1)$-fachen Fundamentalbedingung (70) zugesellten Ergänzungsgleichungen durch passende Wahl von u und v erfüllen kann.

Dieselben besitzen speciell für die erste algebraische Grundoperation eine ungemein einfache Gestalt, indem die Einführung der Substitutionsreihe (q) in (5) und (6) augenscheinlich die Relationen:

$$(71)\ldots r_1^2 u + m v = r_1^2 + m, \quad (72)\ldots m u + r_2^2 v = r_2^2 + m$$

nach sich zieht, welche nur eine einzige Lösung: $u = v = 1$ darbieten.

Hieraus wird ersichtlich, dass die expliciten Definitionsgleichungen beider Verallgemeinerungen der Addition vollständig mit einander coïncidiren, und bleiben daher die in §. 1 aufgestellten Hauptsätze (I), (II) und (III) auch für die zweite Generalisation allgemein giltig.

§. 7.

Zweite Verallgemeinerung der Subtraction.

Führt man die in §. 2 angegebene Buchstabenvertauschung zunächst in der $(n-1)$-fachen Fundamentalbedingung (70) aus, so kann die hiebei erhaltene Relation:

$$a_s(b_n\xi_{n-1} - b_{n-1}\xi_n) - a_{n-1}(b_n\xi_s - b_s\xi_n) = a_n(b_s\xi_{n-1} - b_{n-1}\xi_s)$$

kraft den Bedeutungen von h_s, k_s und h_{n-1} unmittelbar in:

$$(73)\ldots h_{n-1}\xi_s - h_s\xi_{n-1} = k_s\xi_n$$

transformirt werden, wonach den fraglichen Coëfficienten: $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ des Resultates der Subtraction ebenfalls die Formen: $a_0 u + b_0 v$, $a_1 u + b_1 v, \ldots a_n u + b_n v$ zukommen, und die charakteristischen Bestimmungsgleichungen für u, v hier aus (5) und (6) durch Vertauschung von:

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots \quad a_n; \qquad x_0, x_1, \ldots x_n \text{ mit:}$$
$$a_0 u + b_0 v, \ a_1 u + b_1 v, \ldots a_n u + b_n v; \ a_0, a_1, \ldots a_n$$

hervorgehen. Einige leichte Umformungen der beiden diesbezüglichen Resultate liefern dann die Relationen:

$$(74)\ldots mu+r_2^2v=m-r_2^2,$$

$$(75)\ldots r_1^2u^2+2muv+r_2^2v^2-r_1^2u-mv=r_2^2-m,$$

aus welchen sich für u und v schliesslich die quadratischen Beziehungen:

$$pqu(u-1)=0,\ pq\{r_2^2v^2-(m-2r_2^2)v-(m-r_2^2)\}=0$$

ergeben. Den Wurzeln der letzteren:

$$u_1=+1,\ v_1=-1;\ u_2=0,\ v_2=\frac{1}{r_2^2}(m-r_2^2)$$

entsprechen die beiden Werthsysteme:

$$\xi_0'=a_0-b_0,\ \xi_1'=a_1-b_1,\ldots\xi_n'=a_n-b_n;$$

$$\xi_0''=\frac{b_0}{r_2^2}(m-r_2^2),\ \xi_1''=\frac{b_1}{r_2^2}(m-r_2^2),\ldots\xi_n''=\frac{b_n}{r_2^2}(m-r_2^2),$$

von welchen jedoch nur das erste die im Begriffe des Subtrahirens gelegene Forderung: $(Z_1-Z_2)+Z_2=Z_1$ erfüllt. Infolgedessen resultirt für die Differenz: Z_1-Z_2 auch hier lediglich die Formel (12), d. h. dieselbe explicite Definitionsgleichung der Subtraction, zu welcher wir durch Auflösung der in §. 2 abgeleiteten Relationen gelangt sind.

§. 8.

Zweite Verallgemeinerung der Multiplication.

Als implicite Definitionsgleichungen dieser Grundoperation dienen hier die $(n-1)$-fache Fundamentalbedingung (70) im Vereine[1] mit den Beziehungen (18) und (19), aus welchen bei

---

[1] Combinirt man (70) und eine der beiden Relationen (18) und (19), z. B. (18) mit (17), so ergeben sich für die fraglichen Coëfficienten des Productes: Z_1Z_2 die beiden reellen Werthsysteme:

$$x_0'=a_0b_0-(b_0r_1^2-a_0m)\sqrt{\frac{d_2}{pq}},\quad x_1'=a_1b_0-(b_1r_1^2-a_1m)\sqrt{\frac{d_2}{pq}},$$

$$\ldots x_n'=a_nb_0-(b_nr_1^2-a_nm)\sqrt{\frac{d_2}{pq}};$$

$$x_0''=a_0b_0+(b_0r_1^2-a_0m)\sqrt{\frac{d_2}{pq}},\quad x_1''=a_1b_0+(b_1r_1^2-a_1m)\sqrt{\frac{d_2}{pq}},$$

$$\ldots x_n''=a_nb_0+(b_nr_1^2-a_nm)\sqrt{\frac{d_2}{pq}},$$

Benützung der Substitutionsreihe (q) für u und v die beiden linearen Relationen:

$$(76)\ldots r_1^2 u + mv = b_0 r_1^2, \quad (77)\ldots mu + r_2^2 v = a_0 r_2^2$$

hervorgehen. Die den letzteren zugehörigen Werthe von u und v:

$$u = \frac{r_2^2}{pq}(b_0 r_1^2 - a_0 m), \quad v = \frac{r_1^2}{pq}(a_0 r_2^2 - b_0 m)$$

enthalten ausschliesslich die Grössen: a_0, b_0, m, r_1, r_2, so dass die Aggregate: $a_0 u + b_0 v$, $a_1 u + b_1 v$, $\ldots$ $a_n u + b_n v$ bereits in ihren ursprünglichen Formen der vierten, eingangs aufgestellten Forderung genügen und daher eine zweite, wesentlich neue universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens begründen. Dieselbe definirt das Product $Z_1 Z_2$ auch für diplanare Factoren als eine einwerthige, höchstens n-fach complexe Zahl:

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \ldots + x_n i_n,$$

deren Coëfficienten sich jederzeit rational durch $a_0, a_1, \ldots a_n; b_0, b_1, \ldots b_n$ ausdrücken lassen und, wie bei der ersten Generalisation, in drei verschiedenen Formen dargestellt werden können.

Ihre erste, einfachste Darstellungsweise besteht in den Gleichungen:

$$x_0 = \frac{b_0 d'' r_1^2 + a_0 d' r_2^2}{pq}, \quad x_1 = \frac{b_1 d'' r_1^2 + a_1 d' r_2^2}{pq},$$

$$x_2 = \frac{b_2 d'' r_1^2 + a_2 d' r_2^2}{pq}, \quad \ldots x_n = \frac{b_n d'' r_1^2 + a_n d' r_2^2}{pq},$$

welche insgesammt die beiden Hilfsfunctionen;

$$d' = b_0 r_1^2 - a_0 m, \quad d'' = a_0 r_2^2 - b_0 m$$

---

welche die Forderung der Commutativität beider Factoren: Z_1, Z_2 augenscheinlich nicht erfüllen und selbst für complanare Zahlen von den Nennern: p, q abhängig bleiben. Infolge des letzteren Umstandes ist es natürlich auch unmöglich, die in den Fällen: $p > 0$, $q = 0$ respective $p = 0$, $q > 0$ eintretende Unbestimmtheit bei sämmtlichen Coëfficienten zu beseitigen, so dass eine nähere Untersuchung dieser Verallgemeinerung des Multiplicirens nur in theoretischer Hinsicht einiges Interesse bieten würde.

enthalten, aber noch keine tiefere Einsicht in die Beschaffenheit von $x_0, x_1, \ldots x_n$ gewähren.

Eine solche wird vielmehr erst durch jene Relationen vermittelt, welche sich nach Einführung der Differenzen: d, d_1, d_2 in $x_0, x_1, \ldots x_n$ ergeben:

$$x_0 = a_0 b_0 - d + \frac{m}{pq}(d_1 d_2 - d^2),$$

$$x_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 + \frac{m}{pq}\{b_0(a_1 d - b_1 d_1) + a_0(b_1 d - a_1 d_2)\},$$

$$x_2 = a_2 b_0 + a_0 b_2 + \frac{m}{pq}\{b_0(a_2 d - b_2 d_1) + a_0(b_2 d - a_2 d_2)\},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$x_n = a_n b_0 + a_0 b_n + \frac{m}{pq}\{b_0(a_n d - b_n d_1) + a_0(b_n d - a_n d_2)\}.$$

Dieselben lehren nämlich unter Hinzuziehung der Identität:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2m}{pq},$$

dass $x_0, x_1, \ldots x_n$ mit x_0', x_0''; x_1', x_1''; $\ldots x_n', x_n''$ durch die einfachen Formeln:

$$(\mathfrak{r})\ldots \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}(x_0' + x_0''), & x_1 = \frac{1}{2}(x_1' + x_1''), \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_2' + x_2''), \ldots x_n = \frac{1}{2}(x_n' + x_n'') \end{cases}$$

zusammenhängen, d. h.: die Coëfficienten des Productes zweiter Art sind die arithmetischen Mittel aus den gleichnamigen Coëfficienten des Productes erster Art und stimmen infolgedessen bei complanaren Factoren vollständig mit den letzteren überein.

Mit Hilfe dieses Satzes kann nunmehr auch die dritte, goniometrische Darstellungsweise von $x_0, x_1, \ldots x_n$ direct auf Grundlage der correspondirenden Gleichungen für x_0', x_0''; x_1', x_1''; $\ldots x_n', x_n''$ gefunden werden, wobei man fast ohne Rechnung folgende Resultate erhält:

$$x_0 = r_1 r_2(\cos^2\tau - \cos^2\sigma), \quad x_1 = r_1 r_2(\cos\tau\cos\tau_1 - \cos\sigma\cos\sigma_1),$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$x_n = r_1 r_2(\cos\tau\cos\tau_n - \cos\sigma\cos\sigma_n).$$

Transformirt man dieselben in:

$$x_0 = (r_1 \cos\tau)(r_2 \cos\tau) - (r_2 \cos\sigma)(r_1 \cos\sigma),$$
$$x_1 = (r_1 \cos\tau)(r_2 \cos\tau_1) - (r_2 \cos\sigma)(r_1 \cos\sigma_1),$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$x_n = (r_1 \cos\tau)(r_2 \cos\tau_n) - (r_2 \cos\sigma)(r_1 \cos\sigma_n),$$

so wird eine weitere Eigenthümlichkeit des Productes zweiter Art ersichtlich; denn da $\sigma, \sigma_1, \ldots \sigma_n$; $\tau, \tau_1, \ldots \tau_n$ gemäss früheren Betrachtungen als Winkel zweier gerader Linien mit den Halbaxen $0J_0, 0J_1, \ldots 0J_n$ aufzufassen sind, repräsentiren $x_0, x_1, \ldots x_n$ zufolge unserer letzten Ergebnisse stets binomische algebraische Summen von Projectionen der beiden Radienvectoren: r_1, r_2 auf zwei orthogonale Axensysteme mit gleichem Ursprunge: O, welche nur für $n=1$ mit dem gegebenen Axensysteme zusammenfallen, hingegen für alle übrigen Werthe von n erst durch Drehung um O mit demselben zur Coïncidenz gebracht werden können.

Es erübrigt jetzt noch die Berechnung des Modulus: $\dot{r}$ von $Z_1 Z_2$, welche nach Verwerthung der Identität:

$$d''^2 r_1^2 + d'^2 r_2^2 + 2d'd''m = pq(b_0^2 r_1^2 + a_0^2 r_2^2 - 2a_0 b_0 m) = pq(b_0 d' + a_0 d'')$$

für $\dot{r}$ den interessanten Ausdruck:

$$(78)\ldots \dot{r} = r_1 r_2 \sqrt{\frac{b_0 d' + a_0 d''}{pq}}$$

liefert. Hienach bleibt der Modulus des Productes zweiter Art kraft der weiteren Identität:[1]

$$pq - (b_0 d' + a_0 d'') = d_1 d_2 - d^2 =$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + \ldots + (a_{n-2} b_n - a_n b_{n-2})^2 +$$
$$+ (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2$$

nur für: $a_1 b_2 = a_2 b_1$, $a_1 b_3 = a_3 b_1, \ldots a_{n-1} b_n = a_n b_{n-1}$ d. h. bei complanaren Factoren gleich $r_1 r_2$, während er für diplanare n-fach complexe Factoren stets zwischen 0 und $r_1 r_2$ gelegen

[1] Dieselbe lehrt zugleich, dass jedes Product von der Gestalt:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

als Summe von $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ Quadraten dargestellt werden kann.

ist[1] und für $a_0 = b_0 = 0$, $pq > 0$ d. h. für diplanare, n-fach imaginäre Factoren sich auf Null reducirt.

Die letztgenannte Eigenschaft lässt zugleich die hervorragendste Eigenthümlichkeit des Productes zweiter Art klar erkennen; denn sie involvirt mit Nothwendigkeit die Folgerung, dass ein Product zweier diplanarer Factoren verschwinden kann, ohne dass einer der beiden Factoren gleich Null wird.

Um im Anschlusse hieran auch jene Eigenschaften kennen zu lernen, welche die zweite universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens in ihrer Anwendung auf mehr als zwei n-fach complexe Zahlen besitzt, empfiehlt sich des leichteren Vergleiches wegen derselbe Entwicklungsgang, durch welchen wir im §. 3 zu den Hauptsätzen (I*), (II*) und (III*) gelangt sind.

Wir beschränken uns demgemäss im Folgenden gleichfalls auf die Ermittlung von Δ und P für drei beliebige bicomplexe Zahlen: Z_1, Z_2, Z_3, wobei hervorzuheben ist, dass die in Δ und P auftretenden Producte: Z_1Z_2, Z_1Z_3, Z_2Z_3, nunmehr als Producte zweiter Art lauter einwerthige bicomplexe Ausdrücke.

$$x+yi_1+zi_2, \quad x'+y'i_1+z'i_2, \quad x''+y''i_1+z''i_2$$

mit den Modulis:

$$r_1r_2\sqrt{\frac{k^2+l^2}{pq}}, \quad r_1r_3\sqrt{\frac{k_1^2+l_1^2}{p_1q_1}}, \quad r_2r_3\sqrt{\frac{k_2^2+l_2^2}{p_2q_2}}$$

repräsentiren und bei den hier durchzuführenden Rechnungen am zweckmässigsten in den Formen:

$$\left(\bar{x}+\frac{h^2m}{pq}\right)+\left(\bar{y}+\frac{hkm}{pq}\right)i_1+\left(\bar{z}+\frac{hlm}{pq}\right)i_2,$$

$$\left(\bar{x}'+\frac{h_1^2m_1}{p_1q_1}\right)+\left(\bar{y}'+\frac{h_1k_1m_1}{p_1q_1}\right)i_1+\left(\bar{z}'+\frac{h_1l_1m_1}{p_1q_1}\right)i_2,$$

$$\left(\bar{x}''+\frac{h_2^2m_2}{p_2q_2}\right)+\left(\bar{y}''+\frac{h_2k_2m_2}{p_2q_2}\right)i_1+\left(\bar{z}''+\frac{h_2l_2m_2}{p_2q_2}\right)i_2$$

verwendet werden.

---

[1] Für $n=2$ ist dieser Satz auch einer anschaulichen geometrischen Interpretation fähig, indem die bicomplexe Zahl:

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(y_1+y_2)i_1+\frac{1}{2}(z_1+z_2)i_2$$

Auf Grundlage dieser Darstellungen ergibt sich zunächst für Δ folgende Gleichung:

$$(79)\ldots\ \Delta = -\left\{\frac{h_1^2 m_1}{p_1 q_1} + \frac{h_2^2 m_2}{p_2 q_2} - \frac{h'^2 m'}{r^2 r_3^2 - m'^2}\right\} -$$
$$-\left\{\frac{h_1 k_1 m_1}{p_1 q_1} + \frac{h_2 k_2 m_2}{p_2 q_2} - \frac{h' k' m'}{r^2 r_3^2 - m'^2}\right\} i_1 -$$
$$-\left\{\frac{h_1 l_1 m_1}{p_1 q_1} + \frac{h_2 l_2 m_2}{p_2 q_2} - \frac{h' l' m'}{r^2 r_3^2 - m'^2}\right\} i_2,$$

d. h. Δ ist für die zweite Verallgemeinerung stets eine einwerthige, höchstens bicomplexe Grösse, welche nur für $h_1 = h_2 = 0$, also unter denselben Bedingungen verschwindet, unter welchen sich die Beziehung (29) auf: $\Delta = 0$ reducirt hat.

Während hienach zu einer übersichtlichen Formulirung von Δ keinerlei neue Hilfsfunctionen erforderlich waren, können die drei, im vorliegenden Falle resultirenden Darstellungen von P, nämlich:

$$(Z_1 Z_2) Z_3 = (x) + (y) i_1 + (z) i_2, \quad (Z_1 Z_3) Z_2 = (x') + (y') i_1 + (z') i_2,$$
$$(Z_2 Z_3) Z_1 = (x'') + (y'') i_1 + (z'') i_2$$

nur dann in leicht discutirbaren Formen wiedergegeben werden, wenn man ausser den bereits definirten Aggregaten: (a), (b), (c) noch folgende fünfzehn Hilfsfunctionen[1] einführt:

$$(h) = (a_1 h_2 + a_2 h_1) pq + (c_3 k - b_3 l) hm,$$
$$(h_1) = (a_3 h - a_1 h_2) p_1 q_1 + (c_2 k_1 - b_2 l_1) h_1 m_1,$$
$$(h_2) = -(a_2 h_1 + a_3 h) p_2 q_2 + (c_1 k_2 - b_1 l_2) h_2 m_2;$$

$$(k) = (a_1 k_2 + a_2 k_1 + c_3 m) pq + (a_3 l - c_3 h) hm,$$
$$(k_1) = (a_3 k - a_1 k_2 + c_2 m_1) p_1 q_1 + (a_2 l_1 - c_2 h_1) h_1 m_1,$$
$$(k_2) = -(a_2 k_1 + a_3 k - c_1 m_2) p_2 q_2 + (a_1 l_2 - c_1 h_2) h_2 m_2;$$

---

offenbar dem Halbirungspunkte jener Sehne zugehört, welche die, den Zahlen: $x_1 + y_1 i_1 + z_1 i_2$, $x_2 + y_2 i_1 + z_2 i_2$ correspondirenden Punkte einer Kugelfläche von dem Radius $r_1 r_2$ verbindet.

[1] Dieselben sind im Gegensatze zu den, für das Product erster Art erforderlichen Hilfsfunctionen: (h'), (h_1'), (h_2'); $\ldots N''$, N_1'', N_2'', insgesammt rationale Ausdrücke der Coëfficienten von Z_1, Z_2, Z_3.

$$(l) = (a_1 l_2 + a_2 l_1 - b_3 m) pq + (b_3 h - a_3 k) hm,$$
$$(l_1) = (a_3 l - a_1 l_2 - b_2 m_1) p_1 q_1 + (b_2 h_1 - a_2 k_1) h_1 m_1,$$
$$(l_2) = -(a_2 l_1 + a_3 l + b_1 m_2) p_2 q_2 + (b_1 h_2 - a_1 k_2) h_2 m_2;$$

$$(m) = (a_1 m_2 + a_2 m_1 - a_3 m) pq + (a_3 h + b_3 k + c_3 l) hm,$$
$$(m_1) = (a_3 m + a_1 m_2 - a_2 m_1) p_1 q_1 + (a_2 h_1 + b_2 k_1 + c_2 l_1) h_1 m_1,$$
$$(m_2) = (a_2 m_1 + a_3 m - a_1 m_2) p_2 q_2 + (a_1 h_2 + b_1 k_2 + c_1 l_2) h_2 m_2;$$

$$N = (k^2 + l^2) p q r_1^2 r_2^2 r_3^2 - (m)^2, \quad N_1 = (k_1^2 + l_1^2) p_1 q_1 r_1^2 r_2^2 r_3^2 - (m_1)^2,$$
$$N_2 = (k_2^2 + l_2^2) p_2 q_2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 - (m_2)^2.$$

Diese Ausdrücke sind den Grössen: h, h_1, h_2; ... pq, $p_1 q_1$, $p_2 q_2$ insoferne verwandt, als sie mit einander durch analoge Identitäten und zwar:

$$a_3(h) + b_3(k) + c_3(l) = 0, \quad x(h) + y(k) + z(l) = 0,$$
$$(h)^2 + (k)^2 + (l)^2 = N;$$
$$a_2(h_1) + b_2(k_1) + c_2(l_1) = 0, \quad x'(h_1) + y'(k_1) + z'(l_1) = 0,$$
$$(h_1)^2 + (k_1)^2 + (l_1)^2 = N_1;$$
$$a_1(h_2) + b_1(k_2) + c_1(l_2) = 0, \quad x''(h_2) + y''(k_2) + z''(l_2) = 0,$$
$$(h_2)^2 + (k_2)^2 + (l_2)^2 = N_2$$

zusammenhängen; überdies besitzen speciell die Aggregate: (h), (h_1), (h_2) ebenso wie h, h_1, h_2 die Eigenschaft, für alle complanaren bicomplexen Zahlen der Null gleich zu werden.

Es erscheint deshalb geboten, in den ursprünglich für (x), (y), (z) etc. erhaltenen Resultaten alle mit (h), (h_1), (h_2) multiplicirten Glieder von den übrigen zu sondern, womit die nöthige Directive für die definitive Gestaltung der fraglichen Coëfficienten gegeben ist. Dieselben gewinnen hiedurch die übersichtlichen Formen:

$$(x) = (a) + \frac{hm}{pq}(a_3 h - b_3 k - c_3 l) + \frac{(h)^2 (m)}{pqN},$$
$$(y) = (b) - b_3 c_1 c_2 + \frac{hm}{pq}(b_3 h + a_3 k) + \frac{(h)(k)(m)}{pqN},$$
$$(z) = (c) - b_1 b_2 c_3 + \frac{hm}{pq}(c_3 h + a_3 l) + \frac{(h)(l)(m)}{pqN};$$

$$(x') = (a) + \frac{h_1 m_1}{p_1 q_1}(a_2 h_1 - b_2 k_1 - c_2 l_1) + \frac{(h_1)^2 (m_1)}{p_1 q_1 N_1},$$

$$(y') = (b) - b_2 c_1 c_3 + \frac{h_1 m_1}{p_1 q_1}(b_2 h_1 + a_2 k_1) + \frac{(h_1)(k_1)(m_1)}{p_1 q_1 N_1},$$

$$(z') = (c) - b_1 b_3 c_2 + \frac{h_1 m_1}{p_1 q_1}(c_2 h_1 + a_2 l_1) + \frac{(h_1)(l_1)(m_1)}{p_1 q_1 N_1};$$

$$(x'') = (a) + \frac{h_2 m_2}{p_2 q_2}(a_1 h_2 - b_1 k_2 - c_1 l_2) + \frac{(h_2)^2 (m_2)}{p_2 q_2 N_2},$$

$$(y'') = (b) - b_1 c_2 c_3 + \frac{h_2 m_2}{p_2 q_2}(b_1 h_2 + a_1 k_2) + \frac{(h_2)(k_2)(m_2)}{p_2 q_2 N_2},$$

$$(z'') = (c) - b_2 b_3 c_1 + \frac{h_2 m_2}{p_2 q_2}(c_1 h_2 + a_1 l_2) + \frac{(h_2)(l_2)(m_2)}{p_2 q_2 N_2},$$

aus welchen unmittelbar hervorgeht, dass P sich für $h = h_1 = h_2 = 0$ wieder in jene einwerthige bicomplexe Grösse: $(\bar{x}) + (\bar{y})i_1 + (\bar{z})i_2$ verwandelt, deren Coëfficienten in §. 3 durch das Werthsystem (I) bestimmt worden sind. In diesem Falle ist P also auch commutativ, associativ und distributiv in Bezug auf die charakteristische Ebene seiner Factoren.

Wird ferner ein Factor reell, während die beiden übrigen irgend welche diplanare bicomplexe Zahlen vorstellen, so bleibt P zwar noch einwerthig, commutativ und associativ, aber nicht mehr distributiv, und im allgemeinsten Falle dreier diplanarer bicomplexer Factoren repräsentirt dieses Product eine dreiwerthige, weder commutative noch associative Grösse.

Es unterscheidet sich übrigens von dem, nach der ersten Verallgemeinerung gerechneten Producte: P nicht allein durch die geringere Anzahl seiner Werthe, sondern auch darin, dass jedem derselben ein charakteristischer Modulus zukommt. Bildet man nämlich unter Zuhilfenahme der für (h), (k), (l) etc. bestehenden Identitäten die Wurzelgrössen:

$$\sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2},\ \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2},\ \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2},$$

so ergeben sich der Reihe nach die Ausdrücke:

$$r_1 r_2 r_3 \sqrt{\frac{\{k^2 + l^2\}\{(k)^2 + (l)^2\}}{\{h^2 + k^2 + l^2\}\{(h)^2 + (k)^2 + (l)^2\}}},$$

$$r_1 r_2 r_3 \sqrt{\frac{\{k_1^2+l_1^2\}\{(k_1)^2+(l_1)^2\}}{\{h_1^2+k_1^2+l_1^2\}\{(h_1)^2+(k_1)^2+(l_1)^2\}}},$$

$$r_1 r_2 r_3 \sqrt{\frac{\{k_2^2+l_2^2\}\{(k_2)^2+(l_2)^2\}}{\{h_2^2+k_2^2+l_2^2\}\{(h_2)^2+(k_2)^2+(l_2)^2\}}},$$

welche für $h, h_1, h_2 \gtrless 0$ offenbar insgesammt von einander verschieden sind und ihrerseits noch folgende wichtige Thatsache analytisch präcisiren:

Der Modulus jedes, aus drei diplanaren bicomplexen Zahlen gebildeten Productes ist stets kleiner als das Product der Moduli seiner Factoren.

Die inductive Verallgemeinerung der hier gewonnenen Resultate führt schliesslich zu nachstehender Charakteristik der zweiten Generalisation des Multiplicirens in ihrer Anwendung auf beliebig viele n-fach complexe, beziehungsweise n-fach imaginäre Factoren:

(I). Sind die mit einander zu multiplicirenden Factoren lauter diplanare, n-fach complexe Zahlen: $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$, so besitzt deren Product: P_s im Allgemeinen $\frac{1}{2}(s!)$ n-fach complexe Werthe. Dasselbe verschwindet dagegen identisch, sobald sich die reellen Bestandtheile von $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ auf Null reduciren.

(II). Für complanare Factoren, mögen sie nun n-fach complex oder n-fach imaginär sein, bleiben die Verknüpfungsgesetze ihrer Coëfficienten in beiden Verallgemeinerungen[1] dieselben.

---

[1] Diese Verknüpfungsgesetze gestatten übrigens auch eine, für die zweite universelle Verallgemeinerung des Multiplicirens charakteristische Interpretation. Bildet man nämlich das Product der beiden n-fach complexen Zahlen: Z_1, Z_2 nach den, für reelle algebraische Polynome geltenden Multiplicationsregeln, so liefert das erhaltene Resultat:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 i_1^2 + a_2 b_2 i_2^2 + \ldots + a_n b_n i_n^2 +$$
$$+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) i_1 + (a_2 b_0 + a_0 b_2) i_2 + \ldots + (a_n b_0 + a_0 b_n) i_n +$$
$$+ (a_2 b_1 + a_1 b_2) i_1 i_2 + (a_3 b_1 + a_1 b_3) i_1 i_3 + \ldots + (a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n) i_{n-1} i_n,$$

da $i_1 i_2, i_1 i_3, \ldots i_{n-1} i_n$ in der zweiten Generalisation als Producte diplanarer, einfach imaginärer Zahlen identisch verschwinden, und $i_1^2, i_2^2, \ldots i_n^2$ wieder mit der negativen Einheit zusammenfallen, direct den, für com-

(III). Die Moduli sämmtlicher Werthe des Productes P_s haben zur unteren gemeinsamen Grenze die Null, zur oberen hingegen das Product der Moduli seiner Factoren, und liegen daher alle, jenen Werthen zugeordneten Punkte in einer endlichen, $(n+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, deren n-fach ausgedehnte Begrenzung durch die Gleichung (34) analytisch beschrieben wird.

§. 9.

Zweite Verallgemeinerung der Division.

Indem wir die in Frage stehende Generalisation wieder auf Grundlage der Forderung aufzufinden suchen, dass das Product aus Quotient und Divisor mit dem Dividend übereinstimmen müsse, ergeben sich die allgemeinen impliciten Definitionsgleichungen des Dividirens durch Vereinigung der $(n-1)$-fachen Bedingung (73) mit jenen beiden Relationen:

$$a_0\mathfrak{x}_0+a_1\mathfrak{x}_1+\ldots+a_n\mathfrak{x}_n = b_0(\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{x}_1^2+\ldots+\mathfrak{x}_n^2),$$
$$m = r_2^2\mathfrak{x}_0$$

welche aus (18) und (19) durch die in §. 2 präcisirte Buchstabenvertauschung hervorgehen. Es sind daher $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_n$ auch hier gewissen binomischen Ausdrücken: a_0u+b_0v, $a_1u+b_1v, \ldots a_nu+b_nv$ äquivalent, deren gemeinsame Argumente zwei Gleichungen:

$$(80)\ldots r_2^2(a_0u+b_0v) = m,$$
$$(81)\ldots b_0(r_1^2u^2+2muv+r_2^2v^2) = r_1^2u+mv$$

zu genügen haben. Ihre Auflösung liefert nach Einführung der Hilfsfunctionen: d', d'' für u und v die Werthe:

$$u_1 = 0,\ v_1 = \frac{m}{b_0r_2^2};\quad u_2 = \frac{b_0pq+d''m}{r_2^2(b_0d'+a_0d'')},\quad v_2 = -\frac{d''r_1^2}{r_2^2(b_0d'+a_0d'')},$$

---

planare, n-fach complexe Factoren festgestellten Werth von Z_1Z_2. Es wird demnach das erwähnte Product im letzteren Falle selbst in Bezug auf a_1i_1, b_1i_1; a_2i_2, b_2i_2; $\ldots a_ni_n$, b_ni_n distributiv und besitzt speciell für $n=3$ nicht nur kraft der fortlaufenden Proportion:

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

dieselben Coëfficienten wie die correspondirende Specialform des Quaternionenproductes: q_1q_2, sondern kann auch in analoger Weise aus den Bestandtheilen seiner Factoren abgeleitet werden.

so dass den fraglichen Coëfficienten des Resultates der Division durch deren implicite Bestimmungsgleichungen vorläufig zwei Werthsysteme:

$$\xi_0' = \frac{m}{r_2^2},\ \xi_1' = \frac{b_1 m}{b_0 r_2^2},\ \xi_2' = \frac{b_2 m}{b_0 r_2^2},\ \ldots\ \xi_n' = \frac{b_n m}{b_0 r_2^2};$$

$$\xi_0'' = \frac{a_0 b_0 pq - d''(b_0 r_1^2 - a_0 m)}{r_2^2(b_0 d' + a_0 d'')} = \frac{m}{r_2^2},$$

$$\xi_1'' = \frac{a_1 b_0 pq - d''(b_1 r_1^2 - a_1 m)}{r_2^2(b_0 d' + a_0 d'')},\quad \xi_2'' = \frac{a_2 b_0 pq - d''(b_2 r_1^2 - a_2 m)}{r_2^2(b_0 d' + a_0 d'')},$$

. . . . . .

$$\xi_n'' = \frac{a_n b_0 pq - d''(b_n r_1^2 - a_n m)}{r_2^2(b_0 d' + a_0 d'')}$$

zugeordnet werden, welche bereits in ihrer ursprünglichen Gestalt als — im Sinne unserer vierten, eingangs erhobenen Forderung — universell zu bezeichnen sind.

Dessenungeachtet ist das erste der beiden Werthsysteme, weil seine Anwendung auf zwei einfach complexe Zahlen: $a_1 + b_1 i_1$, $a_2 + b_2 i_1$ die, unserer zweiten Forderung zuwiderlaufende Gleichung:

$$\frac{a_1 + b_1 i_1}{a_2 + b_2 i_1} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_2(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2(a_2^2 + b_2^2)} i_1$$

nach sich zieht, definitiv auszuscheiden, und repräsentirt mithin der Quotient zweier n-fach complexer Zahlen kraft der zweiten Generalisation des Dividirens eine im Allgemeinen einwerthige, höchstens n-fach complexe Grösse:

$$\xi_0'' + \xi_1'' i_1 + \xi_2'' i_2 + \ldots + \xi_n'' i_n,$$

deren Coëfficienten wie jene des Productes zweiter Art insgesammt rationale Functionen von $a_0, a_1, \ldots a_n$; $b_0, b_1, \ldots b_n$ vorstellen.

Analog wie in der ersten Verallgemeinerung wird auch bei der zweiten eine formale Trennung der Quotienten complanarer und diplanarer Zahlen möglich, sobald man in die für $\xi_0'', \xi_1'', \ldots \xi_n''$ gegebenen Ausdrücke die Hilfsfunctionen: d, d_1, d_2 einführt und hiedurch zur zweiten Darstellungsweise des zu discutirenden

allgemeinen Quotienten übergeht. Es verwandeln sich nämlich die diesbezüglichen Resultate:

$$\xi_0'' = \frac{1}{r_2^2}(a_0b_0+d),$$

$$\xi_1'' = \frac{1}{r_2^2}\left\{(a_1b_0-a_0b_1)\left(1+\frac{d_1d_2-d^2}{b_0^2d_1+a_0^2d_2-2a_0b_0d}\right)-\frac{m[b_0(a_1d-b_1d_1)+a_0(b_1d-a_1d_2)]}{b_0^2d_1+a_0^2d_2-2a_0b_0d}\right\},$$

. . . . . .

$$\xi_n'' = \frac{1}{r_2^2}\left\{(a_nb_0-a_0b_n)\left(1+\frac{d_1d_2-d^2}{b_0^2d_1+a_0^2d_2-2a_0b_0d}\right)-\frac{m[b_0(a_nd-b_nd_1)+a_0(b_nd-a_nd_2)]}{b_0^2d_1+a_0^2d_2-2a_0b_0d}\right\}$$

für complanare Zahlen infolge des Verschwindens der Differenz: $d_1d_2-d^2$ und sämmtlicher Factoren von a_0m, b_0m unmittelbar in das Werthsystem (o), wonach die Division zweier complanarer Zahlen in beiden Verallgemeinerungen[1] denselben Regeln unterworfen bleibt.

Infolgedessen genügt es, bei der dritten, goniometrischen Darstellungsweise von $Z_1 : Z_2$ lediglich diplanare n-fach complexe Zahlen in Betracht zu ziehen, für welche die ursprünglich sich darbietenden complicirten Formeln erst dann übersichtlich werden, wenn man ausser den bekannten Hilfswinkeln θ und τ noch $(n+1)$ weitere, den Gleichungssystemen:

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\vartheta, \quad \frac{\cos\alpha_1-\cos\beta_1\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\vartheta_1,$$

$$\ldots\frac{\cos\alpha_n-\cos\beta_n\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\vartheta_n;$$

$$\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\tau, \quad \frac{\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\tau_1,$$

$$\ldots\frac{\cos\beta_n-\cos\alpha_n\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\tau_n$$

---

[1] Hiezu sei noch bemerkt, dass beide Generalisationen, falls die betreffenden complanaren Zahlen speciell dreifach complex sind, für die Coëfficienten von $Z_1 : Z_2$ dieselben Verknüpfungsgesetze liefern, welche im Quaternionencalcul für die Coëfficienten von $q_1 : q_2$ nach Einführung der Bedingung: $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ resultiren.

entnommene Hilfswinkel: $\bar{\sigma}$; $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2, \ldots \bar{\tau}_n$ benützt. Auf diese Art gelangt man zu den Ergebnissen:

$$\mathfrak{x}_0'' = \frac{r_1}{r_2}\cos\vartheta,\quad \mathfrak{x}_1'' = \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\alpha_1\cos\beta - \cos\bar{\sigma}\cos\bar{\tau}_1}{\cos^2\tau - \cos\alpha\cos\beta}\right)\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

$$\ldots \mathfrak{x}_n'' = \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\alpha_n\cos\beta - \cos\bar{\sigma}\cos\bar{\tau}_n}{\cos^2\tau - \cos\alpha\cos\beta}\right)\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

und sei im Anschlusse hieran noch bemerkt, dass $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}_1, \ldots \bar{\sigma}_n$; $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_1, \ldots \bar{\tau}_n$ analog wie σ, $\sigma_1, \ldots \sigma_n$; τ, $\tau_1, \ldots \tau_n$ stets die Relationen:

$$\cos^2\bar{\sigma} + \cos^2\bar{\sigma}_1 + \ldots + \cos^2\bar{\sigma}_n = 1,\quad \cos^2\bar{\tau} + \cos^2\bar{\tau}_1 + \ldots + \cos^2\bar{\tau}_n = 1$$

befriedigen.

Um endlich auch den Modulus: $\ddot{r}$ des allgemeinen Quotienten kennen zu lernen, gehe man auf die erste Darstellungsweise seiner Coëfficienten zurück und verwende zur Umformung der Summe ihrer Quadrate die einfache Identität:

$$b_0^2 pq + d''^2 = r_2^2(b_0^2 r_1^2 + a_0^2 r_2^2 - 2a_0 b_0 m) = r_2^2(b_0 d' + a_0 d'^2),$$

wodurch $\ddot{r}$ zuletzt auf den nachstehenden Ausdruck reducirt wird:

$$(82)\ldots \ddot{r} = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{pq}{b_0 d' + a_0 d'^2}}.$$

Da nun die Differenz: $pq - (b_0 d' + a_0 d'^2)$ gemäss früheren Rechnungen für alle diplanaren Zahlen positiv bleibt, ist der Modulus des Quotienten je zweier derartiger Zahlen hier immer grösser als der Quotient der Moduli des Dividends und Divisors und wird speciell für $a_0 = b_0 = 0$, $pq > 0$, d. h. für diplanare n-fach imaginäre Specialisirungen von Z_1, Z_2 unendlich gross, selbst wenn deren Moduli endliche, von Null verschiedene Werthe besitzen.

Dasselbe gilt natürlich auch von den Quotienten solcher Zahlen, welche für die erste Verallgemeinerung durchwegs endlich bleiben, so dass die Verschiedenheit zwischen beiden Generalisationen des Dividirens ebenso scharf ausgeprägt ist wie jene zwischen Producten erster und zweiter Art.

Es müssen demnach auch die Bedingungen für die Zulässigkeit der fundamentalen Relatione : (44), (45), (46) in Bezug auf die zweite Verallgemeinerung der Division von Neuem festgestellt

werden, wobei wir uns aus bekannten Gründen wieder auf bicomplexe Zahlen beschränken und behufs einer einheitlichen Gestaltung der durchzuführenden Rechnungen alle zur Verwendung kommenden bicomplexen Quotienten zunächst gewissen Transformationen unterwerfen, deren typischer Charakter aus der, keines Commentares bedürftigen Gleichung:

$$\frac{a_1+b_1i_1+c_1i_2}{a_2+b_2i_1+c_2i_2}=\frac{m}{r_2^2}+\frac{a_2b_1pq-(a_1r_2^2-a_2m)(b_2r_1^2-b_1m)}{r_2^2(a_2^2r_1^2+a_1^2r_2^2-2a_1a_2m)}i_1+$$

$$+\frac{a_2c_1pq-(a_1r_2^2-a_2m)(c_2r_1^2-c_1m)}{r_2^2(a_2^2r_1^2+a_1^2r_2^2-2a_1a_2m)}i_2=$$

$$=\frac{m}{r_2^2}-\frac{1}{r_2^2}\left\{l+\frac{h(hl+km)}{k^2+l^2}\right\}i_1+\frac{1}{r_2^2}\left\{k+\frac{h(hk-lm)}{k^2+l^2}\right\}i_2$$

zu entnehmen ist.

Die zur Prüfung von (44) dienende Function Δ gewinnt dann die Gestalt:

$$(83)\ldots\Delta=$$

$$=\frac{1}{r_3^2}\left\{\frac{h_1(h_1l_1+k_1m_1)}{k_1^2+l_1^2}+\frac{h_2(h_2l_2+k_2m_2)}{k_2^2+l_2^2}-\frac{h'(h'l'+k'm')}{k'^2+l'^2}\right\}i_1$$

$$-\frac{1}{r_3^2}\left\{\frac{h_1(h_1k_1-l_1m_1)}{k_1^2+l_1^2}+\frac{h_2(h_2k_2-l_2m_2)}{k_2^2+l_2^2}-\frac{h'(h'k'-l'm')}{k'^2+l'^2}\right\}i_2,$$

verschwindet also wie die durch (47) charakterisirte zweiwerthige Differenz Δ ausschliesslich für $h_1=h_2=0$, während sie im Übrigen eine einwerthige, zweifach-imaginäre Grösse vorstellt.

Was ferner die beiden, hier gleichfalls einwerthigen Quotienten:

$$\frac{Z_1Z_3}{Z_2Z_3}=(\mathfrak{x})+(\mathfrak{y})i_1+(\mathfrak{z})i_2,\quad\frac{Z_1:Z_3}{Z_2:Z_3}=(\bar{\mathfrak{x}})+(\bar{\mathfrak{y}})i_1+(\bar{\mathfrak{z}})i_2$$

anbelangt, deren Coïncidenz mit $Z_1:Z_2$ die Gleichungen (45) und (46) ausdrücken, so gestatten deren reelle Bestandtheile unter Benützung der Substitutionen:

$$\frac{h_1m_1}{p_1q_1}-\frac{h_2m_2}{p_2q_2}=h_1^*,\quad\left(h_1+\frac{h_2m_1m_2}{p_2q_2}\right)\left(h_2+\frac{h_1m_1m_2}{p_1q_1}\right)=h_2^*,$$

$$\frac{h_1^2}{k_1^2+l_1^2}+\frac{h_2^2}{k_2^2+l_2^2}+\frac{h_1h_2(h_1h_2+m_1m_2)}{(k_1^2+l_1^2)(k_2^2+l_2^2)}=(h_1^*),$$

$$\frac{h_1 m_1}{k_1^2+l_1^2}-\frac{h_2 m_2}{k_2^2+l_2^2}+\frac{h_1 h_2(h_2 m_1-h_1 m_2)}{(k_1^2+l_1^2)(k_2^2+l_2^2)}=(h_2^*)$$

im vorliegenden Falle die Darstellungsweise:

$$(84)\ldots(\mathfrak{x})=\frac{p_2 q_2}{k_2^2+l_2^2}\left\{\frac{m}{r_2^2}\left(1+\frac{h_1 h_2 m_1 m_2}{p_1 p_2 q_1 q_2}\right)-\frac{1}{r_2^2 r_3^2}(a_3 g h_1^*+h_2^*)\right\},$$

$$(85)\ldots(\bar{\mathfrak{x}})=\frac{k_2^2+l_2^2}{p_2 q_2}\left\{\frac{m}{r_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r_2^2 r_3^2}[(k_1 k_2+l_1 l_2)(h_1^*)+(k_1 l_2-k_2 l_1)(h_2^*)-h_1 h_2]\right\}$$

und sind daher für h_1, $h_2 \gtrless 0$ von dem reellen Bestandtheile des Quotienten: $Z_1 : Z_2$ stets verschieden, während sie für $h_1=h_2=0$ zufolge des gleichzeitigen Verschwindens von: $p_2 q_2-(k_2^2+l_2^2)$; h_1^*, h_2^*; (h_1^*), (h_2^*) ebenso wie $(\mathfrak{x}_1)$, $(\mathfrak{x}_2)$, $(\bar{\mathfrak{x}}_1)$, $(\bar{\mathfrak{x}}_2)$ mit $\frac{m}{r_2^2}$ identisch werden.

Hieraus geht hervor, dass die Giltigkeit der Gleichungen (44), (45), (46) auch in der zweiten Generalisation des Dividirens lediglich für complanare Zahlen in Betracht kommt, für die letzteren jedoch in derselben Weise wie in der ersten Verallgemeinerung dieser Grundoperation fortbesteht, indem beide Verallgemeinerungen den Quotienten je zweier complanarer Zahlen erwiesenermassen übereinstimmend definiren.

Da überdies gemäss früher abgeleiteten Sätzen die Producte erster und zweiter Art für derartige Zahlen einander gleich sind, ergibt sich jetzt noch die wichtige Folgerung:

Erhebt man auf Grundlage der zweiten universellen Verallgemeinerung des Multiplicirens und Dividirens eine beliebige n-fach complexe oder n-fach imaginäre Zahl zu irgend einer Potenz mit reellem Exponenten, so ist das Resultat der Potenzirung identisch mit jenem, welches die erste universelle Generalisation der genannten Grundoperationen liefert.

Hienach genügt jedes System complanarer Zahlen, mag nun dessen charakteristische Ebene einer dreifach ausgedehnten oder einer höheren Mannigfaltigkeit angehören, sämmtlichen Fundamentalbedingungen, welche K. Weierstrass seinen, unter dem Titel: „Zur

Theorie der aus n-Haupteinheiten gebildeten Grössen" veröffentlichten Betrachtungen[1] zu Grunde gelegt hat, so dass sich deren Inhalt auch mit den Resultaten der vorliegenden Arbeit, insoweit die letzteren complanare Zahlen betreffen, in Verbindung bringen lässt.

Was jedoch die mit diplanaren, n-fach complexen Zahlen ausführbaren Rechnungsoperationen anbelangt, so besitzen bereits die Producte und Quotienten derartiger Zahlen nicht mehr sämmtliche, in der citirten Abhandlung als wesentliche Merkmale jedes complexen Productes und Quotienten angenommenen Eigenschaften, und muss daher auch unter den hier entwickelten Gesichtspunkten die weitgehendste, von Weierstrass aus seinen Untersuchungen gezogene Folgerung: „dass die Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Grössen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre" — bedeutend eingeschränkt werden.

§. 10.

Die einfachste Formulirung des Functionsbegriffes für ein n-fach complexes, variables Argument.

Gleichwie die hier in Betracht gezogenen universellen Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen eine neue Fassung des Begriffes: „Rechnungsoperation" in seiner Anwendung auf n fach complexe Zahlen erforderten, müssen auch die Begriffe: „Veränderliche Grösse" und: „Function eines variablen Argumentes" — für n-fach complexe Zahlen neu definirt werden, ehe sich das in dem vorliegenden Paragraphen behandelte Problem näher präcisiren lässt.

Mit Bezugnahme auf die bekannte Definition einer veränderlichen, einfach complexen Grösse mag jede n-fach complexe Grösse ebenfalls das Attribut „veränderlich" erhalten, sobald sie verschiedene Zahlenwerthe annehmen kann, welche insgesammt

[1] S. h. die „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen" vom 12. November 1884, pag. 395—419.

Punkten der eingangs präcisirten, $(n+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zugehören. Hiebei bleiben ihre Veränderungen entweder auf ein bestimmtes Gebiet: G dieser Mannigfaltigkeit beschränkt, dessen Grenzen jederzeit durch ein System von Gleichungen zwischen $(n+1)$ veränderlichen Coordinaten: $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ zu charakterisiren sind, oder aber es bestehen für die zulässigen Specialisirungen der betreffenden variabeln Grösse keine beschränkenden Bedingungen, wonach eine Unterscheidung zwischen beschränkt und unbeschränkt veränderlichen, n-fach complexen Grössen nothwendig wird.

Dieselbe Unterscheidung gilt ferner für jede beschränkt veränderliche n-fach complexe Grösse hinsichtlich des, ihren möglichen Specialisirungen zugewiesenen Gebietes: G, indem sie entweder alle, dem Gebiete zugehörigen Zahlenwerthe oder nur einen Theil derselben zu durchlaufen vermag. Im ersteren Falle wird die Grösse überdies im Anschlusse an bekannte Nominaldefinitionen der Lehre von den einfach complexen Zahlen als im Bereiche G stetig veränderlich zu bezeichnen sein, so oft das Gebiet G ein zusammenhängendes ist, d. h. so oft sich die Coordinatenwerthe zweier beliebiger Punkte des Gebietes derart in einander überführen lassen, dass jedem ihrer Zwischenwerthe ein Punkt desselben Gebietes entspricht.

Diese Feststellung bestimmt, da die, unseren Untersuchungen zu Grunde gelegte Mannigfaltigkeit kraft ihrer Definitionsweise ein solches Gebiet bildet, zugleich den Begriff einer unbeschränkt veränderlichen, stetigen, n-fach complexen Grösse; dieselbe repräsentirt unter den hier bestehenden analytisch-geometrischen Voraussetzungen immer einen Ausdruck von der allgemeinen Form:

$$(86)\ldots Z = x + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \ldots + x_n i_n,$$

dessen reelle Coëfficienten sämmtlicher Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig sind.

Verknüpft man schliesslich irgend eine veränderliche[1] n-fach complexe Grösse: (Z) mit einer zweiten Grösse: $[Z]$ nach bestimm-

[1] Jede Veränderliche, deren Werthe sich möglicherweise nur auf ein bestimmtes, endliches Gebiet erstrecken, mag im Folgenden vor unbeschränkt variablen Grössen auch äusserlich gekennzeichnet werden, indem man dieselbe in Parenthesen einschliesst.

ten Gesetzen durch eine endliche oder unendlich grosse Anzahl von Rechnungsoperationen derart, dass jeder in Betracht kommenden Specialisirung von (Z) innerhalb eines analytisch-charakterisirbaren Gebietes ein einziger, höchstens n-fach complexer Werth von $[Z]$ oder mehrere beziehungsweise unendlich viele ebenso beschaffene Werthe von $[Z]$ entsprechen, so erscheint $[Z]$ hiedurch für jenes Gebiet als eine einwerthige oder mehrwerthige, beziehungsweise unendlich vielwerthige Function[1] von (Z) definirt, zu deren analytischer Bezeichnung in Zukunft Symbole wie:

$$f\{(Z)\},\ \varphi\{(Z)\},\ldots F\{(Z)\},\ \Phi\{(Z)\},\ldots$$

dienen mögen. Es kann somit die jeweilige Definition von $[Z]$ entweder in impliciter oder expliciter Form auftreten und wird im letzteren, einfacheren Falle nach Ausführung der mit (Z) vorzunehmenden Rechnungsoperationen stets eine Gleichung von der Gestalt:

$$(87)\ldots[Z] = X + X_1 i_1 + X_2 i_2 + \ldots + X_n i_n$$

liefern, in welcher $X, X_1, \ldots X_n$ lauter reelle Functionen der variabeln Coëfficienten von (Z) vorstellen. Im Übrigen bleiben die letztgenannten Functionen völlig willkürlich; wohl aber bestimmt

---

[1] Grassmann geht in seiner Functionenlehre (l. c. p. 223) von nachstehender „Erklärung" aus: „Wenn eine Grösse u von einer oder mehreren Grössen $x, y, \ldots$ in der Art abhängt, dass, so oft $x, y, \ldots$ bestimmte Werthe annehmen, auch u einen bestimmten (eindeutigen) Werth annimmt, so nennen wir u eine Function von $x, y, \ldots$" — und fügt erläuternd hinzu: „Diese Definition soll auch gelten, wenn $u, x, y, \ldots$ beliebige extensive Grössen sind. Ferner ist zu bemerken, dass die mehrdeutigen Functionen, d. h. solche, wo für bestimmte Werthe der unabhängigen Variabeln $x, y, \ldots$ die Grösse u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, ohne dass diese Verschiedenheit durch eine neue Variable bedingt ist, — hier gänzlich ausgeschlossen sind." ... „Sobald die Beziehung zwischen den unabhängigen und der abhängigen Variabeln u vermittelst einer Gleichung gegeben ist, durch welche für bestimmte Werthe der ersteren die letztere: u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, so kann man u ansehen als Function jener Variabeln und einer neuen: r, welche eine bestimmte Werthreihe, etwa die der ganzen Zahlen, durchläuft, so dass dann, wenn auch ausser den ursprünglichen Variabeln noch der Werth von r bestimmt ist, auch u eindeutig bestimmt sei. Oder sollte eine solche neue Variable: r nicht ausreichen, so kann man mehrere solche zu Hilfe nehmen."

ihr jeweiliger Charakter zugleich jenen von $[Z]$, so dass beispielsweise, falls $X, X_1, \ldots X_n$ für alle reellen Werthe von $x, x_1, \ldots x_n$ stetig bleiben, auch $[Z]$ als eine, in demselben Sinne stetige Function ihres n-fach complexen variabeln Argumentes: (Z) zu bezeichnen sein wird.

Diese vorläufigen Bemerkungen[1] vermitteln bereits einige nähere Bestimmungen der hier zu lösenden Aufgabe, den Functionsbegriff für ein n-fach complexes, variables Argument möglichst einfach zu formuliren: Man wird das letztere hiebei jedenfalls als ein unbeschränkt stetiges: Z vorauszusetzen und $[Z]$ explicit durch eine endliche Anzahl eindeutiger algebraischer Grundoperationen aus Z abzuleiten haben.

Die erforderliche Directive für die Wahl der in Frage kommenden Verknüpfungen entspringt dann der in den §§. 6, 7 und 9 zum Ausdrucke gelangten Thatsache, dass beide universelle Verallgemeinerungen des Addirens, Subtrahirens und Potenzirens formal identisch sind, während die auf Producte und Quotienten bezüglichen Generalisationen lediglich für complanare Zahlen eine einheitliche Zusammenfassung ermöglichten. Es besitzen daher die drei erstgenannten Rechnungsoperationen einen einfacheren Character als die übrigen, so dass man sich bei der Construction von $[Z]$ ursprünglich auf additive und subtractive Verknüpfungen einwerthiger Potenzen von Z beschränken wird, welche übrigens, da das Product jeder beliebigen n-fach complexen Zahl in eine reelle Zahl gleichfalls einwerthig bleibt, vor ihrer Verknüpfung noch mit irgend welchen reellen Factoren multiplicirt werden können.

Auf diese Art gewinnt der Functionsbegriff in seiner einfachsten Fassung die Gestalt:

$$(88)\ldots[Z] = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 Z + \mathfrak{A}_2 Z^2 + \ldots + \mathfrak{A}_n Z^n,$$

wobei n eine beliebige endliche, positive ganze Zahl und $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n$ lauter reelle Grössen repräsentiren.

Man kann nunmehr die Coëfficienten des Argumentes Z mittelst der Gleichungen:

---

[1] Jede eingehendere Discussion der hier zur Sprache gebrachten Begriffe, namentlich des Stetigkeitsbegriffes, würde uns sachlich allzuweit über das Thema der vorliegenden Abhandlung hinausführen.

$$x = \rho \cos \Phi,\ x_1 = \rho \sin \Phi \cos \Omega_1,\ x_2 = \rho \sin \Phi \sin \Omega_1 \cos \Omega_2,$$
$$\ldots x_n = \rho \sin \Phi \sin \Omega_1 \sin \Omega_2 \ldots \sin \Omega_{n-1}$$

durch dessen jeweiligen Modulus: ρ und n — reelle veränderliche Hilfswinkel: Φ, Ω_1, $\Omega_2 \ldots \Omega_{n-1}$ ausdrücken, also Z durch Einführung seines variablen Inclinationsfactors:

$$(89) \ldots I^* = i_1 \cos \Omega_1 + i_2 \sin \Omega_1 \cos \Omega_2 + \ldots$$
$$+ i_{n-1} \sin \Omega_1 \ldots \sin \Omega_{n-2} \cos \Omega_{n-1} + i_n \sin \Omega_1 \ldots \sin \Omega_{n-1}$$

in den binomischen Ausdruck:

$$(90) \ldots Z = \rho (\cos \Phi + I^* \sin \Phi)$$

umformen. Auf Grundlage dieses Resultates und der Thatsache, dass jede denkbare Specialisirung von I^* zugleich eine solche von I bildet, ergeben sich dann für die in (88) auftretenden Potenzen von Z kraft (56) der Reihe nach die Werthe:

$$\rho^2\{\cos(2\Phi) + I^* \sin(2\Phi)\}, \ldots \rho^n\{\cos(n\Phi) + I^* \sin(n\Phi)\},$$

deren Substitution in (88) folgende zweite Darstellungsweise des Aggregates $[Z]$ liefert:

$$(91) \ldots [Z] = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \rho \cos\Phi + \mathfrak{A}_2 \rho^2 \cos(2\Phi) + \ldots + \mathfrak{A}_n \rho^n \cos(n\Phi) +$$
$$+ I^*\{\mathfrak{A}_1 \rho \sin\Phi + \mathfrak{A}_2 \rho^2 \sin(2\Phi) + \ldots + \mathfrak{A}_n \rho^n \sin(n\Phi)\}.$$

Dieselbe lässt unmittelbar erkennen, dass $[Z]$ für alle endlichen Specialisirungen von Z einwerthig und stetig bleibt.

Da ferner die Variabeln ρ und Φ in (91) nach denselben Gesetzen mit einander verknüpft sind, welche — unter z irgend ein einfach complexes, variables Argument:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gedacht — für die Variabeln r und φ in der bekannten Darstellung des algebraischen Polynomes:

$$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 z + \mathfrak{A}_2 z^2 + \ldots + \mathfrak{A}_n z^n$$

als Function von r und φ bestehen, begründet die Transformationsgleichung (91) im Vereine mit der aus (27) resultirenden Beziehung: $(I^*)^2 = -1$ und dem ersten Hauptsatze der Lehre von den algebraischen Gleichungen noch den weiteren Schluss: Das Aggregat $[Z]$ verschwindet in jeder, die reelle Zahlen-

axe enthaltenden Ebene höchstens für n—von einander verschiedene Specialisirungen von Z.

Diesem Merkmale erscheint eine vierte allgemeine Eigenschaft von $[Z]$ direct zugeordnet, deren Ableitung sich am einfachsten gestaltet, wenn man — unter y die positiv zu nehmende Wurzelgrösse:

$$(92)\ldots y=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$$

verstanden — sämmtliche in (88) vorkommende Potenzen von Z mit Hilfe der, keines Commentares bedürftigen Formel:

$$(93)\ldots Z^n=\sum_{s=0}^{s=n'}(-1)^s(n)_{2s}x^{n-2s}y^{2s}+$$
$$+\sum_{s=0}^{s=n''}(-1)^s(n)_{2s+1}x^{n-2s-1}y^{2s}(x_1i_1+x_2i_2+\ldots+x_ni_n)=$$
$$=u_n+u_n^{(1)}i_1+u_n^{(2)}i_2+\ldots+u_n^{(n)}i_n$$

als n-fach complexe Zahlen darstellt und hierauf das Aggregat $[Z]$ in den Ausdruck:

$$(94)\ldots[Z]=\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1u_1+\mathfrak{A}_2u_2+\ldots+\mathfrak{A}_nu_n+$$
$$+\{\mathfrak{A}_1u_1^{(1)}+\mathfrak{A}_2u_2^{(1)}+\ldots+\mathfrak{A}_nu_n^{(1)}\}i_1+\ldots$$
$$+\{\mathfrak{A}_1u_1^{(n)}+\mathfrak{A}_2u_2^{(n)}+\ldots+\mathfrak{A}_nu_n^{(n)}\}i_n=$$
$$=U+U^{(1)}i_1+U^{(2)}i_2+\ldots+U^{(n)}i_n$$

transformirt. Da nämlich die $(n+1)$-Functionen:

$$u_n,\ \frac{u_n^{(1)}}{x_1},\ \frac{u_n^{(2)}}{x_2},\ \ldots\frac{u_n^{(n)}}{x_n}$$

augenscheinlich für jedes positive ganze n nur die beiden Variabeln x und y enthalten, gilt dasselbe auch von den Functionen:

$$U,\ \frac{U^{(1)}}{x_1},\ \frac{U^{(2)}}{x_2},\ \ldots\frac{U^{(n)}}{x_n},$$

wonach die jeweiligen numerischen Werthe von $U, U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)}$ durch beliebige Zeichenänderungen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht alterirt werden. Sobald daher das Aggregat $[Z]$ für eine bestimmte, n-fach complexe Specialisirung von Z, etwa $Z=Z_1$, erfahrungsgemäss gleich Null wird, verschwindet dasselbe ausserdem noch für die (2^n-1) weiteren Specialisirungen von Z:

$$a_0+a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_{n-1}i_{n-1}-a_ni_n,$$
$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$
$$a_0-a_1i_1-a_2i_2-\ldots-a_{n-1}i_{n-1}+a_ni_n,$$
$$a_0-a_1i_1-a_2i_2-\ldots-a_{n-1}i_{n-1}-a_ni_n.$$

Diese Folgerung involvirt natürlich auch den bekannten Satz, dass alle einfach complexen Specialisirungen von z, für die irgend eine rationale ganze Function von z mit reellen Coëfficienten gleich Null wird, einander paarweise conjugirt sind.

Um jetzt noch eine fünfte allgemeine Eigenschaft des Aggregates $[Z]$ kennen zu lernen, gehe man vorläufig wieder auf die Gleichung (93) zurück und knüpfe an dieselbe die nachstehenden einfachen Überlegungen:

Da der reelle Bestandtheil: u_n der Potenzgrösse Z^n und der gemeinsame Werth der Producte:

$$\frac{y}{x_1}u_n^{(1)},\ \frac{y}{x_2}u_n^{(2)},\ \ldots\ \frac{y}{x_n}u_n^{(n)},\ \text{nämlich:}$$
$$\sum_{s=0}^{s=n''}(-1)^s(n)_{2s+1}x^{n-2s-1}y^{2s+1}=v_n$$

rationale ganze Functionen zweier reeller, von einander unabhängiger und stetiger Variabeln: x, y vorstellen, gestatten sowohl u_n als v_n für alle in Betracht kommenden Specialisirungen von $x, x_1, \ldots x_n$ eine partielle Differentiation nach x und y, deren Ausführung, wenn man der Kürze wegen:

$$(n-2s)(n)_{2s}=(2s+1)(n)_{2s+1}=[n]_s,$$
$$(n-2s+1)(n)_{2s-1}=(2s)(n)_{2s}=\{n\}_s$$

setzt und in v_n vor der partiellen Differentiation nach x den Index s mit $(s-1)$ vertauscht, folgende Resultate liefert:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}=\sum_{s=0}^{s=n'}(-1)^s[n]_sx^{n-2s-1}y^{2s},\qquad \frac{\partial v_n}{\partial x}=\sum_{s=1}^{s=n''+1}(-1)^{s-1}\{n\}_sx^{n-2s}y^{2s-1},$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial y}=\sum_{s=0}^{s=n'}(-1)^s\{n\}_sx^{n-2s}y^{2s-1},\qquad \frac{\partial v_n}{\partial y}=\sum_{s=0}^{s=n''}(-1)^s[n]_sx^{n-2s-1}y^{2s}.$$

Nun ist für gerade n offenbar $[n]_{n'}=0$, so dass sich $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ in diesem Falle auf die Glieder von $s=0$ bis $s=n'-1=n''$

reducirt, während für ungerade n ohnehin n' mit n'' zusammenfällt, d. h. es gilt allgemein die Gleichung:

$$(95)\ldots\frac{\partial u_n}{\partial x}=\frac{\partial v_n}{\partial y}.$$

Eine analoge Beziehung besteht aber auch zwischen der zweiten und dritten Summe, weil $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ infolge des Verschwindens von $\{n\}_0$ allgemein eine von $s=1$ bis $s=n'$ genommene Summe von Gliedern vorstellt, und für gerade n direct $n'=n''+1$ wird, dagegen für ungerade n das letzte Glied von $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ wegen $\{n\}_{n''+1}=0$ entfällt. Multiplicirt man demnach eine der beiden Summen mit (-1), so wird die fragliche Relation sofort ersichtlich; sie lautet:

$$(96)\ldots\frac{\partial u_n}{\partial y}=-\frac{\partial v_n}{\partial x}.$$

Die vorstehenden Ergebnisse mögen nunmehr mit der Bemerkung combinirt werden, dass das Aggregat $[Z]$ gemäss früheren Sätzen für jede Specialisirung von Z mit Z **complanar** bleibt, folglich den Producten:

$$\frac{y}{x_1}U^{(1)},\ \frac{y}{x_2}U^{(2)},\ldots\frac{y}{x_n}U^{(n)}$$

ebenfalls ein gemeinsamer Werth und zwar:

$$\mathfrak{A}_1v_1+\mathfrak{A}_2v_2+\ldots+\mathfrak{A}_nv_n=V$$

zukommt. Es lassen sich dann die partiellen Differentialquotienten von V nach x respective y:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\mathfrak{A}_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+\ldots+\mathfrak{A}_n\frac{\partial v_n}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y}=\mathfrak{A}_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+\ldots+\mathfrak{A}_n\frac{\partial v_n}{\partial y}$$

mit Hilfe von (95) und (96) in die Ausdrücke:

$$-\left(\mathfrak{A}_1\frac{\partial u_1}{\partial y}+\ldots+\mathfrak{A}_n\frac{\partial u_n}{\partial y}\right),\ \mathfrak{A}_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+\ldots+\mathfrak{A}_n\frac{\partial u_n}{\partial x}$$

umformen, deren Vergleichung mit den partiellen Differentialquotienten von U nach x beziehungsweise y direct die Relationen:

$$(97)\ldots\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad(98)\ldots\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

liefert. Eine nochmalige partielle Differentiation der letzteren führt schliesslich auf den fundamentalen Satz: Sind $U, U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)}$ die Coëfficienten jener n-fach complexen veränderlichen Grösse, welche das Aggregat $[Z]$ von Fall zu Fall darstellt, so bilden die Functionen:

$$U, \quad \frac{y}{x_1}U^{(1)}, \quad \frac{y}{x_2}U^{(2)}, \ldots \frac{y}{x_n}U^{(n)}$$

stets particuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(99)\ldots \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

Ausserdem wird ersichtlich, dass die Relationen (97), (98), (99), sobald die Coëfficienten der imaginären Bestandtheile von Z bis auf einen einzigen verschwinden, welcher dann kraft (92) mit y zusammenfällt, in jene Beziehungen übergehen, welche die betreffende einfach complexe Specialform des Aggregates $[Z]$ im Riemann'schen[1] Sinne zu einer Function von Z stempeln.

Im Hinblick auf die hier entwickelten Eigenschaften des Aggregates $[Z]$ sind wir mithin berechtigt, die Lösung der im vorliegenden Paragraphen gestellten Aufgabe, wie folgt, zu formuliren:

Die einfachste Fassung des Functionsbegriffes für ein n-fach complexes, veränderliches Argument führt auf die rationale ganze Function n-ten Grades einer unbeschränkt stetigen n-fach complexen Variabeln.

Die einfachste Erweiterung dieses Functionsbegriffes wird dann darin bestehen, dass man die Bedingung der Endlichkeit von n aufhebt,[2] also auf Grundlage des Aggregates $[Z]$ unendliche, nach steigenden Potenzen von Z fortschreitende Reihen construirt, unter welchen gemäss der Forderung möglichster Einfachheit in erster Linie solche Potenzreihen in Betracht kommen, deren Coëfficienten: $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n$

[1] S. h. §. 4 seiner Inauguraldissertation: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse." (Ges. math. Werke, p. 6, 7.)

[2] Vergl. hiemit den analogen Entwicklungsgang in dem 1884 zu Leipzig erschienenen Werke O. Rausenberger's: „Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen Einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte," p. 74, 75.

ein gemeinsames, explicit durch eine Gleichung von der Gestalt: $\mathfrak{A}_n = f(n)$ präcisirbares Bildungsgesetz besitzen. Jede derartige unendliche Reihe:

$$f(0)+f(1)Z+f(2)Z^2+\ldots+f(n)Z^n+\ldots$$

kann mit Bezugnahme auf (91) in:

$$f(0)+\rho f(1)\cos\Phi+\rho^2 f(2)\cos(2\Phi)+\ldots+\rho^n f(n)\cos(n\Phi)+\ldots$$
$$+I^*\{\rho f(1)\sin\Phi+\rho^2 f(2)\sin(2\Phi)+\ldots+\rho^n f(n)\sin(n\Phi)+\ldots\}$$

transformirt werden und convergirt demzufolge innerhalb jenes Bereiches, in welchem die Reihe der Moduli ihrer Glieder:

$$|f(0)|+\rho|f(1)|+\rho^2|f(2)|+\ldots+\rho^n|f(n)|+\ldots$$

convergent bleibt, d. h. es lassen sich im Anschlusse an die rationale ganze Function n-ten Grades von Z unendlich viele, theils algebraische, theils transcendente Functionen desselben n-fach complexen Argumentes herstellen, welche innerhalb eines $(n+1)$-fach ausgedehnten Gebietes, dessen Begrenzung durch die Relation:

$$(100)\ldots\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2=\left\{\operatorname{Lim}_{n=\infty}\frac{|f(n)|}{|f(n+1)|}\right\}^2$$

analytisch charakterisirt wird, lauter endliche, völlig oder wenigstens beliebig genau bestimmbare Werthe annehmen.

Alle, auf dem hier vorgezeichneten Wege zu gewinnenden Functionen von Z sind insoferne noch relativ einfach beschaffen, als ihre jeweiligen Werthe mit der sie erzeugenden Specialisirung von Z ausnahmslos complanar bleiben, und haben daher im Vereine mit der rationalen ganzen Function n-ten Grades von Z die ersten Untersuchungsobjecte jeder, n-fach complexe, variable Argumente verwendenden analytischen Functionentheorie zu bilden.

Die Auseinandersetzung ihrer weiteren Gliederung liegt der Natur der Sache nach jenseits der Grenzen dieser Abhandlung, und haben auch die zuvor entwickelten Sätze nur mehr dem Zwecke gedient, vorläufig wenigstens die Möglichkeit einer solchen Theorie auf Grundlage der hier discutirten universellen Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen darzuthun.

V. SITZUNG VOM 12. FEBRUAR 1885.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung von Herrn C. Bobek, Docent an der deutschen technischen Hochschule zu Prag: „Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen", II. Mittheilung.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über den grössten gemeinschaftlichen Divisor."

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. v. Langer überreicht eine von Herrn Prof. Dr. Sigmund Mayer in Prag eingesendete Abhandlung: „Über die blutleeren Gefässe im Schwanze der Batrachier-Larven".

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über die Constitution der Isuvitinsäure", von Herrn Dr. J. Schreder.

Das w. M. Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine Arbeit des Herrn Hans Pitsch, Assistent an der technischen Hochschule in Wien, betitelt: „Über die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle".

Das c. M. Herr Prof. M. Neumeyr in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über die geographische Verbreitung der Juraformation".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Ackerbau-Ministerium, k. k.: Statistisches Jahrbuch für 1883. III. Heft. Der Bergwerksbetrieb im Jahre 1883. 1. Lieferung: Die Bergwerksproduction. Wien, 1884; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 6° série, 4° année, 11° cahier. Paris, 1884; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen. XXIII. Jahrgang. Nr. 3 und 4. Wien, 1885; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période, tome XIII. Nr. 1. Genève, 1885; 8°.

Central-Station königl. meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrgang VI. Heft, 3. München, 1884; gr. 4°. — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während des October, November und December 1884; folio.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome C. 1e semestre, No. 4. Paris, 1885; 4°.

Gesellschaft, k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVII, Nr. 12. Wien, 1884; 8°.

— österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. VI. Jahrgang, Nr. IV. Prag, 1884; 4°.

— Senckenbergische naturforschende: Bericht. Frankfurt a. M., 1884; 8°.

Gewerbe-Verein, nieder-österr.: Wochenschrift. XLVI. Jahrgang. Nr. 2—6. Wien, 1885; 4°.

Handels-Ministerium, k. k. in Wien, statistisches Departement: Statistische Nachrichten über die Eisenbahnen der österr.-ungarischen Monarchie für das Betriebsjahr 1882. Wien, 1884; folio.

— Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr. XXIX. Band. 4. und 5. Heft. Wien, 1884; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. X. Jahrgang, Nr. 2—6. Wien, 1885; 4°.

— — Zeitschrift. XXXVI. Jahrg. VI. Heft. Wien, 1884; folio.

Journal, the American of science. 3. Series. Vol. XXVIII. Nos. 168 et 169. New Haven, 1884; 8°.

Kiel, Universität: Akademische Schriften pro 1883—84. 43 Stücke; 8° und 4°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1885. I. Heft. Wien, 1885; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 29e année, 3e série, tome XV, 518e livraison. Février 1885. Paris; 4°.

Moore, F. F. Z. S: The Lepidoptera of Ceylon. Parts IX & X. London, 1884 & 1885; 4°.

Museo nacional de México: Anales. Tomo III. Entrega 5ª. Mexico, 1883; 4°.

Nature. Vol. XXXI. Nos. 795—797. London, 1885; 8°.

Observatorio astronomico nacional de Tacubaya para el año de 1885. Año V. Mexico, 1884; 8°.

Programme: X. Jahresbericht der Gewerbeschule zu Bistritz in Siebenbürgen. Bistritz, 1884; 8°. — XXII. Jahresbericht des Ausschusses des Vorarlberger Museum-Vereines in Bregenz über den Vereinsjahrgang 1882. Bregenz; 4°. — XXXIV. Programm des k. k. Gymnasiums zu Brixen. Brixen, 1884; 8°. — Jahresbericht des ersten deutschen k. k. Gymnasiums in Brünn für das Schuljahr 1883/84. Brünn; 8°. — Jahresbericht und Programm der von dem Forstschulverein für Mähren und Schlesien gegründeten, erhaltenen und geleiteten Forstschule zu Eulenberg in Mähren. 34. Cursus, 1884—85; 8°. — LXXII. Jahresbericht des steiermärkisch-landschaftlichen Joanneums zu Graz über das Jahr 1883. Graz, 1884; 4°. — Jahresbericht des k. k. Staats-Obergymnasiums in Böhm. Leipa am Ende des Schuljahres 1884. Böhm. Leipa; 8°. — Programm des evangel. Gymnasiums A. B. und der mit demselben verbundenen Realschule, sowie der evangel. Bürgerschule A. B. zu Hermannstadt für das Schuljahr 1883/4. Hermannstadt, 1884; 4°. — Die Reformation in Hermannstadt und dem Hermannstädter Capitel. Festschrift. Hermannstadt, 1883; 4°. — Jahresprogramm des königl. katholischen Obergymnasiums zu Leutschau pro 1883—84. Leutschau, 1884; 8°. — Jahresbericht des k. k. Staatsgymnasiums in Marburg. 1884. Marburg; 8°. — Jahresbericht der landwirthschaftlichen Landes-Mittelschule zu Neutitschein pro 1883—84. — VIII. Jahresbericht der k. k. Staats-Gewerbeschule zu Pilsen. 1884. Pilsen, 1884; 8°. — Jahresbericht des königl. katholischen Obergymnasiums zu Pressburg pro 1883—84. Pressburg, 1884; 8°. — VIII. Jahresbericht der k. k. Staats-Gewerbeschule zu Reichenberg. Schuljahr 1883—84. Reichenberg, 1884; 8°. — Programm des k. k. Staats-Obergymnasiums zu Saaz. Saaz, 1884; 8°. — Jahresbericht des städtischen Museum Carolino-Augusteum zu Salzburg für 1883. Salzburg; 8°. —

XXXV. Ausweis des Collegium Borromäum zu Salzburg pro 1883—84. Salzburg; 8°. — Programm des evangel. Gymnasiums A. B. in Schässburg und der damit verbundenen Lehranstalten pro 1883—84. Schässburg. 1884; 4°. — Jahresbericht über das k. k. akademische Gymnasium in Wien für das Schuljahr 1883—84. Wien, 1884; 8°. — X. Jahresbericht über das k. k. Franz Joseph-Gymnasium in Wien. 1883—84. Wien, 1884; 8°. — Jahresbericht des k. k. Obergymnasiums zu den Schotten in Wien. 1884. Wien, 1884; 8°. — IX. Jahresbericht der k. k. Staats-Unterrealschule in der Leopoldstadt in Wien. 1883—84. Wien, 1884; 8°. — Programm der k. k. technischen Hochschule in Wien für das Studienjahr 1884—85. Wien, 1884; 4°. — XXXIII. Jahresbericht über die k. k. Staats-Oberrealschule und die gewerbliche Fortbildungsschule im III. Bezirke in Wien pro 1883 bis 1884. Wien, 1884; 8°. — Bericht über das IX. Vereinsjahr, erstattet vom Vereine der Geographen an der Universität Wien. Wien, 1884; 8°. — X. Jahresbericht der k. k. Oberrealschule in Sechshaus bei Wien. 1883—84. Sechshaus, 1884; 8°. — I. Jahresbericht des öffentlichen Communal-Gymnasiums in Unter-Meidling bei Wien. Unter-Meidling, 1884; 8°. — XIX. Jahresbericht der nieder-österr. Landes-Oberrealschule und der Fachschule für Maschinenwesen in Wiener-Neustadt. 1884. Wiener-Neustadt, 1884; 8°. — Izvješće des k. k. Obergymnasiums in Agram. 1883—84. U Zagrebu, 1884; 8.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 17. Wien, 1884; 8°. — Jahresbericht für 1884. Wien, 1885; 8°.

Repertorium der Physik. XXI. Band, 1. Heft. München und Leipzig, 1885; 8°.

Société des sciences naturelles de Neuchâtel: Bulletin. Tome XIV. Neuchâtel 1884; 8°.

Society of Chemical Industry: The Journal. Vol. IV. Nr. 1. Manchester, 1885; 8°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde: Jahresbericht für das Vereinsjahr 1883—84. Hermannstadt; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXV. Jahrgang. Nr. 2 bis 6. Wien, 1885; 4°.

Über den grössten gemeinschaftlichen Divisor.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

Ich werde in den folgenden Zeilen eine Reihe von arithmetischen Theoremen mittheilen, welche sich auf den grössten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen beziehen. Bezeichnet man den grössten gemeinschaftlichen Theiler der zwei ganzen Zahlen m und n mit $[m, n]$, so ergeben sich aus Formeln, welche ich früher angegeben habe, folgende Gleichungen:

$$1)\quad \sum_{x=1}^{x=n} P_{\varkappa,\tau}([n,x]) = nP_{\varkappa-1,\tau}(n)$$

$$2)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x])\varphi([n,x]) = 0,$$

wenn n kein Quadrat ist,

$$3)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x])\varphi([n,x]) = \varphi_2(\sqrt{n}),$$

wenn n ein Quadrat ist,

$$4)\quad \sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\varphi_\varkappa([n,x]) = \varphi_{\varkappa+1}(n)$$

$$5)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \mu_r([n,x]) = \sum_{dr} d_r \mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right)$$

$$6)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x]) = \sum_{d} d\lambda\left(\frac{n}{d}\right)\omega\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$7)\quad \sum_{x=1}^{x=n} f_\beta([n,x]) = \sum_d d f_{\beta-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$8)\quad \sum_{x=1}^{x=n} f_\beta([n,x]) = \sum_d \psi_1(d) f_{\beta-2}\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$9)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \omega_x([n,x]) = \sum_{d_2} \psi_{x-1}(d_2)\,\mu\left(\sqrt{\frac{n}{d_2}}\right)$$

$$10)\quad \sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\tilde{\omega}([n,x])}\,\pi([n,x])\,\omega_1([n,x]) = n\,\omega(n)$$

$$11)\quad \sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\tilde{\omega}([n,x])}\,\lambda([n,x])\,\pi([n,x])\,\omega_1([n,x]) = \lambda(n)\,\omega(n)$$

$$12)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \chi_{1,\mu}(\Delta,[n,x]) = \chi_{0,\mu}(\Delta,n)$$

$$13)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,\mu}(\Delta,[n,x])\,\lambda([n,x]) = \lambda(n)\,\psi_{0,\mu}(\Delta,n)$$

$$14)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,\mu}(\Delta,[n,x])\,\lambda([n,x]) = \lambda(n) \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) d^\mu \mu^2\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$15)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\Delta,[n,x]) = \tau n \sum_d \frac{\left(\frac{\Delta}{d}\right)}{d}$$

$$16)\quad \sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\,\mu([n,x]) = \mu(n)$$

$$17)\quad \sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\,\lambda([n,x]) = n \sum_{d_2} \frac{\mu(d_2)}{d_2}\,.$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

18) $$\sum_{x=1}^{x=n} P_{0,\tau}([n,x]) = \rho_{0,\tau}(n)$$

19) $$\sum_{x=1}^{x=n} \psi_x([n,x]) = n\psi_{x-1}(n)$$

20) $$\sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\varphi([n,x]) = \varphi_2(n)$$

21) $$\sum_{x=1}^{x=n} \omega([n,x]) = \sum_{d_2} \psi_1(d_2)\mu\left(\sqrt{\frac{n}{d_2}}\right)$$

22) $$\lambda(n)\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,0}(\Delta,[n,x])\lambda([n,x]) = \psi_{0,0}(\Delta,n)$$

23) $$\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{1,0}(\Delta,[n,x])\lambda([n,x]) = \lambda(n)\sum_{d}\left(\frac{\Delta}{d}\right)\mu^2\left(\frac{n}{d}\right).$$

Die Formel 19) hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt; die Formel 22) liefert eine neue Darstellung der Anzahl der Lösungen der Congruenz:

$$x^2 \equiv \Delta \pmod{n}.$$

Von den in den angegebenen Gleichungen enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden hervorgehoben werden:

Die Anzahl derjenigen gemeinsamen Divisoren der ganzen Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, ist gleich der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor eine τ^{te} Potenz ist.

Die Summe der x^{ten} Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Theiler der ganzen Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, ist das n-fache der Summe der $(x-1)^{ten}$ Potenzen derjenigen Divisoren von n, welche τ^{te} Potenzen sind.

Unter den grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ganzen Zahl n und aller dieselbe nicht übertreffenden Zahlen gibt es eben so viele, welche durch keine r^{te} Potenz theilbar sind, als die

Summe jener Divisoren der Zahl n, deren complementärer Divisor die r^{te} Potenz eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen ist, die Summe aus der Anzahl der zu n relativ primen, diese Grösse nicht übersteigenden Zahlen und der Summe der übrigen Theiler von n, deren complimentärer Divisor eine r^{te} Potenz aber durch keine $2r^{te}$ Potenz theilbar ist, übertrifft.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft in β Factoren zerlegen, als die Summe der Producte beträgt, welche man erhält, wenn man jeden Theiler von n mit der Anzahl der Zerlegungen seines complementären Divisors in $\beta-1$ Factoren multiplicirt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft in β Factoren zerlegen, als die Summe der Producte beträgt, welche man erhält, wenn man die Summe der Divisoren jedes Theilers von n mit der Anzahl der Zerlegungen seines complementären Divisors in $\beta-2$ Factoren multiplicirt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft in zwei zu einander relativ prime Zahlen zerlegen, als die Summe der Divisoren derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor ein Quadrat eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen ist, die Summe der Divisoren der übrigen Theiler von n, deren complementärer Divisor ein Quadrat, aber durch keine vierte Potenz theilbar ist, übertrifft.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich eben so oft durch das System der quadratischen Formen der Discriminante Δ darstellen, als das Product aus der Anzahl der Darstellungen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst und dem Überschusse der Summe derjenigen Divisoren von n, für deren complementären Divisor d' das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{d'}\right)$ den Werth $+1$ besitzt, über die Summe der übrigen Theiler mit zu Δ theilerfremdem complementären Divisor beträgt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ungeraden oder einfachgeraden Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich viermal so oft durch die quadratische Form x^2+y^2 darstellen, als der Überschuss der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor die Form $4s+1$ hat, über die Summe der übrigen Theiler mit ungeradem complementären Divisor beträgt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ungeraden Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich doppelt so oft durch die quadratische Form x^2+2y^2 darstellen, als der Überschuss der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor eine der Formen $8s+1$, $8s+3$ hat, über die Summe der übrigen Divisoren beträgt.

Die grössten gemeinschaftlichen Divisoren der ungeraden durch 3 nicht theilbaren Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen lassen sich doppelt so oft durch die quadratische Form x^2+3y^2 darstellen, als der Überschuss der Summe derjenigen Theiler von n, deren complementärer Divisor die Form $3s+1$ besitzt, über die Summe der übrigen Divisoren beträgt.

Die Summe derjenigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind, ist um eine Einheit grösser oder kleiner als die Summe der übrigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren ohne quadratischen Theiler, je nachdem n aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist; die zwei angeführten Summen sind einander gleich, wenn die Zahl n einen quadratischen Divisor besitzt.

Die Summe derjenigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen, welche aus einer geraden Anzahl von Primzahlen zusammengesetzt sind, übertrifft die Summe der übrigen um eben so viel, als die Summe derjenigen quadratischen Theiler von n, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, die Summe der übrigen quadratischen Theiler mit complementärem Divisor ohne quadratischen Factor übersteigt.

Aus den Gleichungen 1), 2), 10), 19) und 20) ergeben sich leicht die folgenden Relationen:

$$24)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} P_{-x,\tau}([n,x])}{n} = \zeta(\tau(x+2))$$

$$25)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi_x([n,x])}{n^x} = \zeta(x) \qquad (x>1)$$

$$26)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \lambda([n,x])\,\varphi([n,x])}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\zeta(3)}$$

$$27)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} [n,x]\,\varphi([n,x])}{n^3} = \frac{1}{\zeta(3)}$$

$$28)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\tilde{\omega}([n,x])}\,\pi([n,x])\,\omega_1([n,x])}{n} = \frac{6}{\pi^2}\log n.$$

Von den speciellen Relationen, welche in diesen Gleichungen enthalten sind, mögen die folgenden angeführt werden:

$$29)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} P_{-2r,\tau}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau(r+1)} B_{\tau(r+1)}}{2\Gamma(2\tau r+2\tau+1)},$$

$$30)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} P_{-x,2\tau}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau(x+2)} B_{\tau(x+2)}}{2\Gamma(2\tau x+4\tau+1)},$$

$$31)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} P_{0,\tau}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2\tau} B_\tau}{2\Gamma(2\tau+1)},$$

$$32)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{-x}([n,x])}{n} = \zeta(x+2),$$

$$33)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{-2r}([n,x])}{n} = \frac{(2\pi)^{2r+2} B_{r+1}}{2\Gamma(2r+3)},$$

$$34)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{2r}([n,x])}{n^{2r}} = \frac{(2\pi)^{2r} B_r}{2\Gamma(2r+1)},$$

$$35)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi_{2r+1}([n,x])}{n^{2r+1}} = \zeta(2r+1) \qquad (r>0),$$

$$36)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \psi([n,x])}{n} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Von den in den angegebenen Formeln enthaltenen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, beträgt im Mittel:

$$1 + \frac{1}{2^{\tau(x+2)}} + \frac{1}{3^{\tau(x+2)}} + \frac{1}{4^{\tau(x+2)}} + \cdots$$

Die Summe der reciproken $(2r)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2\tau(r+1)} B_{\tau(r+1)}}{2\Gamma(2\tau r + 2\tau + 1)}.$$

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen, welche $(2\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2\tau(x+2)} B_{\tau(x+2)}}{2\Gamma(2\tau x + 4\tau + 1)}.$$

Die Summe der reciproken Quadrate der gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^4}{90}$.

Die Summe der reciproken Biquadrate der gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^6}{945}$.

Die Summe der reciproken quadratischen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^6}{945}$.

Die Summe der reciproken Quadrate der quadratischen gemeinschaftlichen Divisoren zweier ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^8}{1350}$.

Die Summe der reciproken Cuben der quadratischen gemeinschaftlichen Divisoren von zwei ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{\pi^{10}}{62370}$.

Die Summe der reciproken biquadratischen gemeinschaftlichen Divisoren von zwei ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{691\pi^{12}}{605752875}$.

Die Summe der reciproken Quadrate der biquadratischen gemeinschaftlichen Divisoren von zwei ganzen Zahlen beträgt im Mittel $\frac{3617\pi^{16}}{36182396250}$.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{(2\pi)^{2\tau}B_\tau}{2\Gamma(2\tau+1)}$ gemeinschaftliche Divisoren, welche τ^{te} Potenzen sind.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{\pi^2}{6}$ gemeinschaftliche Divisoren.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{\pi^4}{90}$ quadratische gemeinschaftliche Divisoren.

Zwei ganze Zahlen haben im Mittel $\frac{\pi^6}{945}$ cubische gemeinschaftliche Divisoren.

Die Summe der x^{ten} Potenzen der gemeinschaftlichen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n und der Zahl n beträgt für sehr grosse n:

$$n^x\left(1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots\right) \qquad (x>1).$$

Die Summe der $(2r)^{\text{ten}}$ Potenzen der gemeinschaftlichen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n und der Zahl n ist für sehr grosse n $\frac{(2\pi)^{2r}B_r}{2\Gamma(2r+1)}$ —mal grösser, als die $2r^{\text{te}}$ Potenz der Zahl n.

Die Summe der Quadrate der gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übersteigenden Zahlen ist für sehr grosse n $\frac{\pi^4}{90}$ —mal so gross, als n^2.

Die Summe der Biquadrate der gemeinschaftlichen Divisoren der Zahl n und aller dieselbe nicht übertreffenden Zahlen ist für sehr grosse n das $\frac{\pi^6}{945}$ —fache von n^4.

Die Formeln 32) und 36) hat schon Herr E. Cesaro mitgetheilt.

Herr Smith hat bekanntlich folgende Gleichung aufgestellt.

$$37)\quad |[x,y]|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)}\,\varphi(x).$$

Ich will nun schliesslich noch die Werthe einer Reihe von analogen symmetrischen Determinanten angeben. Man findet:

$$38)\quad |[x,y]^x|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)}\,\varphi_x(x)$$

$$39)\quad |\psi_x([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = (n!)^x$$

$$40)\quad |f_\beta([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)}\,f_{\beta-1}(x)$$

$$41)\quad |\lambda([x,y])f_\beta[x,y]|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)}\,\frac{\lambda(x)f_{\beta-1}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-2}(x))}{(\beta-1)^{\omega(x)}}$$

42) $$\left|\frac{f_{\beta-1}([x,y])\psi([x,y]^2\pi^{\beta-2}([x,y]))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}([x,y])}}\right|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_1^n{}^{(x)} \frac{f_{\beta-2}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}(x)}}$$

43) $$\left|\frac{(-1)^{(x+1)\tilde{\omega}([x,y])}\pi^x([x,y])\varphi_x([x,y])}{[x,y]^x}\right|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = (n!)^x \prod_1^n{}^{(x)} \mu(x)$$

44) $$\left|\left(\frac{\Delta}{[x,y]}\right)[x,y]^{\mu-x}\right|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)} \frac{\chi_{x,\mu}(\Delta,x)}{x^x}$$

45) $$|P_{-x,\tau}([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)}{}' \frac{1}{x^x},$$

wo die Marke am Productzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von x zu nehmen sind, welche τ^{te} Potenzen sind.

46) $$|\varphi(\Delta,[x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \tau^n \prod_1^n{}^{(x)} \left(\frac{\Delta}{x}\right).$$

Von den speciellen Fällen dieser Gleichungen mögen folgende besonders angeführt werden:

47) $$|\rho_{0,\tau}([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 1$$

48) $$|\psi([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 1$$

49) $$|\lambda([x,y])\psi([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)} \lambda(x)\psi(x^2)$$

50) $$|\lambda([x,y])f_3([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)} \lambda(x)\psi^2(x)$$

51) $$|\lambda([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)} \omega(x)\lambda(x)$$

52) $$|\psi^2([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_1^n{}^{(x)} \psi(x^2)$$

53) $$\left(\frac{\Delta}{[x,y]}\right)\Big|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{\chi_{\mu,\mu}(\Delta,x)}{x^{\mu}}$$

54) $$|\omega([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 0$$

für $n \leqq 4$, und:

55) $$|\omega([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)} = 1$$

für $n < 4$; welche Formel übrigens selbstverständlich ist. Es mag noch erwähnt werden, dass, wie ich demnächst zu zeigen gedenke, auch die allgemeine Determinante

$$|f([x,y])|_{(x,y=1,2,3,\ldots,n)}$$

sich als ein Product von n Factoren darstellen lässt.

Entwicklung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalien in independenter Form.

Von Dr. **Norbert Herz.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Februar 1885.)

Bezeichnet man die auf die Bahnebene des gestörten Himmelskörpers bezogenen rechtwinkeligen Coordinaten[1] des störenden Planeten mit x_1', y_1', z_1', die des gestörten mit x, y, z, die auf seine eigene Bahnebene (des störenden Körpers) bezogenen rechtwinkeligen Coordinaten des ersteren mit x_1, y_1, z_1, so ist:

$$\rho^2=(x_1'-x)^2+(y_1'-y)^2+(z_1'-z)^2$$
$$r_1^2=x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2=(r_1)^2+z_1^2$$
$$r^2=x^2+y^2+z^2=(r)^2+z^2$$

wenn r_1, r die Entfernungen der beiden Himmelskörper vom Ursprung des Coordinatensystems (Sonnenmittelpunkt) bedeuten, (r_1), (r) die Projectionen dieser Entfernungen jedes der beiden Körper auf seine eigene Bahnebene und ρ die gegenseitige Entfernung der beiden Himmelskörper. Demnach ist

$$\rho^2=(r_1)^2+(r)^2+z_1^2+z^2-z(xx_1'+yy_1'+zz_1')$$

Bedeuten nun i, Ω, ω; i_1, Ω_1, ω_1, beziehungsweise Neigung, Länge des aufsteigenden Knotens und Abstand des Perihels vom Knoten für den gestörten und störenden Himmelskörper, und setzt man

$$+\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos i=\mathrm{I}$$
$$+\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos i=\mathrm{II}$$
$$+\sin\omega\sin i=\mathrm{III}$$
$$-\cos\Omega\sin\omega-\sin\Omega\cos\omega\cos i=\mathrm{IV}$$

---

[1] Die X-Axe geht nach dem Perihel des gestörten, die X'-Axe nach dem Perihel des störenden Himmelskörpers.

$$
\begin{aligned}
-\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega\cos i &= \mathrm{V}\\
+\cos\omega\sin i &= \mathrm{VI}\\
+\sin\Omega\sin i &= \mathrm{VII}\\
-\cos\Omega\sin i &= \mathrm{VIII}\\
+\cos i &= \mathrm{IX}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\cos\Omega_1\cos\omega_1-\sin\Omega_1\sin\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{I}_1\\
+\sin\Omega_1\cos\omega_1+\cos\Omega_1\sin\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{II}_1\\
+\sin\omega_1\sin i_1 &= \mathrm{III}_1\\
-\cos\Omega_1\sin\omega_1-\sin\Omega_1\cos\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{IV}_1\\
-\sin\Omega_1\sin\omega_1+\cos\Omega_1\cos\omega_1\cos i_1 &= \mathrm{V}_1\\
+\cos\omega_1\sin i_1 &= \mathrm{VI}_1\\
+\sin\Omega_1\sin i_1 &= \mathrm{VII}_1\\
-\cos\Omega_1\sin i_1 &= \mathrm{VIII}_1\\
+\cos i_1 &= \mathrm{IX}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(AA) &= \mathrm{I\,I}_1+\mathrm{II\,II}_1+\mathrm{III\,III}_1\\
(AB) &= \mathrm{I\,IV}_1+\mathrm{II\,V}_1+\mathrm{III\,VI}_1\\
(AC) &= \mathrm{I\,VII}_1+\mathrm{II\,VIII}_1+\mathrm{III\,IX}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(BA) &= \mathrm{IV\,I}_1+\mathrm{V\,II}_1+\mathrm{VI\,III}_1\\
(BB) &= \mathrm{IV\,IV}_1+\mathrm{V\,V}_1+\mathrm{VI\,VI}_1\\
(BC) &= \mathrm{IV\,VII}_1+\mathrm{V\,VIII}_1+\mathrm{VI\,IX}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(CA) &= \mathrm{VII\,I}_1+\mathrm{VIII\,II}_1+\mathrm{IX\,III}_1\\
(CB) &= \mathrm{VII\,IV}_1+\mathrm{VIII\,V}_1+\mathrm{IX\,VI}_1\\
(CC) &= \mathrm{VII\,VII}_1+\mathrm{VIII\,VIII}_1+\mathrm{IX\,IX}_1
\end{aligned}
$$

so wird

$$
\begin{aligned}
x_1' &= (AA)x_1+(AB)y_1+(AC)z_1\\
y_1' &= (BA)x_1+(BB)y_1+(BC)z_1\\
z_1' &= (CA)x_1+(CB)y_1+(CC)z_1
\end{aligned}
$$

für die Werthe I, II, ... ergibt sich, wenn man

$$\pi = \omega+\Omega;\quad \pi_1 = \omega_1+\Omega_1$$

einführt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= +\cos\pi + 2\sin\Omega\sin\omega\sin^2\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{I}_1 &= +\cos\pi_1 + 2\sin\Omega_1\sin\omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{II} &= +\sin\pi - 2\cos\Omega\sin\omega\sin^2\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{II}_1 &= +\sin\pi_1 - 2\cos\Omega_1\sin\omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{III} &= +\sin\omega\sin i & \mathrm{III}_1 &= +\sin\omega_1\sin i_1\\
\mathrm{IV} &= -\sin\pi + 2\sin\Omega\cos\omega\sin^2\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{IV}_1 &= -\sin\pi_1 + 2\sin\Omega_1\cos\omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{V} &= +\cos\pi - 2\cos\Omega\cos\omega\sin^2\tfrac{1}{2}i^2 & \mathrm{V}_1 &= +\cos\pi_1 - 2\cos\Omega_1\cos\omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}i_1^2\\
\mathrm{VI} &= +\cos\omega\sin i & \mathrm{VI}_1 &= +\cos\omega_1\sin i_1\\
\mathrm{VII} &= +\sin\Omega\sin i & \mathrm{VII}_1 &= +\sin\Omega_1\sin i_1\\
\mathrm{VIII} &= -\cos\Omega\sin i & \mathrm{VIII}_1 &= -\cos\Omega_1\sin i_1\\
\mathrm{IX} &= +\cos i & \mathrm{IX}_1 &= +\cos i_1
\end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned}
(AA) &= \cos(\pi-\pi_1) - 2\sin\omega\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(\pi_1-\Omega) - 2\sin\omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}i_1^2\sin(\pi-\Omega_1)\\
&\quad + 4\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin^2\tfrac{1}{2}i_1\sin\omega\sin\omega_1[\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1)+\cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1]\\
(AB) &= \sin(\pi-\pi_1) - 2\sin\omega\sin^2\tfrac{1}{2}i^2\cos(\pi_1-\Omega) - 2\cos\omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}i_1^2\sin(\pi-\Omega_1)\\
&\quad + 4\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin^2\tfrac{1}{2}i_1\sin\omega\cos\omega_1[\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1)+\cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1]\\
(AC) &= -\sin i_1\sin(\pi-\Omega_1)+\sin i\sin\omega+4\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin^2\tfrac{1}{2}i_1\sin\omega[\sin\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1)-\cos\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1]\\
(BA) &= -\sin(\pi-\pi_1) - 2\cos\omega\sin^2\tfrac{1}{2}i^2\sin(\pi_1-\Omega) - 2\sin\omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}i_1^2\cos(\pi-\Omega_1)\\
&\quad + 4\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin^2\tfrac{1}{2}i_1\cos\omega\sin\omega_1[\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1)+\cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1]
\end{aligned}$$

$$(BB) = \cos(\pi-\pi_1) - 2\cos\omega \sin\tfrac{1}{2} i^2 \cos(\pi_1 - \Omega) \quad 2\cos\omega_1 \sin\tfrac{1}{2} i_1^2 \cos(\pi - \Omega_1)$$
$$+4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\omega \cos\omega_1 [\sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega-\Omega_1) + \cos\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1]$$

$$(BC) = -\sin i_1 \cos(\pi-\Omega_1) + \sin i \cos\omega + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\omega [\sin\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega-\Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1]$$

$$(CA) = -\sin i \sin(\pi_1-\Omega) + \sin i_1 \sin\omega_1 + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \sin\omega_1 [\sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega-\Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i_1 \sin\tfrac{1}{2} i]$$

$$(CB) = -\sin i \cos(\pi_1-\Omega) + \sin i_1 \cos\omega_1 + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\omega_1 [\sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega-\Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i_1 \sin\tfrac{1}{2} i]$$

$$(CC) = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2} i^2 - 2\sin\tfrac{1}{2} i_1^2 + 4 \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 [\cos\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega-\Omega_1) + \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1].$$

Da nun, wenn mit v_1, v die wahren Anomalien bezeichnet werden:

$$x_1 = (r_1)\cos v_1 \qquad x = (r)\cos v$$
$$y_1 = (r_1)\sin v_1 \qquad y = (r)\sin v$$
$$x_1^2 + y_1^2 = (r_1)^2 \qquad x^2 + y^2 = (r)^2$$

so wird, wenn man der Kürze wegen

$$m = \sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega-\Omega_1) + \cos\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1$$
$$n = \sin\tfrac{1}{2} i_1 \cos\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega-\Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i_1 \sin\tfrac{1}{2} i \qquad (1)$$
$$p = \sin\tfrac{1}{2} i \cos\tfrac{1}{2} i_1 \cos(\Omega-\Omega_1) - \cos\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1$$

setzt:

$$(AA)x_1 + (AB)y_1 = (r_1)\cos(\pi-\pi_1-v_1) - 2(r_1)\sin\tfrac{1}{2} i^2 \sin\omega \sin(\pi_1+v_1-\Omega) - 2(r_1)\sin(\omega_1+v_1)\sin\tfrac{1}{2} i_1^2 \sin(\pi-\Omega_1)$$
$$+4(r_1)\sin\tfrac{1}{2} i \sin\tfrac{1}{2} i_1 \sin\omega \sin(\omega_1+v_1).m$$

$$(BA)x_1+(BB)y_1=-(r_1)\sin(\pi-\pi_1-v_1)-2(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i^2\cos\omega\sin(\pi_1+v_1-\Omega)-2(r_1)\sin(\omega_1+v_1)\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\cos(\pi-\Omega_1)$$
$$+4(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos\omega\sin(\omega_1+v_1).m$$

$$(CA)x_1+(CB)y_1=-(r_1)\sin i\sin(\pi_1+v_1-\Omega)+(r_1)\sin i_1\sin(\omega_1+v_1)+4(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega_1+v_1).n$$

und demnach:

$$xx_1'+yy_1'=x[(AA)x_1+(AB)y_1]+y[(BA)x_1+(BB)y_1]+[(AC)x+(BC)y]z_1$$
$$=(r)(r_1)\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)+(r)(r_1)\textcircled{a}+(r)\textcircled{aa}z_1$$
$$z_1'=-(r_1)\sin i\sin(\pi_1+v_1-\Omega)+(r_1)\sin i_1\sin(\omega_1+v_1)+z_1+(r_1)\textcircled{c}+\textcircled{cc}z_1$$

wobei

$$\textcircled{a}=-2\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(\omega+v)\sin(\pi_1+v_1-\Omega)-2\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\sin(\omega_1+v_1)\sin(\pi+v-\Omega_1)$$
$$+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega+v)\sin(\omega_1+v_1).m$$

$$\textcircled{aa}=-\sin i_1\sin(\pi+v-\Omega_1)+\sin i\sin(\omega+v)+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega+v).p \qquad (2)$$

$$\textcircled{c}=+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega_1+v_1).n$$

$$\textcircled{cc}=-2\sin\tfrac{1}{2}i^2-2\sin\tfrac{1}{2}i_1^2+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1[\cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1\cos(\Omega-\Omega_1)+\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1]$$

Der Ausdruck für ⓐ kann auch geschrieben werden:

$$\textcircled{a}=+\sin\tfrac{1}{2}i^2[\cos(\pi_1+v_1+\omega-\Omega+v)-\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)]+\sin\tfrac{1}{2}i_1^2[\cos(\pi+v+\omega_1-\Omega_1+v_1)-$$
$$-\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)]+2\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1[\cos(\omega+v-\omega_1-v_1)-\cos(\omega+v+\omega_1+v_1)]m.$$

Setzt man auch noch

$$\textcircled{ab}=-\sin i\sin(\pi_1+v_1-\Omega)+\sin i_1\sin(\omega_1+v_1)+4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\sin(\omega_1+v_1).n \qquad (3)$$

so wird

$$xx_1'+yy_1'+zz_1' = (r)(r_1)\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)+(r)(r_1)\textcircled{a}+$$
$$+(r)\textcircled{aa}z_1+(r)\textcircled{ab}z+zz_1+\textcircled{cc}zz_1$$

und demnach, wenn

$$-2(r)(r_1)\textcircled{a}-2(r)\textcircled{aa}z_1-2(r_1)\textcircled{ab}z-2\textcircled{cc}zz_1+(z_1-z)^2=\zeta_1^2 \quad (4)$$
$$(r)^2+(r_1)^2-2(r)(r_1)\cos(\pi+v-\pi_1-v_1)=R_1^2$$

gesetzt wird:

$$\rho_1^2 = R_1^2+\zeta_1^2$$
$$\frac{1}{\rho_1^3}=\frac{1}{R_1^3}-\frac{3}{2}\frac{\zeta_1^2}{R_1^5}+\frac{3.5}{2.4}\frac{\zeta_1^4}{R_1^7}-\frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\zeta_1^6}{R_1^9}+\ldots \quad (5)$$

Sei nun

$$(a^2+a_1^2-2aa_1\cos\varphi)^{-\frac{2s+1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}c_s^{(i)}\cos i\varphi;\quad c_s^{(-i)}=c_s^{(i)}$$

und

$$R_0^2=a^2+a_1^2-2aa_1\cos(M+\pi-M_1-\pi_1)$$

wo a, a_1 die halben Bahnaxen π, π_1 die Längen der Perihelien M, M_1 die mittleren Anomalien sind, so ist

$$\frac{1}{R_0^{2s+1}}=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}c_s^{(i)}\cos i(M+\pi-M_1-\pi_1).$$

Sei ferner[1]

$$P=\frac{1}{\rho_0^3}=\frac{1}{R_0^3}-\frac{3}{2}\frac{\zeta_1^2}{R_0^5}+\frac{3.5}{2.4}\frac{\zeta_1^4}{R_0^7}-\frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\zeta_1^6}{R_0^9}+\ldots$$

und setzt man

$$Z^{(\sigma)}=c_1^{(\sigma)}-\frac{3}{2}\zeta_1^2c_2^{(\sigma)}+\frac{3.5}{2.4}\zeta_1^4c_3^{(\sigma)}-\frac{3.5.7}{2.4.6}\zeta_1^6\ c_4^{(\sigma)}\ldots.$$
$$+(-1)^s\frac{3.5\ldots.(2s+1)}{2.4.6\ldots.2s}c_{s+1}^{(\sigma)}\zeta_1^{2s}+\ldots \quad (6)$$
$$Z^{(-\sigma)}=Z^{(\sigma)}$$

[1] Eigentlich hätte man auch zu schreiben P_1; $Z_1^{(\sigma)}$ u. s. w., da diese Ausdrücke für jeden störenden Himmelskörper zu entwickeln sind; indem aber ein Misverständnis nicht entstehen kann, wurde der Index Kürze halber überall weggelassen.

so wird

$$P = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)} \cos\sigma(M+\pi--M_1-\pi_1)$$

Da z, z_1 die senkrecht zu seiner eigenen Bahnebene gemessene Entfernung jedes Himmelskörpers ist, so folgt, dass ζ_1 von der Ordnung der Neigungen der beiden Bahnebenen ist, so dass man aus dem Ausdrucke für $Z^{(\sigma)}$ ersehen kann, wie weit man die Entwicklungscoëfficienten $c_s^{(\sigma)}$ benöthigt; sollen noch die zweiten vierten, sechsten Potenzen der Neigungen berücksichtigt werden, so wird man noch die Entwicklungscoëfficienten der $^5/_2$ten, $^7/_2$ten, $^9/_2$ten Potenz des Ausdruckes $(a^2+a_1^2-2a\,a_1\cos\varphi)$ zu bilden haben.

Rechnet man nun die Störungen der mittleren Anomalie, so wird die in jedem Momente stattfindende wahre Anomalie mit der gestörten mittleren durch die Formeln der elliptischen Bewegung verbunden sein. Ist ferner $\bar{r}$ der ungestörte Radius vector, r der gestörte, so wird

$$r = \bar{r}(1+\gamma)$$

sein, wo γ die Störung des Radius vectors bedeutet, und es ist

$$r = (a+\Delta a)(1+\gamma) \qquad v = M+\Delta M$$

wenn

$$\Delta a = -\frac{a}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tau^{(i)} \cos iM$$

$$\Delta M = +\frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha^{(i)} \sin iM \qquad (7)$$

in welchen Ausdrücken die Coëfficienten $\tau^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$ die bekannten Functionen der Excentricität bedeuten. Ähnliche Ausdrücke gelten für den störenden Himmelskörper. Ersetzt man daher in der Formel

$$r = a+\Delta a$$

überall a durch $a(1+\gamma)$, so wird man in der Störungsfunction die Störung des Radius vectors berücksichtigt haben, weil in Formel (4) für (r), (r_1) die gestörten (wahren) Radien vectoren in Rechnung zu ziehen sind.

Die Entwicklung von $\frac{1}{\rho^3}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz liefert nun:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_1^3} &= P + \frac{\partial P}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial P_1}{\partial a_1}\Delta a_1 + \frac{\partial P}{\partial (M-M_1)}\Delta(M-M_1) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial a^2}\Delta a^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial a_1^2}\Delta a_1^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial (M-M_1)^2}\Delta(M-M_1)^2\right. \\
&+ 2\frac{\partial^2 P}{\partial a\,\partial a_1}\Delta a\,\Delta a_1 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial a\,\partial (M-M_1)}\Delta a\,\Delta(M-M_1) + \\
&\left. + 2\frac{\partial^2 P}{\partial a_1\,\partial (M-M_1)}\Delta a_1\,\Delta(M-M_1)\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial}{\partial a_1}\Delta a_1 + \frac{\partial}{\partial (M-M_1)}\Delta(M-M_1)\right\}^n P
\end{aligned} \tag{8}$$

wobei im allgemeinen Gliede die gebräuchliche symbolische Bezeichnungsweise gewählt wurde. Bedenkt man nun, dass sich jede einzelne Potenz $\frac{1}{R_1^{2s+1}}$ in eine ähnliche Reihe entwickeln lässt, und dass dann $\frac{1}{\rho_1^3}$ sich in derselben Weise aus $\frac{1}{R_1^{2s+1}}$ zusammensetzt, wie P aus $\frac{1}{R_0^{2s+1}}$, so erkennt man sofort, dass bei der Bildung der Differentialquotienten von P die Potenzen von ζ_1 nicht differenzirt werden; dann aber erhält man durch Einführung der abgekürzten Schreibweise:

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} Z_{(\sigma)}}{\partial a^\mu\,\partial a_1^\nu} = Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}$$

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} P}{\partial a^\mu\,\partial a_1^\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}\cos\sigma(M+\pi-M_1-\pi_1)$$

$$\frac{\partial^{2i+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{2i}\,\partial a^\mu \partial a_1^\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \sigma^{2i} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}\cos\sigma(M+\pi-M_1-\pi_1) \tag{9}$$

$$\frac{\partial^{2i+1+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{2i+1}\,\partial a^\mu \partial a_1^\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} (-1)^{i+1} \sigma^{2i+1} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}\sin\sigma(M+\pi-M_1-\pi_1)$$

und mit Rücksicht auf die eingeführte Bezeichnung ist

$$Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} c_1^{(\sigma)}}{\partial a^\mu \partial a_1^\nu} - \frac{3}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_2^{(\sigma)}}{\partial a^\mu \partial a_1^\nu} + \frac{3.5}{2.4}\zeta_1^4 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_3^{(\sigma)}}{\partial a^\mu \partial a_1^\nu} - \ldots \qquad (10)$$

Aus dem Werthe von Δa (Gleichung 7) folgt:

$$(\Delta a)^2 = \frac{a^2}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau^{(i)} \tau^{(k)} \cos iM \cos kM$$

$$= \frac{a^2}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau^{(i+k)} \tau^{(k)}\right] \cos iM$$

Wird demnach

$$h_{2,i} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau^{(k)} \tau^{(i+k)}$$

gesetzt, so wird

$$(\Delta a)^2 = \frac{a^2}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{2,i} \cos iM$$

Man kann auf demselben Wege die folgenden Potenzen entwickeln, und findet leicht, dass man ganz allgemein

$$(\Delta a)^s = \frac{(-a)^s}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{s,i} \cos iM \qquad (11)$$

setzen kann; dann erhält man durch Multiplication dieses Ausdruckes mit Δa

$$(\Delta a)^{s+1} = \frac{(-a)^{s+1}}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,i} \tau^{(k)} \cos iM \cos kM$$

$$= \frac{(-a)^{s+1}}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,i-k} \tau^{(k)}\right] \cos iM$$

Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem aus (11) für $s+1$ statt s folgenden Werthe findet sich sofort

$$h_{s+1,i} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,k} \tau^{(i+k)} \qquad (11\,a)$$

wobei, wie sich äusserst leicht ergibt, die Beziehung besteht:

$$h_{s,-i} = h_{s,i} \qquad (11\,b)$$

Die Gleichungen (11 *a*) gelten auch schon für $s = 1$, wenn man

$$h_{1,i} = \tau^{(i)}$$

$$h_{0,0} = 2, \quad h_{0,1} = h_{0,2} = h_{0,3} = \ldots = 0$$

setzt. Für die $h_{s,i}$ lassen sich sehr einfach Probegleichungen aufstellen; man hat nämlich zunächst für $M = 0$:

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{1,i} = +e; \quad \Delta a = -ae; \quad (\Delta a)^s = (-a)^s e^s$$

folglich

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{s,i} = e^s$$

Andere Probegleichungen, die durch zweimalige Differentiation von (11) nach M folgen, sind

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i^2 h_{s,i} = \frac{2s\,e^s}{1-e^2}$$

Zur Berechnung der $h_{s,i}$ ist es aber nicht nöthig, die unendlichen Reihen (11 *a*), welche in der Praxis allerdings einmal abgebrochen werden, zu verwenden. Bezeichnet man nämlich mit $S_i^{(m)}$, $C_i^{(m)}$ die Entwicklungscoëfficienten der sin und cos der Vielfachen der excentrischen Anomalie nach Vielfachen der mittleren Anomalie, also

$$\sin mE = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{(m)} \sin iM$$

$$\cos mE = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{(m)} \cos iM$$

so gelten die Relationen (s. Astronomische Nachrichten, Nr. 2592)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{(m)} C_{k-i}^{(n)} &= S_k^{(m+n)} + S_k^{(m-n)} \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{(m)} S_{k-i}^{(n)} &= S_k^{(m+n)} - S_k^{(m-n)} \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{(m)} C_{k-i}^{(n)} &= C_k^{(m+n)} + C_k^{(m-n)} \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{(m)} S_{k-i}^{(n)} &= C_k^{(m+n)} - C_k^{(m-n)}
\end{aligned} \tag{12}$$

mit deren Hilfe man findet:

$$h_{2,i} = \frac{e^2}{2}\left(C_i^{(0)} + C_i^{(2)}\right)$$

$$h_{3,i} = \frac{e^3}{4}\left(3C_i^{(1)} + C_i^{(3)}\right)$$

$$h_{4,i} = \frac{e^4}{8}\left(3C_i^{(0)} + 4C_i^{(2)} + C_i^{(4)}\right)$$

und allgemein

$$h_{m,i} = \frac{e^m}{2^{m-1}}\left\{C_i^{(m)} + \binom{m}{1} C_i^{(m-2)} + \binom{m}{2} C_i^{(m-4)} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}} C_i^{(0)} \text{ für } m \text{ gerade} \right)$$

$$\left. + \binom{m}{\frac{m-1}{2}} C_i^{(1)} \text{ für } m \text{ ungerade} \right)$$

Die allgemeine Giltigkeit dieser Formel ergibt sich durch Benützung von (11 a) mit Berücksichtigung der Relationen (12) und

$$\binom{m}{\lambda} + \binom{m}{\lambda-1} = \binom{m+1}{\lambda}; \quad \frac{1}{2}\binom{m+1}{\frac{m+1}{2}} = \binom{m}{\frac{m-1}{2}}$$

Für die Entwicklung von $\Delta(M-M_1)^s$ setzen wir zunächst

$$\mathrm{I}=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(i)}\sin iM;\quad \mathrm{II}=\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha'^{(k)}\sin kM_1$$

Dann ist

$$\Delta(M-M_1)=\mathrm{I}-\mathrm{II}$$

wo I nur von der Excentricität und mittleren Anomalie des gestörten Planeten abhängt, und II in derselben Weise aus den entsprechenden Grössen des störenden Planeten zusammengesetzt ist. Indem nun

$$\mathrm{I}^2=\tfrac{1}{4}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(i)}\sin iM\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(k)}\sin kM$$

$$=\tfrac{1}{4}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(k)}\alpha^{(i+k)}\cos iM$$

so wird, wenn

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(k)}\alpha^{(i+k)}=\eta_{2,i}$$

gesetzt wird:

$$\mathrm{I}^2=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\eta_{2,i}\cos iM$$

Erhebt man diese Gleichung zur s^{ten} Potenz, so wird das Resultat dasselbe, wie bei $(\Delta a)^s$ sein müssen, wenn nur $\tau^{(i)}$ durch $\eta_{2,i}$ ersetzt wird; man hat demnach

$$\mathrm{I}^{2s}=\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\eta_{2s,i}\cos iM$$

$$\eta_{2s+2,i}=\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\eta_{2s,k}\eta_{2,i+k}$$

Doch lässt sich auch ohne Mühe eine andere Recursionsformel finden, welche jede Reihe der η aus der unmittelbar vorhergehenden und den Coëfficienten α gibt, indem man nämlich I^{2s} in der obigen Form voraussetzt, und mit dem Ausdrucke für I multiplicirt, und ebenso den resultirenden für I^{2s+1} behandelt. Auf diesem Wege erhält man:

$$\left.\begin{aligned} I^{2s} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s,i} \cos iM \\ I^{2s+1} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s+1,i} \sin iM \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \eta_{2s+1,i} &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{s,k}\,\alpha^{(i+k)} \\ \eta_{s,-i} &= (-1)^s \eta_{s,i}; \quad \eta_{2s+1,0} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13\,a)$$

Auch hier hat man wieder $\eta_{2,i} = \alpha^{(i)}$ zu setzen. Da

$$I_{M=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial I}{\partial M}\right)_{M=0} = -1 + \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2}$$

so erhält man leicht die Probegleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\eta_{2s,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{2s,i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \eta_{2,i} = -8e^2 - 20e^3 - \frac{73}{2}e^4 - 57e^5 - \frac{327}{4}e^6 - \frac{221}{2}e^7 - \frac{4589}{32}e^8 - \frac{2885}{16}e^9 - \frac{14165}{64}e^{10}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{i}\eta_{2s,i} = 0 \qquad \text{für } s > 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,\eta_{2s+1,i} = 0 \qquad \text{für } s \gtrless 1$$

Ganz ähnlich den Formeln (13) hat man für den störenden Körper

$$\Pi^{2s} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta'_{2s,i} \cos iM_1$$

$$\Pi^{2s+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta'_{2s+1,i} \sin iM_1$$

Demnach wird man in

$$\Delta(M-M_1)^{2s} = I^{2s} + \sum_{x=1}^{2s-1} (-1)^x \binom{2s}{x} I^{2s-x} \Pi^x + \Pi^{2s}$$

die eben angeschriebenen Werthe einzuführen haben. Führt man das Product hier getrennt für gerade und ungerade x durch, und ersetzt überall die Producte von trigonometrischen Functionen durch Summen, so findet man, dass sich in beiden Fällen

$$I^{2s-x}\Pi^x = \frac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s-x,i} \eta'_{x,k} \cos(iM-kM_1)$$

schreiben lässt; folglich wird die obige Summe

$$\Delta(M-M_1)^{2s} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{2s} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^x \binom{2s}{x} \eta_{2s-x,i} \eta'_{x,k} \cos(iM-kM_1)$$

wo auch für

$$\eta_{0,0} = 2; \quad \eta_{0,1} = \eta_{0,2} = \eta_{0,3} = \ldots = 0; \quad \eta_{1,i} = \alpha^{(i)}$$

zu setzen ist. Auf demselben Wege findet man weiter:

$$I^{2s+1-2x}\Pi^{2x} = \frac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s+1-2x,i} \eta'_{2x,k} \sin(iM-kM_1)$$

$$I^{2s-2x}\Pi^{2x+1} = -\frac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{2s-2x,i} \eta'_{2x+1,k} \sin(iM-kM_1)$$

$$\Delta(M-M_1)^{2s+1} = \\ = \tfrac{1}{4}\sum_{x=0}^{2s+1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\binom{2s+1}{x}\eta_{2s+1-x,i}\eta'_{x,k}\sin(iM-kM_1)$$

Setzt man demnach ganz allgemein

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{s}\binom{s}{x}\eta_{s-x,i}\eta'_{x,k} &= (s,i,k)\\ \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{s}(-1)^x\binom{x}{s}\eta_{s-x,i}\eta'_{x,k} &= [s,i,k]\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}\Delta(M-M_1)^{2s} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[2s,i,k]\cos(iM-kM_1)\\ \Delta(M-M_1)^{2s+1} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(2s+1,i,k)\sin(iM-kM_1)\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Zwischen den (s,i,k) und $[s,i,k]$ bestehen die folgenden, leicht zu verificirenden Relationen:

$$[2s,\ 0,\ 0] = (2s,\ 0,\ 0)$$

$$\begin{aligned}&[2s,\ i,\ 0] = (2s,\ i,\ 0)\\ &[2s,\ -i,\ 0] = (2s,\ -i,\ 0) = [2s,\ i,0] = (2s,\ i,0)\\ &[2s,\ 0,\ k] = (2s,\ 0,\ k)\\ &[2s,\ 0,\ -k] = (2s,\ 0,\ -k) = [2s,0,\ k] = (2s,0,\ k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[2s,\ i,\ -k] = (2s,\ i,\ k)\\ &[2s,\ -i,\ k] = (2s,\ i,\ k)\\ &[2s,\ -i,\ -k] = [2s,\ i,\ k]\\ &(2s,\ i,\ -k) = [2s,\ i,\ k]\\ &(2s,\ -i,\ k) = [2s,\ i,\ k]\\ &(2s,\ -i,\ -k) = [2s,\ i,\ k]\end{aligned}$$

$$[2s+1,\ 0,\ 0] = (2s+1,\ 0,\ 0) = 0$$

$$\begin{aligned}&[2s+1,\ i,\ 0] = (2s+1,\ i,\ 0)\\ &[2s+1,\ -i,\ 0] = (2s+1,\ -i,\ 0) = -[2s+1,i,0] =\\ &\qquad\qquad = -(2s+1,\ i,0)\end{aligned}$$

$$[2s+1,\ 0,\ k] = -(2s+1,\ 0,\ k)$$
$$[2s+1,\ 0,\ -k] = -(2s+1,\ 0,\ -k) = -[2s+1, 0, k] = (2s+1, 0, k)$$

$$\begin{aligned}
[2s+1,\ i,\ -k] &= (2s+1, i, k)\\
[2s+1,\ -i,\ k] &= -(2s+1, i, k)\\
[2s+1,\ -i,\ -k] &= -[2s+1, i, k]\\
(2s+1,\ i,\ -k) &= [2s+1, i, k]\\
(2s+1,\ -i,\ k) &= -[2s+1, i, k]\\
(2s+1,\ -i,\ -k) &= -(2s+1, i, k)
\end{aligned}$$

Es wird sich jedoch für die weitere Entwicklung als praktischer erweisen, für die Coëfficienten (14) eine gemeinschaftliche Symbolik zu wählen, um die Entwicklungen für gerade und ungerade Exponenten gemeinschaftlich durchführen zu können. Sei also

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für } s \text{ gerade:}\quad [s,\ i,\ k] = \{s,\ i,\ k\}\\
&\text{„ } s \text{ ungerade:}\ (s,\ i,\ k) = \{s,\ i,\ k\}
\end{aligned}\right\} \qquad (14\,a)$$

oder, was auf dasselbe hinauskömmt:

$$\left.\begin{aligned}
\{2s, i, k\} &= \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{2s} (-1)^x \binom{2s}{x} \eta_{2s-x,\,i}\,\eta'_{x,\,k}\\
\{2s+1, i, k\} &= \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{2s+1} \binom{2s+1}{x} \eta_{2s+1-x,\,i}\,\eta'_{x,\,k}
\end{aligned}\right\} \qquad (14\,b)$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned}
\Delta(M-M_1)^{2s} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{2s, i, k\}\cos(iM-kM_1)\\
\Delta(M-M_1)^{2s+1} &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{2s+1, i, k\}\sin(iM-kM_1)
\end{aligned}\right\} \qquad (15\,a)$$

und man hat

$$\begin{aligned}
\{2s,\ -i, -k\} &= \{2s,\ i, k\}\\
\{2s+1, -i, -k\} &= -\{2s+1, i, k\}
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man diese beiden Relationen, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\frac{\partial^{2\iota+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{2\iota} \partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} \Delta (M-M_1)^{2\iota} = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\iota} \sigma^{2\iota} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} \{2\iota, \sigma-i, \sigma-k\} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

$$\frac{\partial^{2\iota+\mu+\nu+1} P}{\partial (M-M_1)^{2\iota+1} \partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} \Delta (M-M_1)^{2\iota+1} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\iota+1} \sigma^{2\iota+1} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} \{2\iota+1, \sigma-i, \sigma-k\} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

Da beide Ausdrücke identisch sind, so kann man ganz allgemein schreiben:

$$\frac{\partial^{\tau+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^{\tau} \partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}} \Delta (M-M_1)^{\tau} = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]} \sigma^{\tau} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} \{\tau, \sigma-i, \sigma-k\} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

wobei $\left[\frac{g}{2}\right]$ die grösste in $\frac{g}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Indem nun, wie früher gefunden wurde

$$(\Delta a)^{\mu} = \frac{(-a)^{\mu}}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{\mu,i} \cos iM$$

und ebenso

$$(\Delta a_1)^\nu = \frac{(-a_1)^\nu}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h'_{\nu,i} \cos iM_1$$

so ist

$$(\Delta a)^\mu (\Delta a_1)^\nu = (-1)^{\mu+\nu} \frac{a^\mu a_1^\nu}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{\mu,i} h'_{\nu,k} \cos(iM - kM_1)$$

Nach einigen leichten Reductionen ergibt sich nun [1]

$$\frac{\partial^\mu P}{\partial a^\mu} \Delta a^\mu = (-1)^\mu \cdot \frac{a^\mu}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_{\mu,i} Z^{(0)}_{\mu,0} \cos iM + (-1)^\mu \frac{a^\mu}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu,0} h_{\mu,\sigma-i} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - \sigma M_1)$$

$$\frac{\partial^\nu P}{\partial a_1^\nu} \Delta a_1^\nu = (-1)^\nu \frac{a_1^\nu}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h'_{\nu,k} Z^{(0)}_{0,\nu} \cos kM_1 + (-1)^\nu \frac{a_1^\nu}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{0,\nu} h'_{\nu,\sigma-k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1)$$

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} P}{\partial a^\mu \partial a_1^\nu} \Delta a^\mu \Delta a_1^\nu = (-1)^{\mu+\nu} \frac{a^\mu a_1^\nu}{8} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{\mu,\nu} h_{\mu,i} h'_{\nu,k} \cos(iM - kM_1)$$

$$+ (-1)^{\mu+\nu} \frac{a^\mu a_1^\nu}{4} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} h_{\mu,\sigma-i} h'_{\nu,\sigma-k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

[1] Wenn $\mu = \nu = 0$, so ist $Z^{(\sigma)}_{0,0} = Z^{(\sigma)}$ zu setzen.

$$\frac{\partial^{\tau+\mu+\nu} P}{\partial (M-M_1)^\tau \partial a^\mu \partial a_1^\nu} \Delta (M-M_1)^\tau \Delta a^\mu \Delta a_1^\nu =$$

$$= (-1)^{\mu+\nu+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]} \frac{a^\mu a_1^\nu}{4} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma^\tau Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu} \binom{\tau, \mu, \nu}{\sigma, i, k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

wenn

$$\binom{\tau, \mu, \nu}{\sigma, i, k} = \frac{1}{2} \sum_{\iota=-\infty}^{+\infty} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \{\tau, \iota, \varkappa\} h_{\mu, \sigma-\iota-i} h'_{\nu, \sigma-\varkappa-k} \tag{16}$$

Fasst man nun in (8) die Glieder zusammen, welche von derselben Ordnung sind, so ergibt sich zunächst für die Glieder nullter Ordnung:

$$G_0 = \tfrac{1}{2} Z^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} Z^{(\sigma)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - \sigma M_1) \tag{a}$$

Für die Glieder erster Ordnung:

$$\frac{\partial P}{\partial a} \Delta a = -\frac{a}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{1,0} \tau^{(i)} \cos iM - \frac{a}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{1,0} \tau^{(\sigma-i)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - \sigma M_1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} \Delta a_1 = -\frac{a_1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{0,1} \tau'^{(k)} \cos kM_1 - \frac{a_1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{0,1} \tau'^{(\sigma-k)} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial(M-M_1)}\Delta(M-M_1)=-\tfrac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sigma Z^{(\sigma)}\alpha^{(\sigma-i)}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-\sigma M_1)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma Z^{(\sigma)}\alpha'^{(\sigma-k)}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+\sigma M-kM_1)$$

daher ihre Summe:

$$G_1=-\tfrac{1}{2}\Big\{\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a Z_{1,0}^{(0)}\tau^{(i)}\cos iM+\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_1 Z_{0,1}^{(0)}\tau'^{(k)}\cos kM_1$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\{a Z_{1\ 0}^{(\sigma)}\tau^{(\sigma-i)}+\sigma Z^{(\sigma)}\alpha^{(\sigma-i)}\}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-\sigma M_1) \qquad (b)$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{a_1 Z_{0,1}^{(\sigma)}\tau'^{(\sigma-k)}+\sigma Z^{(\sigma)}\alpha'^{(\sigma-k)}\}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+\sigma M-kM_1)\Big\}$$

Auf dieselbe Weise erhält man für die Glieder zweiter Ordnung:

$$G_2=\tfrac{1}{4}\Big\{\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h_{2,i}a^2 Z_{2,0}^{(\sigma)}\cos iM+\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h'_{2,k}a_1^2 Z_{0,2}^{(\sigma)}\cos kM_1+\tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tau^{(i)}\tau'^{(k)}a\,a_1 Z_{11}^{(0)}\cos(iM-kM_1)$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[h_{2,\sigma-i}a^2Z^{(\sigma)}_{2,0}+\sigma a\,Z^{(\sigma)}_{1,0}\sum_{\iota=+\infty}^{+\infty}\alpha^{(i)}\tau^{\sigma-i-\iota}\right]\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-\sigma M_1\right)$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[h'_{2,\sigma-k}a_1^2Z^{(\sigma)}_{0,2}+\sigma a_1\,Z^{(\sigma)}_{0,1}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\alpha'^{(\varkappa)}\tau'^{(\sigma-\varkappa-k)}\right]\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+\sigma M-kM_1\right)$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\tau^{(\sigma-i)}\tau'^{(\sigma-k)}a\,a_1\,Z^{(\sigma)}_{11}+\sigma\alpha'^{(\sigma-k)}\tau^{(\sigma-i)}a\,Z^{(\sigma)}_{1,0}+\sigma\alpha^{(\sigma-i)}\tau'^{(\sigma-k)}a_1\,Z^{(\sigma)}_{0,1}\right.$$
$$\left.-\sigma^2Z^{(\sigma)}\{2,\sigma-i,\sigma-k\}\right]\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1\right)\}$$

Man könnte auf dieselbe Weise die einzelnen Gruppen der Glieder dritter, vierter und höherer Ordnung rechnen, doch wird einerseits die Gesetzmässigkeit leichter ersichtlich und andererseits die im ersteren Falle wiederholt durchzuführende Arbeit bedeutend erleichtert, wenn gleich die allgemeine Formel für die Glieder μ^{ter} Ordnung aufgestellt wird. Für diese ist aber

$$\frac{\partial^\mu P}{\partial a^\mu}(\Delta a)^\mu=\tfrac{1}{2}(-a)^\mu\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h_{\mu,i}Z^{(0)}_{\mu,0}\cos iM+\tfrac{1}{2}(-a)^\mu\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}Z^{(\sigma)}_{\mu,0}\,h_{\mu,\sigma-i}\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-\sigma M_1\right)$$

$$\binom{\mu}{\lambda}\frac{\partial^\mu P}{\partial a^{\mu-\lambda}\partial a_1^\lambda}(\Delta a)^{\mu-\lambda}\Delta a_1^\lambda=\tfrac{1}{2}(-a)^{\mu-\lambda}(-a_1)^\lambda\binom{\mu}{\lambda}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Z^{(0)}_{\mu-\lambda,\lambda}\,h_{\mu-\lambda,i}h'_{\lambda,k}\cos\left(iM-kM_1\right)\qquad(c)$$

$$+\tfrac{1}{2}(-a)^{\mu-\lambda}(-a_1)^\lambda\binom{\mu}{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}Z^{(\sigma)}_{\mu-\lambda,\lambda}\,h_{\mu-\lambda,\sigma-i}h'_{\lambda,\sigma-k}\cos\left(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1\right)$$

$$\frac{\partial^\mu P}{\partial a_1^\mu}\Delta a_1^\mu = \tfrac{1}{2}(-a_1)^\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' h'_{\mu,k} Z^{(\tau)}_{0,\mu} \cos kM_1 + \tfrac{1}{2}(-a_1)^\mu \sum_{\sigma=1}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' Z^{(\tau)}_{0,\mu} h'_{\mu,\sigma\ k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + \sigma M - kM_1) \qquad (c)$$

Summirt man jetzt zunächst die mittlere Reihe von $\lambda = 1$ bis $\lambda = \mu - 1$ und addirt hierzu die erste und dritte Zeile, bedenkt aber, dass die zweite Reihe für $\lambda = 0$ in die erste, für $\lambda = \mu$ in die dritte übergeht, so hat man als Summe der von den Incrementen $\Delta(M - M_1)$ unabhängigen Glieder

$$(-1)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\mu} \tfrac{1}{2} a^{\mu-\lambda} a_1^\lambda \binom{\mu}{\lambda} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(0)}_{\mu-\lambda,\lambda} h_{\mu-\lambda,i} h'_{\lambda,k} \cos(iM - kM_1)$$

$$+(-1)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\mu} \left\{ \tfrac{1}{2} a^{\mu-\lambda} a_1^\lambda \binom{\mu}{\lambda} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z^{(\sigma)}_{\mu-\lambda,\lambda} h_{\mu-\lambda,\sigma-i} h'_{\lambda,\sigma-k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1) \right. \qquad (d)$$

Die Gruppe (d) ist, wie sofort ersichtlich, die Entwicklung der symbolischen Glieder

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial}{\partial a_1}\Delta a_1\right)^\mu P$$

Hiezu kommen noch die Glieder der Gruppe

$$\sum_{\tau=1}^{\mu} \binom{\mu}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial}{\partial a_1}\Delta a_1\right)^{\mu-\tau} \left(\frac{\partial}{\partial (M - M_1)}\Delta(M - M_1)\right)^\tau P$$

Das allgemeine Glied dieser Entwicklung ist

$$\binom{\mu}{\tau}\binom{\mu-\tau}{\lambda}\frac{\partial^\mu P}{\partial a^{\mu-\tau-\lambda}\partial a_1^\lambda \partial (M-M_1)^\tau}\Delta a^{\mu-\tau-\lambda}\Delta a_1^\lambda \Delta (M-M_1)^\tau$$

$$=\binom{\mu}{\tau}\binom{\mu-\tau}{\lambda}(-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}(-1)^{\mu-\tau}.\tfrac{1}{4}a^{\mu-\tau-\lambda}a_1^\lambda\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma^\tau Z^{(\sigma)}_{\mu-\tau-\lambda,\lambda}\binom{\tau,\ \mu-\tau-\lambda,\ \lambda}{\sigma,\ \ i,\ \ k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1)$$

Summirt man hier zunächst nach λ von 0 bis $\mu-\tau$, so ergibt sich, weil

$$\binom{\mu}{\tau}\binom{\mu-\tau}{\lambda}=\frac{\mu!}{(\mu-\tau-\lambda)!\,\lambda!\,\tau!}$$

ist, aus obigem

$$\frac{\mu!}{\tau!}(-1)^{\mu-\tau+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}.\tfrac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{\mu-\tau}\left\{\frac{a^{\mu-\tau-\lambda}a_1^\lambda}{(\mu-\tau-\lambda)!\,\lambda!}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma^\tau Z^{(\sigma)}_{\mu-\tau-\lambda,\lambda}\binom{\tau,\ \mu-\tau-\lambda,\ \lambda}{\sigma,\ \ i,\ \ k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1)\right\}$$

Hier ist nun noch nach τ zu summiren, und zwar von 1 bis μ, und dann durch $\mu!$ zu dividiren. Der Coëfficient von $(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1)$ wird demnach, indem

$$\mu-\tau-\lambda=\varkappa$$

gesetzt wird, wo dann λ jeden Wert von 0 bis $\mu-\tau$ und $\varkappa$ den zugehörigen Werth erlangt, so also, dass stets

$$\varkappa+\lambda=\mu-\tau$$

ist:

$$\sum_{\tau=1}^{\mu}\sum_{\varkappa+\lambda=\mu-\tau}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\varkappa!\,\lambda!\,\tau!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\tau}Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\binom{\tau,\varkappa,\lambda}{\sigma,i,k} \qquad (e)$$

Für $\tau=0$ geht dieser Ausdruck in den zweiten Theil von (d) (nachdem dieser durch $\mu!$ dividirt wurde) über; dieser letztere kann daher mit (e) vereinigt werden, indem nur die Summe nach τ von 0 bis μ genommen wird. Dann aber wird man für $\varkappa$, λ, σ alle möglichen positiven Werthe, die 0 mit eingeschlossen, zu setzen haben, wenn nur die Bedingung erfüllt wird

$$\varkappa+\lambda+\tau=\mu.$$

Setzt man daher

$$\sum_{\varkappa+\lambda+\tau=\mu}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\varkappa!\,\lambda!\,\tau!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\tau}Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\binom{\tau,\varkappa,\lambda}{\sigma,i,k}=\begin{Bmatrix}\mu\\ \sigma,i,k\end{Bmatrix} \qquad (17a)$$

und fügt man den ersten, für $\sigma=0$ geltenden Theil von (d) hinzu, indem man

$$\frac{(-1)^{\mu}}{2}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\frac{a^{\mu-\lambda}a_1^{\lambda}}{(\mu-\lambda)!\,\lambda!}Z^{(0)}_{\mu-\lambda,\lambda}h_{\mu-\lambda,i}h'_{\lambda,k}=\begin{Bmatrix}\mu\\ i,k\end{Bmatrix} \qquad (17b)$$

setzt, so ergibt sich

$$G_{\mu}=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\mu\\ i,k\end{Bmatrix}\cos(iM-kM_1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\mu\\ \sigma,i,k\end{Bmatrix}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1).\right) \qquad (f)$$

Beachtet man die leicht zu verificirenden Relationen

$$\begin{pmatrix}0,0,0\\ \sigma,\sigma,\sigma\end{pmatrix}=4 \qquad \begin{pmatrix}0,0,1\\ \sigma,\sigma,k\end{pmatrix}=2\tau^{\prime(\sigma-k)}$$

$$\begin{pmatrix}0,0,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}0,0,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}0,1,0\\ \sigma,i,\sigma\end{pmatrix}=2\tau^{(\sigma-i)} \qquad \begin{pmatrix}0,1,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\tau^{(\sigma-i)}\tau^{\prime(\sigma-k)}$$

$$\begin{pmatrix}0,1,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}0,\varkappa,\lambda\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=h_{\varkappa,\sigma-i}\,h'_{\lambda,\sigma-k}$$

$$\begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,\sigma,k\end{pmatrix}=2\alpha^{\prime(\sigma-k)} \qquad \begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,i,\sigma\end{pmatrix}=2\alpha^{(\sigma-i)}$$

$$\begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}1,0,0\\ \sigma,\sigma,\sigma\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}1,1,0\\ \sigma,i,\sigma\end{pmatrix}=\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\alpha^{\iota}\,\tau^{(\sigma-i-\iota)} \qquad \begin{pmatrix}1,0,1\\ \sigma,\sigma,k\end{pmatrix}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\alpha^{\prime(\varkappa)}\,\tau^{\prime(\sigma-k-\varkappa)}$$

$$\begin{pmatrix}1,1,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\alpha^{\prime(\sigma-k)}\tau^{(\sigma-i)} \qquad \begin{pmatrix}1,0,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\alpha^{(\sigma-i)}\tau^{\prime(\sigma-k)}$$

$$\begin{pmatrix}1,1,1\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\alpha^{(\iota)}\tau^{(\sigma-i-\iota)}\tau^{\prime(\sigma-k)}+\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\alpha^{\prime(\varkappa)}\tau^{(\sigma-i)}\tau^{\prime(\sigma-k-\varkappa)}\right]$$

$$\begin{pmatrix}2,0,0\\ \sigma,i,k\end{pmatrix}=2\{2,\ \sigma-i,\ \sigma-k\}$$

so ergibt sich ohne Mühe die Giltigkeit der Gleichung (f) auch für $\mu=0$, $\mu=1$ und $\mu=2$, und man hat nur noch die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}G_{\mu}$$

zu bilden. Sei nun

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}\mu\\ \sigma,i,k\end{Bmatrix}=C_{\sigma,i,k} \qquad \frac{1}{4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}\mu\\ i,k\end{Bmatrix}=C_{i,k}$$

so wird

$$\frac{1}{\rho^3} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{i,k} \cos(iM - kM_1) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\sigma,i,k} \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1) \tag{18}$$

Schreibt man in den Ausdrücken für $\begin{Bmatrix} \mu \\ i,k \end{Bmatrix}$ an Stelle von $\mu - \lambda$ auch $\varkappa$, so dass also $\varkappa + \lambda = \mu$ sein wird, so hat man bei der Summation nach μ

$$\text{in } C_{\sigma,i,k}: \quad \varkappa + \lambda + \tau = \mu \ldots \mu = 0, 1, 2 \ldots \infty$$
$$\text{in } C_{i,k}: \quad \varkappa + \lambda = \mu \ldots\ldots \mu = 0, 1, 2 \ldots \infty$$

was offenbar mit einer dreifachen Summation nach $\varkappa$, λ und τ von 0 bis ∞, respective einer zweifachen nach $\varkappa$ und λ von 0 bis ∞ zusammenfällt. Man wird daher haben

$$\left.\begin{aligned} C_{\sigma,i,k} &= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\varkappa!\,\lambda!\,\tau!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4} \sigma^{\tau} Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} \tau, \varkappa, \lambda \\ \sigma, i, k \end{pmatrix} \\ C_{i,k} &= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}}{\varkappa!\,\lambda!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{8} Z^{(0)}_{\varkappa,\lambda} h_{\varkappa,i} h'_{\lambda,k} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

In den Gleichungen (19) treten die durch (16) definirten Grössen $\begin{pmatrix} \tau, \mu, \nu \\ \sigma, i, k \end{pmatrix}$ auf; dieselben lassen sich jedoch in eine für die praktische Verwendung passendere Form bringen. Es ist nämlich

$$\binom{\tau,\mu,\nu}{\sigma,i,k} = \frac{1}{2}\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\{\tau,\iota,\varkappa\}\,h_{\mu,\sigma-\iota-i}h'_{\nu,\sigma-\varkappa-k}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\iota=-\infty}^{+\infty}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\sum_{\lambda=0}^{\tau}\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix}\eta_{\tau-\lambda,\iota}\eta'_{\lambda,\varkappa}h_{\mu,\sigma-\iota-i}h'_{\nu,\sigma-\varkappa-k}$$

wenn Kürze halber gesetzt wird

$$\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix} = (-1)^{\lambda}\binom{\tau}{\lambda} \text{ für gerade } \tau$$

$$\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix} = +\binom{\tau}{\lambda} \text{ für ungerade } \tau$$

Vertauscht man hier die Summationsordnung und fasst die von der Excentricität des gestörten Planeten abhängigen Glieder zusammen, ebenso die von der Excentricität des störenden Planeten abhängigen, so kann man

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta_{\alpha,\varkappa}h_{\beta,\gamma-\varkappa} &= E^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}\\ \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\alpha,\varkappa}h'_{\beta,\gamma-\varkappa} &= E'^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

setzen, und dann wird

$$\binom{\tau,\mu,\nu}{\sigma,i,k} = \sum_{\lambda=0}^{\tau}\begin{bmatrix}\tau\\ \lambda\end{bmatrix}E^{(\sigma-i)}_{\tau-\lambda,\mu}E'^{(\sigma-k)}_{\lambda,\nu} \quad (16a)$$

Aus (20) ergibt sich

$$E^{(-\gamma)}_{\alpha,\beta} = (-1)^{\alpha}E^{(\gamma)}_{\alpha,\beta} \quad (20a)$$

woraus sofort folgt

$$E^{(0)}_{2s+1,r} = 0$$

Mit Hilfe der früher gefundenen Werthe von h, η kann man die sämmtlichen E als Reihen, die nach Potenzen der Excentricität fortschreiten, finden.[1] Man erhält für dieselben leicht die folgenden Probegleichungen:

[1] Diese Reihen habe ich bereits zum grössten Theile, bis inclusive zur 10. Potenz der Excentricität, berechnet.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} E^{(0)}_{2s,r} = 0 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{=\infty} i^2 E^{(0)}_{2s,r} = 0 \qquad s > 1 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i^2 E^{(0)}_{2,r} = -2e^r\left[1-\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2}\right]^2 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i E^{(0)}_{2s+1,r} = 0 \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i E^{(0)}_{1,r} = e^r\left(-1+\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

In Folge von (16 *a*) ergibt sich nun an Stelle der ersten Gleichung (19)

$$C_{s,i,k} = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\tau} \frac{(-1)^{x+\lambda+\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{x!\,\lambda!\,\tau!}\frac{a^x a_1^\lambda}{4}\sigma^\tau Z^{(\sigma)}_{x\lambda}\begin{bmatrix}\tau\\ \nu\end{bmatrix} E^{(\sigma-i)}_{\tau-\nu,x} E^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}$$

Setzt man nun

$$\tau - \nu = \mu$$

so wird

$$\frac{(-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\tau!}\begin{bmatrix}\tau\\ \nu\end{bmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{\tau}{2}}}{\tau!}\cdot(-1)^\nu\frac{\tau!}{\nu!\,\mu!} = \frac{(-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}}}{\mu!\,\nu!} \text{ für } \mu+\nu \text{ gerade}$$

und

$$\frac{(-1)^{\left[\frac{\tau+1}{2}\right]}}{\tau!}\begin{bmatrix}\tau\\ \nu\end{bmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{\tau+1}{2}}}{\tau!}\frac{\tau!}{\mu!\,\nu!} = \frac{(-1)^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}}{\mu!\,\nu!} \text{ für } \mu+\nu \text{ ungerade}$$

Definirt man also

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon)&=(-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}} \quad \text{für } \mu+\nu \text{ gerade}\\ (\varepsilon)&=(-1)^{\frac{\mu+\nu+1}{2}} \quad \text{für } \mu+\nu \text{ ungerade}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}C_{\sigma,i,k}&=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu}Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa}E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}\\ C_{i,k}&=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}}{\varkappa!\,\lambda!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{8}Z^{(0)}_{\varkappa,\lambda}h_{\varkappa,i}h'_{\lambda,k}\end{aligned}\right\} \tag{22a}$$

und dann wird

$$\frac{1}{\rho_1^3}=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_{\sigma,i,k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+i\mathrm{M}-k\boldsymbol{M}_1) \tag{22b}$$

Es genügt, die erste der beiden Formeln (22*a*) beizubehalten, indem man ohne Mühe findet, dass mit Rücksicht auf die früheren Festsetzungen die zweite aus der ersten hervorgeht; man hat hier nur die entsprechenden Werthe für die Grössen E, E' für μ, ν, $\sigma=0$ zu bemerken; sie sind:

$$E^{(0)}_{0,0}=2 \qquad E^{(0)}_{0,1}=e^2 \qquad E^{(0)}_{0,\alpha}=h_{\alpha,0} \qquad E^{(0)}_{\alpha,0}=\eta_{\alpha,0}$$
$$E^{(i)}_{0,0}=0 \qquad E^{(i)}_{0,1}=h_{1,i} \qquad E^{(i)}_{0,\alpha}=h_{\alpha,i} \qquad E^{(i)}_{\alpha,0}=\eta_{\alpha,i}$$

Bedeuten nun X, Y, Z die störenden Kräfte, so ist bekanntlich

$$X=\sum k^2m_1\left[\frac{x'_1-x}{\rho_1^3}-\frac{x'_1}{r_1^3}\right]$$
$$Y=\sum k^2m_1\left[\frac{y'_1-y}{\rho_1^3}-\frac{y'_1}{r_1^3}\right]$$
$$Z=\sum k^2m_1\left[\frac{z'_1-z}{\rho_1^3}-\frac{z'_1}{r_1^3}\right]$$

wo übereinstimmend mit der eingangs gewählten Bezeichnungsweise $x'_1\,y'_1\,z'_1$ Coordinaten des störenden, x, y, z diejenigen des

gestörten Himmelskörpers, bezogen auf die Bahn des letzteren bedeuten. Hiebei ist die x-Axe nach dem Perihel der gestörten, so wie die x_1-Axe für die Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1$, die sich auf die Bahnebene der störenden Planeten beziehen, nach dem Perihel des letzteren gerichtet. Nun findet man ohne Mühe

$$x'_1 = (1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2 - \sin\tfrac{1}{2}i_1^2)(r_1)\cos(\pi_1 + v_1 - \pi) + \mathfrak{X}$$
$$y'_1 = (1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2 - \sin\tfrac{1}{2}i_1^2)(r_1)\sin(\pi_1 + v_1 - \pi) + \mathfrak{Y}$$
$$z'_1 = -(r_1)\sin i \sin(\pi_1 + v_1 - \Omega) + (r_1)\sin i_1 \sin(\omega_1 + v_1) +$$
$$+ 4(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 \sin(\omega_1 + v_1)n + z_1[1 - 2\sin\tfrac{1}{2}i^2 - 2\sin\tfrac{1}{2}i_1^2 +$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}i_1 \{\cos\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i_1 \cos(\Omega - \Omega_1) + \sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\}]$$

wobei

$$\mathfrak{X} = (r_1)\sin\tfrac{1}{2}i^2\cos(\pi_1 + v_1 - \Omega + \omega) + (r_1)\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\cos(\omega_1 - \Omega_1 + v_1 + \pi)$$
$$+ 2(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1[\cos(\omega_1 + v_1 - \omega) - \cos(\omega_1 + v_1 + \omega)]m$$
$$+ z_1[-\sin i_1 \sin(\pi - \Omega_1) + \sin i \sin\omega + 4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1 \sin\omega \,.\, p]$$
$$\mathfrak{Y} = -(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(\pi_1 + v_1 - \Omega + \omega) - (r_1)\sin\tfrac{1}{2}i_1^2\sin(\omega_1 - \Omega_1 + v_1 + \pi)$$
$$+ 2(r_1)\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1[\sin(\omega_1 + v_1 - \omega) + \sin(\omega_1 + v_1 + \omega)]m$$
$$+ z_1[-\sin i_1 \cos(\pi - \Omega_1) + \sin i \cos\omega + 4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}i_1\cos\omega \,.\, p]$$

und ferner

$$x = (r)\cos v$$
$$y = (r)\sin v$$

Für die elliptische Bewegung gelten bekanntlich die Entwicklungen

$$r\cos v = \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \rho^{(i)}\cos iM$$
$$r\sin v = \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma^{(i)}\sin iM$$

wo

$$\rho^{(0)} = -3e;\quad \rho^{(i)} = \rho^{(-i)} = C_i^{(1)}$$

$$\sigma^{(0)} = 0;\quad \sigma^{(i)} = -\sigma^{(-i)} = \sqrt{1-e^2}\, S_i^{(1)}$$

Hieraus erhält man nun, wenn Π irgend ein beliebiger Winkel ist

$$\left.\begin{aligned} r\cos(v+\Pi) &= \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)} \cos(iM+\Pi) \\ r\sin(v+\Pi) &= \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)} \sin(iM+\Pi) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

demnach auch

$$\left.\begin{aligned} r\cos v &= \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)} \cos iM \\ r\sin v &+ \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)} \sin iM \end{aligned}\right\} \quad (23a)$$

wobei in der Entwicklung von $r\cos v$ der Coëfficient von $\cos iM$ und in der Entwicklung von $r\sin v$ der Coëfficient von $\sin iM$ derselbe ist, aber die Beziehung $\mathfrak{S}^{(i)} = \mathfrak{S}^{(-i)}$ nicht mehr besteht; es ist

$$\mathfrak{S}^{(i)} = \rho^{(i)} + \sigma^{(i)} = C_i^{(1)} + \cos\varphi\, S_i^{(1)} = \frac{1}{i}\left\{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 J_{ai}^{i-1} - \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 J_{ai}^{i+1}\right\}$$

$$\mathfrak{S}^{(0)} = -3e = C_0^{(1)} - 2e$$

Man erhält überdies, ebenfalls durch die Coëfficienten $\mathfrak{S}^{(i)}$ ausgedrückt:

$$\cos v = -e + \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\,\mathfrak{S}^{(i)} \cos\varphi \cos iM$$

$$\sin v = \tfrac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\,\mathfrak{S}^{(i)} \cos\varphi \sin iM$$

und

$$\left.\begin{aligned}\cos(v+\Pi) &= \frac{\cos\varphi}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\,\mathfrak{S}^{(i)}\cos(iM+\Pi) - e\cos\Pi\\ \sin(v+\Pi) &= \frac{\cos\varphi}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\,\mathfrak{S}^{(i)}\sin(iM+\Pi) - e\sin\Pi\end{aligned}\right\} \quad (23\,b)$$

Die Ausdrücke für x_1' und y_1' sind einander völlig ähnlich gebaut; nur tritt an die Stelle des cos oder sin in x_1' resp. sin oder cos im Ausdrucke für y_1'. Der Werth von $\frac{1}{\rho_1^3}$ setzt sich aus einem Aggregate von cos-Gliedern zusammen; da nun

$$2\cos a\cos A = \cos(a-A)+\cos(a+A)$$
$$2\sin a\cos A = \sin(a-A)+\sin(a+A)$$

so wird man nur einen der beiden Ausdrücke $\frac{x_1'}{\rho_1^3}$, $\frac{y_1'}{\rho_1^3}$, mit denen wir uns zunächst beschäftigen, zu entwickeln haben, um durch Vertauschung der sin- und cos-Functionen sofort den anderen zu erhalten. Es ist nun zunächst hervorzuheben, dass sämmtliche in $x_1'\,y_1'\,z_1'$ auftretenden Glieder (wo die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ von der zweiten oder höherer Ordnung der Neigung sind, von denen nur der Bequemlichkeit halber zwei Glieder abgetrennt, und mit dem ersten Hauptgliede vereinigt wurden) die Form haben

$$M(r_1)\cos(v_1+\Pi);\quad N(r_1)\sin(v_1+\Pi).$$

Es handelt sich also um die Entwicklung von

$$\frac{(r_1)\cos(v_1+\Pi)}{\rho_1^3}$$

Hiefür erhält man nun

$$\frac{a_1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{S}^{(k)}\cos(kM_1+\Pi)\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}C_{\sigma,i,l}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-lM_1)$$
$$=\frac{a_1}{4}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{S}^{(k-l)}C_{\sigma,i,l}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1-\Pi)$$
$$+\frac{a_1}{4}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{S}^{(l-k)}C_{\sigma,i,l}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1+\Pi)$$

oder, wenn man Kürze halber setzt

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{l(k-l)} C_{\sigma,i,l} = D^{(-)}_{\sigma,i,k}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{l(l-k)} C_{\sigma,i,l} = D^{(+)}_{\sigma,i,k}$$

$$\frac{(r_1)\cos(v_1+\Pi)}{\rho_1^3} = \frac{a_1}{2}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(-)}_{\sigma,i,k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1-\Pi)$$
$$+\frac{a_1}{2}\sum_{\sigma=0}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(+)}_{\sigma,i,k}\cos(\sigma\pi-\sigma\pi_1+iM-kM_1+\Pi) \qquad (24)$$

Die Coëfficienten $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ lassen sich noch wesentlich vereinfachen, indem man sie genau auf dieselbe Form bringt, welche die C-Coëfficienten haben, in welchen die von den Excentricitäten und den Axenverhältnissen abhängigen Glieder getrennt erscheinen. Zu diesem Zwecke setzen wir noch

$$\frac{e}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{s,k} S^{(1)}_{i+k} = f_{s+1,i} \qquad (25a)$$

wo also, wie leicht zu verificiren

$$f_{s,-i} = -f_{s,i} \qquad (25b)$$

und speciell

$$f_{1,i} = e S^{(1)}_i$$

Mit Benützung von (12) und der leicht zu beweisenden Relation

$$\binom{s}{\lambda} - \binom{s}{\lambda-1} = \binom{s+1}{\lambda}\frac{s-2\lambda+1}{s+1}$$

ergibt sich ohne Mühe

$$f_{s,i} = \frac{e^s}{2^s - 1}\left\{S_i^{(s)} + (s-2)S_i^{(s-2)} + \frac{(s-1)(s-4)}{1.2}S_i^{(s-4)} + \frac{(s-1)(s-2)(s-6)}{1.2.3}S_i^{(s-6)} + \ldots + \binom{s}{\lambda}\frac{s-2\lambda}{s}S_i^{(s-2\lambda)} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{s}\binom{s}{\frac{s-1}{2}}S_i^{(1)} \text{ für } s \text{ ungerade} \right\}$$

$$\left. + \frac{2}{s}\binom{s}{\frac{s}{2}-1}S_i^{(2)} \text{ für } s \text{ gerade} \right\}$$

Als Probe hat man, da

$$\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} iS_i^{(m)} = \frac{m}{1-e}$$

die Gleichung

$$\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} if_{s,i} = \frac{1}{1-e}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{s}\binom{s}{\lambda}\frac{(s-2\lambda)^2}{s} = \frac{1}{1-e}\frac{1}{2}\sum_{\lambda=-0}^{s}\binom{s}{\lambda}\left(s - 4\lambda + \frac{4\lambda^2}{s}\right)$$

und da

$$\lambda\binom{s}{\lambda} = s\binom{s-1}{\lambda-1} \text{ und } \sum_{\lambda=0}^{s}\binom{s}{\lambda} = 2^s$$

so wird

$$\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} i f_{s,i} = \frac{e_s}{1-e}$$

Substituirt man in $D^{(\mp)}_{\sigma,i,k}$ für $\mathfrak{S}'^{\pm(k-l)}$ und $C_{\sigma,i,l}$ Werthe, so folgt

$$D^{(\mp)}_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu} Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda} E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa}\left\{\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(C'^{(1)}_{k-l} \pm \cos\varphi' S'^{(1)}_{k-l}) E'^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} - e' E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}\right\}$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} C'^{(1)}_{k-l} E'^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} = \frac{1}{2e'}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\nu,\varkappa}\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h'_{\lambda,\sigma-l-\varkappa}\tau'^{(k-l)} = \frac{1}{e'}E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} S'^{(1)}_{k-l} E'^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\nu,\varkappa}\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h'_{\lambda,\sigma-l-\varkappa} S'^{(1)}_{k-l} = \frac{1}{2e'}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\nu,\varkappa} f'_{\lambda+1,k+\varkappa-\sigma}$$

Setzt man daher, analog mit (20)

$$\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta_{\alpha,\varkappa} f_{\beta,\gamma-\varkappa} = F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}, \quad \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\eta'_{\alpha,\varkappa} f'_{\beta,\gamma-\varkappa} F'^{(\gamma)}_{\alpha,\beta} \qquad (26)$$

wobei, wie man leicht findet

$$F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta} = (-1)^{\alpha+1} F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}$$

so wird

$$\frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S^{(1)}_{k-l} E^{(\sigma-l)}_{\nu,\lambda} = -\frac{1}{e'} F^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1}$$

folglich

$$D^{(\mp)}_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4} \sigma^{\mu+\nu} Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda} E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa} \left(\frac{1}{e'} E^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1} \mp \frac{\cos\varphi'}{e'} F^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda+1} - e' E^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda} \right).$$

Die Werthe von $D^{(\mp)}_{\sigma,i,k}$ werden genau dieselben sein für $\frac{x'_1}{\rho_1^3}$ und $\frac{y'_1}{\rho_1^3}$, und zwar für sämmtliche correspondirende aus den einzelnen Theilen von x'_1 und y'_1 entstehende Glieder, denn es wird ebenfalls

$$\left.\begin{aligned} \frac{(r_1)\sin(v_1+\Pi)}{\rho_1^3} = &-\frac{a_1}{2} \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(-)}_{\sigma,i,k} \sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 - \Pi) \\ &+\frac{a_1}{2} \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} D^{(+)}_{\sigma,i,k} \sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 + \Pi) \end{aligned}\right\} \quad (24\,a)$$

Für das erste Glied in x_1' y_1' hat man zu setzen

$$\Pi = \pi_1 - \pi$$

und den Coëfficienten $D^{(\mp)}_{\sigma,i,k}$ zu multipliciren mit

$$(1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2 - \sin\tfrac{1}{2}i_1^2);$$

für die folgenden Glieder würde Π immer andere Werthe haben (ebenso wie die mit den D zu multiplicirenden Coëfficienten) und es werden dann die Argumente die Form erhalten

$$(\sigma + \alpha)\pi - (\sigma' + \beta)\pi_1 + iM - kM_1 + \gamma\Omega + \delta\Omega_1$$

wo α, β, γ, δ die Werthe $0, +1$ und -1 erhalten können. Beachtet man, dass die von z_1 unabhängigen Glieder in z_1' dieselbe Form haben, so wird man für $\frac{z_1'}{\rho_1^3}$ (für diese Glieder) auch die obige Entwicklung verwenden können. Die Zusammenfassung der Glieder mit gleichen Argumenten, so wie auch das Heraussuchen derjenigen Glieder, die zu einem gegebenen Argumente gehören, wird praktisch keinen Schwierigkeiten unterliegen, da es sehr leicht ist, denjenigen Werth von Π zu bestimmen, für welchen aus (24) oder (24a) das gegebene Argument entsteht.

Was die von z_1 abhängigen Glieder anbelangt, so ist zu bemerken, dass nächst den von den Neigungen abhängigen Coëfficienten die Argumente der sin und cos von den wahren Anomalien unabhängig sind, so dass hier nur die Formen

$$\frac{Mz_1\cos\Pi}{\rho_1^3} \text{ und } \frac{Nz_1\sin\Pi}{\rho_1^3}$$

zu betrachten sind. Da z_1 die Störung in Breite für den störenden Himmelskörper ist, so werden die Coëfficienten $M\cos\Pi$, $N\sin\Pi$ immer direct mit $C_{\sigma,i,k}$ vereinigt werden können. Nur beim Monde, wo die Argumente Ω, ω einer raschen Änderung unterliegen,[1] wird man ohne Schwierigkeit

---

[1] In allen anderen Fällen wird man auch $\cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$ zerlegen und die Glieder, deren Argumente $(iM - kM_1)$ sind, vereinigen können.

$$\frac{z_1\cos\Pi}{\rho_1^3} = z_1 \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2} C_{\sigma,i,k}[\cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 - \Pi) + \cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 + \Pi)]$$

$$\frac{z_1\sin\Pi}{\rho_1^3} = z_1 \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2} C_{\sigma,i,k}[-\sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 - \Pi) + \sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1 + \Pi)]$$

verwenden können. In dem Ausdruck für z_1' kann man den Factor von z_1 überhaupt als constant ansehen.

Ferner hat man

$$\frac{x}{\rho_1^3} = \frac{(r)\cos v}{\rho_1^3} = \frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{Y}^{(i)}\cos iM \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{\sigma,l,k}\cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + lM + kM_1)$$

$$= \frac{a}{2}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_{\sigma,i,k}\cos(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1)$$

und

$$\frac{y}{\rho_1^3} = \frac{a}{2}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_{\sigma,i,k}\sin(\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1) \qquad (27)$$

wenn

$$G_{\sigma,i,k} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\vartheta^{(i-l)} + \vartheta^{(l-i)}) C_{\sigma,l,k}$$

und

$$H_{\sigma,i,k} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\vartheta^{(i-l)} - \vartheta^{(l-i)}) C_{\sigma,l,k}$$

Da aber

$$\vartheta^{(l-i)} + \vartheta^{(l-i)} = 2\, C^{(1)}_{i-l}; \quad \vartheta^{(i-l)} - \vartheta^{(l-i)} = 2\cos\varphi\, S^{(1)}_{i-l}$$

und diese Grössen nur von der Excentricität des gestörten Planeten abhängen, so wird

$$G_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4}\, \sigma^{\mu+\nu}\, Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\, E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} C^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa} - 2e\, E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa} \right)$$

$$H_{\sigma,i,k} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,!\,\mu\nu!.} \frac{a^{\varkappa} a_1^{\lambda}}{4}\, \sigma^{\mu+\nu}\, Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\, E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda} \cos\varphi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa}$$

Wie früher ist aber auch wieder

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} C^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa} = \frac{2}{e}\, E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa+1}; \quad \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S^{(1)}_{i-l}\, E^{(\sigma-l)}_{\mu,\varkappa} = -\frac{2}{e}\, F^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa-1}$$

Demzufolge

$$G_{\sigma,i,k}=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu}Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{2}{e}E^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa+1}-2eE^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa}\right)E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}$$

$$H_{\sigma,i,k}=-\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}(\varepsilon)}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\,\nu!}\frac{a^{\varkappa}a_1^{\lambda}}{4}\sigma^{\mu+\nu}Z^{(\sigma)}_{\varkappa,\lambda}\cdot\frac{2\cos\varphi}{e}F^{(\sigma-i)}_{\mu,\varkappa+1}E'^{(\sigma-k)}_{\nu,\lambda}$$

Endlich hat man

$$\frac{1}{r_1^3}=\frac{1}{(r_1)^3}-\frac{3}{2}\frac{z_1^2}{(r_1)^5}+\frac{3.5}{2.4}\frac{z_1^4}{(r_1)^7}-\frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{z_1^6}{(r_1)^9}+\ldots$$

wo (r_1) der gestörte Radius vector des störenden Planeten ist. Berücksichtigt man dessen Störungen auch hier wieder dadurch, dass man im Resultate $a_1(1+\gamma_1)$ an Stelle von a_1 setzt, und beachtet, dass in den Entwicklungen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}A_i^{(n)}\cos iM;\quad\left(\frac{a}{r}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}A_i^{(-n)}\cos iM$$

die Coëfficienten $A_i^{(n)}$, $A_i^{(-n)}$ als bekannte Functionen der Excentricität anzusehen sind, so wird

$$\frac{1}{(r_1)^n}=\frac{1}{2}\frac{1}{a_1^n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}A_\tau'^{(-n)}\cos iM_1$$

und daher

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

wenn

$$Y'^{(i)} = \frac{A_i'^{(-3)}}{a_1^3} - \frac{3}{2} z_1^2 \frac{A_i'^{(-5)}}{a_1^5} + \frac{3.5}{2.4} z_1^4 \frac{A_i'^{(-7)}}{a_1^7} - \frac{3.5.7}{2.4.6} z_1^6 \frac{A_i'^{(-9)}}{a_1^9} \ldots (28)$$

also

$$Y'^{(-i)} = Y'^{(i)}$$

ist. Man hat demnach in den Ausdrücken für $\frac{x_1'}{r_1^3}, \frac{y_1'}{r_1^3}, \frac{z_1'}{r_1^3}$ ein Aggregat von Gliedern der Form

$$M(r_1)\cos(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

$$N(r_1)\sin(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

$$\tfrac{1}{2} z_1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1$$

Setzt man hier die entsprechenden Reihen ein, und führt die Entwicklungen in der wiederholt erläuterten Weise durch, so erhält man, abgesehen von den Coëfficienten M, N

$$(r_1)\cos(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \cos(i M_1 + \Pi)$$

$$(r_1)\sin(v_1 + \Pi) \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Y'^{(i)} \cos i M_1 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \sin(i M_1 + \Pi)$$

wenn

$$L_i = \frac{a_1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y'^{(k-i)} \mathfrak{Y}'^{(k)}$$

$Y^{(i)}$ hängt aber noch von den Störungen des Himmelskörpers ab, und allgemein tritt das Glied auf

$$z_1^{\alpha} \frac{A_i^{(-\beta)}}{a_1^{\beta}(1+\gamma_1)^{\beta}}$$

so dass man die Formen erhält

$$z_1^{\alpha}(1+\gamma_1)^{-\beta+1} \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (iM_1 + \Pi)$$

wo

$$L_i = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1^{\beta-1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cdot A_{k-i}^{\prime(-\beta)} \mathcal{Y}^{(k)}$$

und

$$z_1^{\alpha-1}(1+\gamma_1)^{-\beta} \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L_i \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (iM_1 + \Pi)$$

wo

$$L_i = \tfrac{1}{2} \frac{1}{a_1^{\beta}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{k-i}^{\prime(-\beta)} \mathcal{Y}^{(k)}$$

und mit Rücksicht auf den Werth von Π wird man jederzeit ohne Mühe in der Lage sein, die in den Störungen bedeutend werdenden Glieder (mit kleinen Integrationsdivisoren) herauszusuchen.

Ebendasselbe gilt auch von den $Z_{\varkappa,\lambda}^{(\sigma)}$. Sieht man von den von der Neigung abhängigen Theilen ab, so wird man

$$(Z_{\varkappa,\lambda}^{(\sigma)})_0 = \frac{\partial^{\mu+\nu} c_1^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}}$$

zu setzen haben. Setzt man der Reihe nach $Z_{\varkappa,\lambda}^{(\sigma)}$ gleich

$$-\frac{3}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_2^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}}; \quad +\frac{3.5}{2.4}\zeta_1^4 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_3^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}}; \quad -\frac{3.5.7}{2.4.6}\zeta_1^6 \frac{\partial^{\mu+\nu} c_4^{(\sigma)}}{\partial a^{\mu} \partial a_1^{\nu}}$$

so ergeben sich die von den Quadraten, vierten und sechsten Potenzen der Neigung abhängigen Glieder. Nun kann man immer annehmen[1]

[1] Wenn man die Producte, beziehungsweise der zweiten Potenzen der Massen in die fünften Potenzen der Neigungen, der dritten Potenzen der Massen in die zweiten Potenzen der Neigungen, der vierten Potenzen der Massen in die ersten Potenzen der Neigungen, ferner der fünften Potenzen der Massen und die achten Potenzen der Neigungen vernachlässigt.

$$\zeta_1^2 = -2(r)(r_1)\textcircled{a} - 2(r)\textcircled{aa}z_1 - 2(r_1)\textcircled{ab}z + (z_1 - z)^2$$

$$\zeta_1^4 = 4[(r)(r_1)\textcircled{a}]^2 + 4(r)(r_1)\textcircled{a}.(r)\textcircled{aa}z_1 + 4(r)(r_1)\textcircled{a}.(r_1)\textcircled{ab}z$$

$$\zeta_1^6 = -8[(r)(r_1)\textcircled{a}]^3$$

Wählt man für die Störungen der Planeten untereinander (der kleinen Planeten durch die grossen) die Bahnebene des gestörten Planeten zur Fundamentalebene, so wird demnach

$$\textcircled{a} = \sin\tfrac{1}{2}i_1^2[\cos[\pi + v + \omega_1 - \Omega_1 + v) - \cos(\pi + v - \pi_1 - v_1)]$$

$$\textcircled{aa} = -\sin i_1 \sin(\pi + v - \Omega_1)$$

$$\textcircled{ab} = +\sin i_1 \sin(\omega_1 + v_1)$$

Für den Mond wird man die Bahnebene der Erde (des Hauptplaneten) zur Fundamentalebene wählen, und dann wird für die von der Sonne herrührenden störenden Kräfte

$$\textcircled{a} = \sin\tfrac{1}{2}i^2[\cos(\pi_1 + v_1 + \omega - \Omega + v) - \cos(\pi + v - \pi_1 - v_1)]$$

$$\textcircled{aa} = \sin i \sin(\omega + v)$$

$$\textcircled{ab} = -\sin i \sin(\pi_1 + v_1 - \Omega)$$

Für die durch die Planeten bewirkten störenden Kräfte kann man sich auf die erste Potenz der Massen beschränken, und hat dann

$$\zeta_1^2 = -2(r)(r_1)\textcircled{a}; \quad \zeta_1^4 = +4[(r)(r_1)\textcircled{a}]^2$$

wobei für $\textcircled{a}$ der vollständige Ausdruck zu setzen ist.

Es sind nun die Ausdrücke für $(r)\textcircled{aa}$, $(r_1)\textcircled{ab}$ von der Form

$$(r)\textcircled{aa} = M.\frac{a}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)} \sin(iM + \Pi)$$

$$(r_1)\textcircled{ab} = M_1 \frac{a_1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}'^{(k)} \sin(kM_1 + \Pi_1)$$

und $(r)(r_1)\textcircled{a}$ besteht aus einem Aggregat von zwei (im letzten Falle von sechs) Gliedern der Form

$$N(r)(r_1)\cos(v \pm v_1 + \Xi) =$$
$$= N\frac{aa_1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{S}^{(i)}\mathfrak{S}'^{(k)} \cos(iM \pm kM_1 + \Xi)$$

Es werden sich demnach auch die Ausdrücke $[(r)(r_1)\textcircled{a}]^2$; $[(r)(r_1)\textcircled{a}]^3$; $(r)(r_1)\textcircled{a}\cdot(r)\textcircled{aa}$; $(r)(r_1)\textcircled{a}(r_1)\textcircled{ab}$ in eben solche Reihen entwickeln lassen, welche nach den Argumenten $iM \pm kM_1 + \Pi$ fortschreiten, wo Π eine für jede dieser Reihen (von denen allerdings mehrere in den obigen Producten auftreten können) nur von ω, Ω, ω_1, Ω_1 abhängiger Winkel ist, und die Coëfficienten Potenzreihen der Excentricitäten e und e_1 sind, deren Gesetz sich durch Multiplication der Ausdrücke für $(r)\textcircled{aa}$, $(r_1)\textcircled{ab}$, $(r)(r_1)\textcircled{a}$ ergibt. Setzt man die erhaltenen Werthe nach Absonderung der von dem Axenverhältnisse abhängigen Differentialquotienten $\frac{\partial^{\mu+\nu} c^{(\sigma)}_{\rho}}{\partial a^{\mu}\partial a_1^{\nu}}$ an Stelle von $Z^{(\sigma)}_{\mu,\nu}$ in den Ausdruck für $C_{\sigma,i,k}$ ein, so sieht man sofort, dass die Coëfficienten der von der Neigung abhängigen Glieder dieselbe Form haben werden, wie die $C_{\sigma,i,k}$, $G_{\sigma,i,k}$, $H_{\sigma,i,k}$, nur werden an Stelle der von den Excentricitäten abhängigen Reihen $E^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}$, $F^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}$ andere Reihen auftreten, deren analytisches Gesetz sich nicht so leicht anschreiben lässt, die aber algebraisch ebenfalls ein für allemal entwickelt und für die störenden Kräfte stets angewendet werden können. Dabei ist zu bemerken, dass zu den Argumenten $\sigma\pi - \sigma\pi_1 + iM - kM_1$ noch gewisse Bögen Π treten, die die Form

$$\alpha\pi + \beta\pi_1 + \gamma\Omega + \delta\Omega_1$$

haben, wo α, β, γ, δ bestimmte ganze Zahlen sind, und es wird keiner Schwierigkeit unterliegen, jene Argumente zu wählen, die Anlass zum Entstehen merklicher Störungsglieder geben.

Endlich ist noch zu bemerken, dass man in der Entwicklung

$$(a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos\theta)^{-s} = \tfrac{1}{2}c_s^{(0)} + c_s^{(1)}\cos\theta + c_s^{(2)}\cos 2\theta + \ldots$$

in den Coëfficienten $c_s^{(i)}$ überall $a(1+\gamma)$, $a_1(1+\gamma_1)$ an Stelle von a, a_1 zu setzen hat. Ist nun

$$\alpha = \frac{a}{a_1}$$
$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\theta + b_s^{(2)}\cos 2\theta + \ldots$$

so ist

$$b^{(i)}_{-\frac{1}{2}} = -2\frac{1.3.5\ldots(2i-3)}{2.4.6\ldots 2i}\alpha^i\left\{1-\tfrac{1}{2}\frac{2i-1}{2i+2}\alpha^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1.1}{2.4}\frac{(2i-1)(2i+1)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{(2i-1)(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)(2i+6)}\alpha^6-\ldots\right\}$$

$$b^{(i)}_{\frac{3}{2}} = -\frac{(2i+1)(2i-1)}{(1-\alpha^2)^2}b^{(i)}_{-\frac{1}{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}(b^{(i)}_{s+1}+b^{(i+1)}_{s+1}) = \frac{1}{2s(1-\alpha^2)}\left\{(2s-1)\left(\frac{b^{(i)}_s+b^{(i+1)}_s}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(2i+1)\left(\frac{b^{(i)}_s-b^{(i+1)}_s}{2}\right)\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(b^{(i)}_{s+1}-b^{(i+1)}_{s+1}) = \frac{1}{2s(1+\alpha^2)}\left\{(2i+1)\left(\frac{b^{(i)}_s+b^{(i+1)}_s}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(2s-1)\left(\frac{b^{(i)}_s-b^{(i+1)}_s}{2}\right)\right\}$$

$$c^{(i)}_s = b^{(i)}_s . a_1^{-2s}$$

Nun ist

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta a_1}{a_1}$$

und da

$$\Delta a = a\gamma, \quad \Delta a_1 = a_1\gamma_1$$

so wird

$$\Delta\alpha = \alpha(\gamma-\gamma_1)$$

und ferner

$$\Delta b^{(i)}_{-\frac{1}{2}} = \left\{ib^{(i)}_{-\frac{1}{2}}+2\frac{1.3.5\ldots(2i-3)}{2.4.6\ldots 2i}\alpha^{i+2}\left[\frac{2i-1}{2i+1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{(2i-1)(2i+1)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4}\frac{(2i-1)(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)(2i+6)}\alpha^4+\ldots\right]\right\}(\gamma-\gamma_1)$$

$$\Delta b^{(i)}_3 = \left\{ib^{(i)}_{\frac{3}{2}}-2\frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i}\frac{\alpha^{i+2}}{(1-\alpha^2)^2}\left[\frac{2i-1}{2i+2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{(2i-1)(2i+1)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^2+\ldots\right]+\frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}\right\}(\gamma-\gamma_1)$$

$$\tfrac{1}{2}(\Delta b^{(i)}_{s+1} \pm \Delta b^{(i)}_{s+1}) = \pm \frac{\alpha^2(\gamma - \gamma_1)}{1 \mp \alpha^2} \left\{ b^{(i)}_{s+1} \pm b^{(i+1)}_{s+1} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2s(1 \mp \alpha^2)} \left\{ \frac{2s-1}{2} (\Delta b^{(i)}_s \pm \Delta b^{(i+1)}_s) + \frac{2i+1}{2} (\Delta b^{(i)}_s \mp \Delta b^{(i+1)}_s) \right\}$$

$$\Delta c^{(i)}_s = a_1^{-2s} \Delta b^{(i)}_s - 2s\, c^{(i)}_s \gamma_1$$

Ebenso lassen sich die Werthe der wegen der Störungen des Radius vectors auftretenden Incremente der Differentialquotienten der $c^{(i)}_s$ ableiten. Wenngleich die Formeln etwas weitläufig werden, was noch viel mehr der Fall wäre, wenn man überall auch auf die zweiten und dritten Potenzen der Massen Rücksicht nehmen wollte, so wird doch in jenen Fällen, wo es sich um die Entwicklung gewisser mit kleinen Integrationsdivisoren behafteter Glieder handelt, diese independente Entwicklung der störenden Kräfte nicht zu unterschätzende Vortheile bieten, und zwar um so mehr, da es sich hiebei um Glieder höherer Ordnung der Excentricitäten handelt, wo man sich auf niederere Ordnungen der Neigungen, im Allgemeinen auf die zweiten Potenzen der Massen wird beschränken können; jedenfalls wird man in den $c^{(i)}_s$ mit diesen abbrechen können (also in der Entwicklung der störenden Kräfte die mit γ^2, γ_1^2 behafteten Glieder weglassen) und bei den Producten der Differentialquotienten der $c^{(i)}_s$ in die ersten Potenzen der Störungen (so dass die in den störenden Kräften auftretenden Producte der $\frac{\partial^{\mu+\nu} c^{(i)}_s}{\partial a^\mu \partial a_1^\nu} . \gamma$ etc. bereits weggelassen werden), da der λ^{te} Differentialquotient von $c^{(i)}_s$ von der λ^{ten} (oder einer höheren) Ordnung der Excentricitäten des störenden und gestörten Körpers ist.

Über die Constitution der Isuvitinsäure.

Von Dr. **Joseph Schreder.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

Schon vor mehreren Jahren hatte ich mir die Aufgabe gestellt, die Constitution der Isuvitinsäure klar zu legen, wurde aber daran durch den Umstand gehindert, dass durch längere Zeit Gummiguttsorten im Handel zu finden waren, welche keine oder nur eine äusserst schlechte Ausbeute an diesem Präparate lieferten (vergl. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien Bd. LXXVII, II. Abth., Februarheft 1878). In den letzteren Jahren konnte aber wieder Gummigutt erhalten werden, das in der Kalischmelze die von Hlasiwetz und Barth (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. Bd. LIII, II. Abth., Jännerheft 1866) beschriebenen Zersetzungsproducte, speciell Isuvitinsäure, entstehen liess.

Das mittelst Alkohol aus der Drogue ausgezogene Harz wurde nach dem Abdestilliren des Lösungsmittels mit Wasser gewaschen und nach dem Trocknen mit der sechsfachen Menge Kali in der Silberschale verschmolzen. Ich fand es, um die Ausbeute möglichst gut zu gestalten, vortheilhafter, das Schmelzen nach dem Auftreten des melissenartig riechenden Dampfes nicht mehr allzulange fortzusetzen, so dass sich beim Ansäuern der erkalteten Schmelze noch etwas zähes, braunes Harz ausschied, welches leicht durch Filtration entfernt werden konnte. Das Filtrat wurde mit Äther erschöpft, der Äther abdestillirt und der Rückstand in Wasser aufgenommen. Nun wurde Soda bis zur neutralen Reaction zugesetzt und neuerdings mit Äther ausgeschüttelt, um das Phloroglucin zu lösen, die wässerige Lösung der Natronsalze dann wieder angesäuert und jetzt derselben die Säuren durch Äther entzogen. Das nach Verdunsten des letzteren hinterbleibende Säuregemisch wurde in heissem Wasser gelöst und nach dem

Erkalten mit Bleiacetat ausgefällt. Der weisse, käsige Bleiniederschlag, in Wasser suspendirt und mit Schwefelwasserstoff zersetzt, gibt eine Lösung, die nach dem Concentriren alsbald krystallisirt. Die Krystalle werden abgesaugt, gepresst und mehrmals aus Wasser unter Zusatz von Thierkohle umkrystallisirt.

Von der zweiten syrupösen, durch Bleizucker fällbaren Säure wurde nur wenig erhalten. Die Krystalle zeigen alle von Hlasiwetz und Barth für Isuvitinsäure angegebenen Eigenschaften. Sie enthalten kein Krystallwasser und schmelzen, wenn ganz rein, bei 175° (uncorr.).

Bei der Analyse erhielt ich mit der Formel $C_9H_8O_4$ übereinstimmende Zahlen.

0·3048 Grm. Substanz gaben 0·6735 Grm. CO_2 und 0·1222 Grm. H_2O. In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_9H_8O_4$
C	60·26	60·00
H	4·45	4·44

Durch weitere Oxydation der Isuvitinsäure erwartete ich zu einer dreibasischen Säure und, da Trimesinsäure ausgeschlossen war, zur Hemi- oder Trimellithsäure zu gelangen. Als Oxydationsmittel wurde übermangansaures Kali gewählt und die Oxydation in alkalischer Lösung vorgenommen. Die Menge des Kaliumpermanganats wurde so gewählt, dass gerade eine Methylgruppe in Carboxyl übergeführt werden konnte. Die Oxydation verlief am Rückflusskühler sehr langsam und träge und brauchten beispielsweise 5 Grm. Isuvitinsäure zwei Tage, um die berechnete Menge Chamäleonlösung zu entfärben. Nach Beendigung der Oxydation wurde von den Manganoxyden filtrirt, diese mehrmals mit heissem Wasser gewaschen und die Filtrate mit Äther ausgezogen. Der krystallinische Ätherrückstand wurde in Wasser aufgenommen und durch mehrmaliges Umkrystallisiren gereinigt.

Die erhaltenen Krystalle zeigten den Habitus und alle Eigenschaften der Orthophtalsäure. Schmelzpunkt 182°.

Bei der Analyse erhielt ich:

0·2946 Grm. Substanz gaben 0·6233 Grm. CO_2 und 0·0965 Grm. H_2O., d. i. in Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_6O_4$
C	57·70	57·83
H	3·63	3·61

Die Säure war also unzweifelhaft Phtalsäure. Aus dieser Thatsache war der Schluss zu ziehen, dass die Isuvitinsäure nicht drei, sondern nur zwei kohlenstoffhältige Seitenketten im Benzolkerne enthalte, die zu einander in der Orthostellung sich befinden. Um eine weitere Bestätigung dieser Ansicht zu gewinnen, unterwarf ich die Isuvitinsäure selbst einer neuerlichen Behandlung mit schmelzendem Kali. Ich erwartete dabei, falls die ausgesprochene Ansicht über die Constitution derselben richtig war, entweder auch Phtalsäure oder Orthotoluylsäure zu erhalten. In heisse, höchst concentrirte, wässerige Kalilauge wurde Isuvitinsäure portionenweise eingetragen (Verhältniss 6 Mol. KHO zu 1 Mol. Säure). Wenn das Wasser verdampft ist, zeigt sich ein sehr starkes Schäumen, nach kurzer Zeit fliesst die Masse ziemlich ruhig. Man entfernt die Flamme und trägt die erkaltete Schmelze, die etwas röthlich gefärbt ist, in verdünnte Schwefelsäure ein. Dieselbe löst sich ganz klar und Äther entzieht der Lösung eine alsbald krystallisirende Substanz. Diese erwies sich als Gemisch von wenig unveränderter Isuvitinsäure mit einer neuen Säure, dem eigentlichen Reactionsproducte. Nach einigen Versuchen fand ich im Schwefelkohlenstoffe ein passendes Trennungsmittel, das die Isuvitinsäure vollständig ungelöst lässt, die andere Säure aber leicht aufnimmt. Nach dem Verjagen des Schwefelkohlenstoffes wird der Rückstand mehrmals aus heissem Wasser, zuletzt unter Anwendung von Thierkohle, umkrystallisirt. Der Körper erweist sich als eine Säure, die mit Wasserdämpfen flüchtig ist, den Schmelzpunkt 102° (uncorr.) besitzt und in allen Eigenschaften mit der Orthotoluylsäure übereinstimmt.

Die Analyse ergab:

0·299 Grm. Substanz gaben 0·773 Grm. CO_2 und 0·1580 Grm. H_2O. In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_8H_8O_2$
C	70·51	70·59
H	5·87	5·88

Durch diesen Versuch wurde die oben ausgesprochene Ansicht bestätigt und ist demnach die Isuvitinsäure als eine in der Orthostellung carboxylirte Phenylessigsäure anzusprechen, welche analog der von Paternó und Spica[1] beschriebenen isomeren Homoterephtalsäure wohl am besten als Homoorthophtalsäure bezeichnet wird.

Nachschrift. Am selben Tage, als vorstehende Arbeit der kais. Akademie vorgelegt wurde, erschien das zweite Heft der Berliner Berichte pro 1885, welche pag. 172—174 eine interessante Arbeit von Wilhelm Wislicenus, „Über die Einwirkung von Cyankalium auf Phtalid" enthält. Aus dem bei dieser Reaction zunächst entstehenden Cyanid wird durch Kalilauge eine Säure $C_9H_8O_4$ erhalten, welche bei 173·5° schmilzt, als Phenylessigo-carbonsäure bezeichnet wird und nach des Verfassers Angaben einige Ähnlichkeit mit Isuvitinsäure besitzt. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, dass die von Wislicenus synthetisch dargestellte Verbindung wirklich Isuvitinsäure ist. Abgesehen davon, dass der analytische und synthetische Weg zur selben Constitutionsformel führen, stimmen Schmelzpunkt, Mangel an Krystallwässer und sonstige Eigenschaften, Zusammensetzung des Calcium- und Baryumsalzes in befriedigender Weise überein.

---

[1] Berliner Ber. X (1877), pag. 1746.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

KADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1885. — März.

(Mit 12 Tafeln und 2 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

INHALT

des 3. Heftes März 1885 des XCI. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

VI. Sitzung vom 5. März 1885: Übersicht 397

Hann, Die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer. II. Theil. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 403

Liznar, Über den täglichen und jährlichen Gang sowie über die Störungsperioden der magnetischen Declination zu Wien. (Mit 3 Tafeln.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 454

Bobek, Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene. (I., II., III.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] . . 476

Mertens, Die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraëders zweier Flächen II. Ordnung schneidenden Geraden besteht. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 519

Pitsch, Über die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 527

Kachler u. *Spitzer*, Über Camphoronsäure 553

Smolka, Über Mannit-Bleinitrat 575

— Notiz über das Löwe'sche Drittelbleinitrat und das Morawski'sche Pentaplumbotrinitrat. 581

VII. Sitzung vom 12. März 1885: Übersicht 584

Weiss, Notiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 587

VIII. Sitzung vom 19. März 1885: Übersicht 597

Gegenbauer, Über die Divisoren der ganzen Zahlen. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 600

Mertens, Über eine Formel der Determinantentheorie [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 622

— Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat . 637

v. Hepperger, Über die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgange eines Strahlenbüschels monochromatischen Lichtes durch ein Prisma mit gerader Durchsicht. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 640

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. Band. III. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

VI. SITZUNG VOM 5. MÄRZ 1885.

Das k. k. Handels-Ministerium übermittelt ein Exemplar des von der k. k. Seebehörde in Triest gemeinsam mit der k. ungar. Seebehörde in Fiume zusammengestellten „Annuario marittimo“ für das Jahr 1885.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Zur Thorie der Determinanten höheren Ranges.“

Das c. M. Herr Prof. Fried. Brauer übersendet eine von Herrn Dr. Franz Löw in Wien verfasste Abhandlung, betitelt: „Beitrag zur Kenntniss der Coniopterygiden.“

Herr Prof. Dr. Albert Adamkiewicz in Krakau übersendet eine vorläufige Mittheilung, betitelt: „Ein neuer morphologischer Bestandtheil der peripherischen Nerven.“

Herr Prof. Dr. V. Graber in Czernowitz übersendet eine Abhandlung: „Über die Helligkeits- und Farbenempfindlichkeit einiger Meerthiere.“

Herr Moriz Kronfeld, stud. med. in Wien, übersendet eine Abhandlung: „Über einige Verbreitungsmittel der Compositenfrüchte.“

Der Secretär legt noch eine von Herrn F. Wittenbauer, diplom. Ingenieur und Docent an der technischen Hochschule in Graz, eingesendete Abhandlung: „Über die Bewegung einer Ebene im Raume“ vor.

Ferner legt der Secretär behufs Wahrung der Priorität vor:

1. Eine Mittheilung von den Herren Szigyártó und Florian, k. k. See-Officiere in Pola, unter dem Titel: „Einfache Methode der Deviationsbestimmung unabhängig von Peilungen.“

2. Ein versiegeltes Schreiben von Herrn Prof. Dr. E. v. Fleischl in Wien, angeblich enthaltend die Resultate einer Experimental-Untersuchung.
3. Ein versiegeltes Couvert, eingesendet von Herrn E. Plechawski, Official der Carl Ludwig Bahn in Wien, mit der Inhaltsangabe: „Weltzeitkarte Mitteleuropa's."

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht folgende Abhandlungen:

1. „Die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraeders zweier Flächen zweiter Ordnung sich schneidenden Geraden besteht", von Herrn Prof. Dr. F. Mertens in Graz.
2. „Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen." III. Mittheilung, von Herrn K. Bobek, Docent an der deutschen technischen Hochschule zu Prag.

Das w. M. Herr Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung: „Die Fauna der Juraablagerung von Hohnstein in Sachsen", bearbeitet von Herrn Georg Bruder, Assistent am geologischen Institute der deutschen Universität in Prag.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht zwei Arbeiten aus dem Laboratorium der Staatsgewerbeschule in Bielitz:

1. „Über Mannit-Bleinitrat;"
2. „Notiz über das Löwe'sche Drittelbleinitrat und das Morawski'sche Pentaplumbotrinitrat;"

beide Arbeiten von Herrn Alois Smolka.

Das w. M. Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Die Temperatur von Wien und Umgebung nebst einer Studie über den Nachweis von Localeinflüssen auf die Temperaturmittel."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über Camphoronsäure" von den Herren Dr. J. Kachler und Dr. F. V. Spitzer.

Herr Josef Schlesinger, o. ö. Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Die mathematische Formulirung des Gesetzes der Erhaltung der Kraft ist unrichtig."

Herr Dr. J. v. Hepperger, Assistent an der k. k. Sternwarte in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgange eines Strahlenbüschels monochromatischen Lichtes durch ein Prisma mit gerader Durchsicht."

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über den täglichen und jährlichen Gang, sowie über die Störungsperioden der magnetischen Declination zu Wien."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia nacional de ciencias en Córdoba: Boletin. Tomo VII. Entrega 1ª et 2ª. Buenos Aires, 1884; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 49e année, 2e série, tome XIV. Nos. 4—7. Paris, 1885; 8°.

— royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 53e année, 3e série, tome 8. No. 12. Bruxelles, 1884; 8°. — 54e année, 3e série, tome 9. Nr. 1. Bruxelles, 1885; 8°.

— Annuaire. 1885, 51e année. Bruxelles, 1885; 8°.

Academy, the New York of Sciences: Annals. Vol. III. Nos. 1 et 2. New York, 1883; 8°.

— — Transactions. Vol. II. New York, 1882—83; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XXI. Nr. 1—2. Halle a. S.; 4°.

Annales des Mines. 8e série, tome VI, livraisons 4 et 5. Paris, 1884; 8°.

— des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 1884; Décembre. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgemeiner österreichischer: Zeitschrift nebst Anzeigen. XXIII. Jahrgang, Nr. 5 und 6. Wien, 1885; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik. II. Reihe, II. Theil. 1. Heft. Leipzig, 1885; 8°.

Borchgrave, Émile de: L'empereur Étienne Douchan de Serbie et la Péninsule balkanique au XIVe siècle. Bruxelles, 1884; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome C, 1er semestre. Nos. 5—7. Paris, 1885; 4°.

Genootschap, het bataviaasch van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXIX, Aflev. 4 & Deel XXX, Aflev. 1 en 2. Batavia s'Hage, 1884; 8°.

— — Notulen van de Algemeene en Bestuurs-vergaderingen. Deel XXI. 1884. Aflev. 1. Batavia, 1884; 8°.

— koninklijk zoologisch, Natura artis magistra: Tijdschrift. Jaargang V. Aflevering 1. Amsterdam, 1884; 8°. — Bijdragen tot de Dierkunde. 10^e Aflevering 1^e Gedeelte & 11^e Aflevering 2^e Gedeelte. Amsterdam, 1884; gr. 4°.

Gesellschaft, deutsche, chemische: Berichte. XVIII. Jahrgang, Nr. 2 und 3. Berlin, 1885; 8°.

— deutsche geologische: Zeitschrift. XXXVI. Band, 3. Heft. Berlin, 1884; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVIII, Nr. 1. Wien, 1885; 8°.

— österreichische, für Meteorologie: Zeitschrift. XX. Band. Februar-Heft 1885. Wien, 1885; 8°.

— naturforschende, in Bern: Mittheilungen aus dem Jahre 1884. Nr. 1083—1091. Bern, 1884; 8°.

— physikalische zu Berlin: Die Fortschritte der Physik im Jahre 1878. XXXIV. Jahrgang, 1.—3. Abtheilung. Berlin, 1884; 8°.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. XIII. Nr. 1 und 2. Pola, 1885; 8°.

Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland: The Journal. February 1885. Vol. XIV. Nr. 3. London, 1885; 8°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. XIV. Band. Heft 2. Jahrgang 1882. Berlin, 1885; 8°.

Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. VII. Nr. 2. Baltimore, 1885; 4°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXXI, 1. Heft, Leipzig, 1885; 8°.

Kraetzl Franz: Statistische Übersicht des gesammten hochfürstlich Johann Liechtenstein'schen Güterbesitzes. IV. Auflage. Brünn, 1884; kl. 8°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1885. Heft 1. Pola 1885; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXXI. Band, II. Gotha, 1885; 4°.

Museum of comparative Zoölogy at Harvard College: Bulletin. Whole series, Vol. VII (geological series, Vol. I), Nr. 2—8, 11. Cambridge, 1881—82 et 1884; 4°.

— — Memoires. Vol. X, Nr. 3. — Vol. XI, part I. Cambridge. 1884; 4°.

Nature. Vol. XXXI. Nos. 798—800. London, 1885; 8°.

Observatoire de Moscou: Annales. Vol. X, 2e livraison. Moscou 1884; 4°.

Oyster Commission of the State of Maryland: The Development and Protection of the Oyster in Maryland by. W. K. Brooks, Ph. Dr. Baltimore, 1884; 4°.

Société géologique de Belgique: Annales. Tome XI. 1883—84. Berlin, Liége, Paris, 1883—84; 8°.

— mathématique de France: Bulletin. Tome XII, No. 5. Paris, 1884; 8°.

— philomatique de Paris. 7e série, tome 8, Nr. 4. 1883—84. Paris, 1884; 8°.

Society, the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLV Nr. 3. January 1885. London; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. VII. No. 2. London, 1885; 8°.

Society, the royal microscopical: Journal. Vol. V. Part 1. February, 1885. London; 8°.

— the zoological of London: Proceedings of the scientific meetings for the year 1884. Part III. May & June. London, 1884; 8°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. VI. Jahrgang. Nr. 5 und Jahresbericht 1884—85. IX. Vereinsjahr. Wien, 1885; 8°.

Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen, zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde. V. Band, 3. und 4. Heft. Leipzig, 1884; 8°.

Die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer.

II. Theil.

Von dem w. M. J. Hann.

Die Temperatur von Wien und Umgebung, nebst einer Studie über den Nachweis von Localeinflüssen auf die Temperaturmittel.

Die hier mitgetheilten Resultate sind im Verlaufe meiner Arbeit über die Temperatur der österreichischen Alpenländer allmälig gewonnen worden. Ich stelle sie in einer besonderen Abhandlung zusammen und lasse sie der Mittheilung der umfassenden Temperaturtabelle für die österreichischen Alpenländer desshalb vorausgehen, weil ihre Discussion, wie mir scheint, zu einigen Ergebnissen von allgemeinerer Bedeutung geführt hat. In die Besprechung der Temperaturvertheilung in den österreichischen Alpenländern eingestreut, würden sie einerseits den Zusammenhang derselben unterbrochen haben, anderseits auch leichter übersehen worden sein. Die vorliegende Abhandlung schaltet sich naturgemäss zwischen den ersten allgemeinen und den dritten ganz speciellen Theil meiner Arbeit ein, indem sie den grossen Vortheil der Methoden, die in der vorigen Abhandlung erläutert und auf ihre Genauigkeit untersucht worden sind, an mehreren speciellen Fällen in schlagender Weise zur Anschauung bringt. Es wird zunächst durch Reduction der Temperaturmittel zahlreicher, ganz benachbarter Orte auf die gleiche Normalperiode von 30 Jahren (1851/80) ein Beispiel für die Präcision der Methode der correspondirenden Temperaturdifferenzen gegeben und hierauf die Leistungsfähigkeit derselben in Bezug auf die Constatirung von geänderten Localeinflüssen gleichfalls an mehreren speciellen Fällen zur Evidenz nachgewiesen.

Die Temperatur von Wien und Umgebung.

Es dürfte ohne Beispiel auf der Erde dastehen, dass von einer grossen Hauptstadt und deren nächster Umgebung so zahlreiche und zugleich gute Reihen von Temperaturaufzeichnungen vorliegen, wie dies für Wien der Fall ist. Ganz gewiss aber ist, dass, wenn solche für eine andere Stadt vorhanden sein sollten, sie bisher keiner ähnlichen kritischen Bearbeitung unterzogen und zur Veröffentlichung gebracht worden sind, wie dies im Nachfolgenden geschehen wird.

Es gelang mir, für das Weichbild von Wien selbst drei Reihen von Temperaturaufzeichnungen, die an sehr verschiedenen Orten gemacht worden sind, zu sammeln und auf die gleiche Normalperiode 1851/80 zu reduciren, dann für die nächste Umgebung im Norden, Westen und Süden der Stadt die Aufzeichnungen an mindestens vier Orten in gleicher Weise zu bearbeiten, so dass die ersteren uns über die Temperatur im Innern einer grossen Stadt die verlässlichsten Nachweise liefern, während die letzteren uns die Temperatur der Luft im Freien für nahe die ganz gleiche Erdstelle kennen lehren. Eine dritte Reihe von ganz benachbarten Temperaturstationen in etwas weiterem Umkreis zeigt uns dann noch den Einfluss der Bodenerhebung und des Waldes auf die Lufttemperatur an nahe gleicher Stelle. Von einem Landstreifen von circa 25 Kilom. Länge und 10 Kilom. Breite besitzen wir Temperaturaufzeichnungen von 14 Stationen. Es entfallen somit auf je 18 Quadratkilom. eine Station oder drei Stationen auf eine deutsche geographische Meile. So ist Wien und dessen nächste Umgebung eine Art „Versuchsfeld“ für die Bestimmung der Lufttemperatur geworden, nicht in beabsichtigter Weise durch gleichzeitige correspondirende Beobachtungen, sondern im Laufe der Zeit während der letzten 34 Jahre. Mir fiel dabei die Aufgabe zu, die aus sehr verschiedenen Jahrgängen stammenden Temperaturaufzeichnungen zu sammeln, zu reduciren und auf die gleiche Periode zurückzuführen, so dass sie nun unmittelbar mit einander vergleichbar sind.

Ich gehe nun sogleich zur Besprechung der Temperaturstationen und der an denselben gewonnenen Temperaturmittel selbst über.

1. Wien, Stadt. Hier wurden an drei Orten Temperaturbeobachtungen angestellt und zwar:

a) Alte Sternwarte, Gebäude der Akademie der Wissenschaften im Innern der Stadt. Die Temperaturaufzeichnungen an dieser Stelle sind allgemein bekannt, v. Littrow hat sie im Detail veröffentlicht, Jelinek und ich selbst daraus 90-, respective 100jährige Mittel abgeleitet[1] (1775—1874). Das Thermometer war auf der Terasse der Sternwarte aufgestellt in circa 198 Met. Seehöhe, 32 Met. über dem Strassenpflaster, schon über dem Niveau der Dächer der dicht zusammengedrängten Häuser im südlichen Theile der inneren Stadt. Die Temperaturbeobachtungen daselbst hörten mit dem Jahre 1878 auf, in Folge der Übersiedlung der Sternwarte in das neue Gebäude auf der Türkenschanze. Ich habe nur die Beobachtungen der 20 Jahre 1851—70 inclusive verwendet, denn mit dem Jahre 1872 etwa beginnt sich ein Localeinfluss geltend zu machen, der die Sommertemperatur bedeutend erhöht und diese Beobachtungen mit den älteren nicht mehr vergleichbar macht. Der Nachweis dafür wird später geliefert. Die geographischen Coordinaten dieses Beobachtungspunktes sind 48° 12'6 N, 16° 22'8 E v. Gr.

b) K. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, Favoritenstrasse 30. Die Temperaturaufzeichnungen beginnen mit September 1852 und enden mit April 1872 in Folge der Übersiedlung der k. k. Centralanstalt in das neue Gebäude auf der Hohen Warte im Norden der Stadt. Die Thermometer des Psychrometers befanden sich vor einem gegen NNW gerichteten Fenster innerhalb der üblichen Blechbeschirmung in einer Höhe von 18 Met. über dem Erdboden. „Da das Gebäude alle nahestehenden überragt und von zwei Seiten wegen anliegender Gärten völlig freisteht, so ist die Lage desselben für meteorologische Beobachtungen eine sehr günstige" sagt Kreil. In den nächsten Jahren schon

[1] Meteorologische Beobachtungen an der Wiener Sternwarte 1775/1855, herausgegeben von C. v. Littrow. 5 Bände. Wien. 1860. — Jelinek: Die mittlere Temperatur von Wien nach 90jährigen Beobachtungen. Sitzb. der Wiener Akad. LIV. Bd. Novemberheft 1866. — Hann: Über die Temperatur von Wien nach 100jährigen Beobachtungen. — Über den Luftdruck und die Temperatur zu Wien. Ebenda Bd. LXXVI. November- u. Decemberheft 1877.

wurde allerdings seitlich ein Gebäude angebaut und später auch auf der NNW-Seite selbst in einiger Entfernung ein Haus errichtet, was die Situation der Thermometer verschlechterte — im Sommerhalbjahr Nachmittags wurde der frei gebliebene Raum etwas zu warm, daher schon Kreil die stündlichen Temperaturbeobachtungen von 1^h bis 9^h Abends auf die NE-Seite verlegte. Die Differenzen, die sich bei den correspondirenden Beobachtungen auf beiden Seiten um 1^h und 9^h ergaben, wurden auf die zwischenliegenden Stundenbeobachtungen gleichmässig vertheilt. Die Seehöhe der Thermometer war 194 Met., die geographischen Coordinaten des Hauses sind 48° 11'8 N und 16° 21'6 E v. Gr.

c) Mit dem Jahre 1878 begannen im Hause Nr. 17, Skodagasse, VIII. Bezirk (Josefstadt) regelmässige tägliche Ablesungen an einem Maximum-Minimumthermometer von Casella, System Six. Die Aufzeichnungen wurden von einem Gärtner gemacht unter der Aufsicht des Herrn Prof. Dr. Breitenlohner. Die Aufstellung und Position des Instrumentes war eine recht günstige. Der von hohen Häusern umgebene Garten ist 40 Met. breit und 2—3mal so lang. Das Thermometer befand sich auf der Südseite des Gartens im Nordschatten eines Gebäudes, 168 Ctm. über dem Boden in einem rahmenartigen Gehäuse von weiss angestrichenen Brettchen. Die Sonne trifft die Beschirmung nie, doch mögen Wärmereflexe der hohen umgebenden Häuser nicht ganz ausgeschlossen sein, sagt Herr Dr. Breitenlohner.

Die genähert richtige Position dieses Hauses ist: 48° 12'8 N Br., 16° 21'0 E v. Gr. Seehöhe circa 198 Met.

Die alte Sternwarte liegt an der E-Ecke der inneren Stadt Wien; das frühere Haus der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus (Favoritenstrasse 30) liegt am südöstlichen Rande der Stadt in höherem Niveau (Pflaster 10 Met. über dem des Stefansdomes), das Haus Skodagasse 17 endlich liegt in der Richtung W zu N in 2·5 Kilom. Entfernung von der alten Sternwarte, Favoritenstrasse 30 in SSE davon in 3 Kilom. Distanz, die Entfernung zwischen *b)* und *c)* ist 3·1 Kilom.

Es ist nun im hohen Grade überraschend, zu sehen, welche Übereinstimmung die an diesen drei verschiedenen Orten bei ganz verschiedener Aufstellung der Thermometer erhaltenen Temperaturmittel mit einander zeigen, nachdem sie auf die gleiche

Periode 1851/80 reducirt worden sind. Ich muss noch bemerken, dass ich das Maximum-Minimumthermometer Six von Casella, das in Skodagasse 17 allein zur Bestimmung der Temperaturmittel verwendet worden war, einer Vergleichung unterziehen liess. Die dabei gefundenen (am Minimumschenkel bis zu +0°8 betragenden) Correctionen sind natürlich an die Temperaturmittel angebracht worden. Die corrigirten mittleren Maxima und Minima wurden mit den correspondirenden Mitteln der k. k. Centralanstalt (Hohe Warte) verglichen und derart auf die Normalperiode zurückgeführt. Eine Reduction auf ein 24stündiges Mittel ist hiebei nicht nöthig, wenn die Voraussetzung zutrifft, dass die mittlere Differenz aus den correspondirenden mittleren Maximis und Minimis gleich ist der mittleren Temperaturdifferenz aus allen 24 Stunden, was bei einem Mittel von sieben Jahren wohl zutreffen wird. Übrigens müssten die Abweichungen davon, die doch gewiss nicht Winter und Sommer gleich bleiben würden, in dem jährlichen Gange der Temperatur zum Vorschein kommen, was nicht der Fall ist.

Wahre Monat- und Jahresmittel der Temperatur für die Periode 1851/80 in Wien (Stadt).

Ort	Alte Sternwarte Akademiegebäude	K. k. C.-A. Favoritenstr. 30	Hochsch. f. Bodencultur Skodag. 17
Breite	48°12'6	48°11'8 N	48°12'8 N
Länge	16°22'8	16°21'6 E	16°21'0 E
Höhe	198	194	198
Beobachtungsperiode.	1851/70	1852/70	1878/84
December	— 0·7	— 0·6	— 0·6
Jänner	— 1·2	— 1·1	— 1·2
Februar	0·5	0·6	0·4
März	4·2	4·2	4·1
April	10·0	10·0	10·1
Mai	14·6	14·6	14·6
Juni	18·8	18·6	18·7
Juli	20·5	20·3	20·4
August	19·8	19·6	19·6
September	15·9	15·9	15·7
October	10·6	10·6	10·5
November	3·6	3·6	3·7
Jahr	9·71	9·69	9·67

Eine derartige Übereinstimmung selbst der einzelnen Monatmittel kann gewiss nicht dem Zufall zugeschrieben werden. Dieselbe zeigt vielmehr, dass man bei guter, wenngleich sehr verschiedener Aufstellung der Thermometer im Innern einer Stadt die gleichen Temperaturen erhält und dass die Jahresmittel selbst bis auf 0°1 C. genau die Luftwärme daselbst angeben.

Wie aus den früheren Angaben über die Örtlichkeit der drei Temperaturstationen erhellt, sind die Verhältnisse, unter denen die Temperaturaufzeichnungen an denselben gewonnen worden sind, sehr verschieden. Wenn die Resultate derselben trotzdem bis auf ein Zehntelgrad übereinstimmen, so beweist dies, dass die Aufgabe, die wahren Monat- und Jahresmittel der Lufttemperatur eines Ortes zu bestimmen, mit den üblichen Hilfsmitteln vollkommen zufriedenstellend gelöst werden kann, wenn man nur die gewöhnlichen Vorsichtsmassregeln zur Abhaltung der Localeinflüsse im engeren Sinne sorgfältig beachtet. Weitere Nachweise dafür werden gleich im Nachfolgenden beigebracht werden.

2. Nächste Umgebung von Wien. Die Stationen, welche die Temperatur der nächsten Umgebung von Wien und somit die Temperatur der Erdstelle Wien ohne den Einfluss einer grossen Stadt auf die Luftwärme in deren Innerem repräsentiren, sind: Korneuburg (mit Ausnahme des Herbstes, der wohl der Donaunebel wegen abnorm kalt ist [1]), Hohe Warte, Türkenschanze (neue Sternwarte), Perchtoldsdorf, Mödling. Die Mitteltemperaturen dieser Orte in den extremen und mittleren Jahreszeiten sind hier übersichtlich zusammengestellt.

Ort	Breite 48°+	Höhe	Jänn.	April	Juli	Oct	Jahr
Korneuburg.....	20'5	170	—1·7	9·4	19·7	(9·6)	(9·0)[2]
Hohe Warte.....	15·0	202	—1·4	9·6	19·9	10·1	9·3
Türkenschanze	13·9	246	—1·7	9·2	19·5	9·9	9·0
Perchtoldsdorf	7·0	260	—1·4	9·3	20·1	10·1	9·3
Mödling	5·0	240	—1·3	9·6	20·0	10·2	9·4
Mittel	12·3	224	—1·5	9·4	19·8	10·0	9·2

[1] Die Temperaturdifferenzen gegen Wien zeigen in drei Jahren constant ein Maximum im September und October, namentlich im letzteren Monat.

[2] Mit halbem Gewicht ins Mittel aufgenommen.

Vergleichen wir diese Mittel mit der mittleren Temperatur im Innern der Stadt Wien, so erhalten wir den Localeinfluss der Stadt auf die Lufttemperatur.

	Breite	Höhe	Jänn.	April	Juli	Oct.	Jahr
Wien, Stadt	48°12'	190	—1·2	10·0	20·4	10·5	9·7
„ Umgebung..	48 12·3	190	—1·3	9·6	20·0	10·2	9·4
Temperaturunterschied.....			0°1	0°4	0°4	0°3	0°3

Auf diese Art würde sich der Einfluss der grossen Stadt auf die Luftwärme als ein unerwartet geringfügiger herausstellen. Es spricht dies sehr zu Gunsten der drei Beobachtungsreihen daselbst und erklärt deren ausserordentliche Übereinstimmung. Wenn man Klosterneuburg, sowie die schon entfernteren südlichen Stationen Perchtoldsdorf und Mödling von dem Vergleiche ausschliessen wollte, erhielte man kein merklich anderes Resultat, wie folgende Zusammenstellung zeigt. Die Temperaturmittel sind sämmtlich auf die gleiche Seehöhe von 190 Met. reducirt worden (unter der Annahme einer Wärmeänderung von 0°5 für je 100 Met. wie oben).

Ort	Breite 48°+	Länge 16°+	Jänn.	April	Juli	Oct.	Jahr
Hohe Warte.....	15'0	21·6	—1·34	9·7	20·0	10·2	9·4
Sternwarte.....	13·9	20·4	—1·45	9·5	19·8	10·2	9·3
Stadt Wien.....	12·0	21	—1·2	10·0	20·4	10·5	9·7
Temp. Diff. Stadt—Land.....			0·2	0·4	0·5	0·3	0·35

Das Resultat ist im Wesentlichen genau dasselbe wie oben. Die Stadt erhöht demnach das Jahresmittel der Luftwärme um 0°3, die des Juli um 0°4, die des Jänner um 0°1 bis 0°2 C.

Diese Resultate sind wesentlich verschieden von jenen, welche ich bei den ersten Vergleichungen der Temperatur auf der Hohen Warte mit jenen der alten Sternwarte erhalten habe.[1] Der Grund liegt darin, dass ich damals nicht wusste, dass sich die Temperatur des Sommerhalbjahres an der alten Sternwarte seit 1872 fortwährend erheblich gesteigert hat. Da die Instrumente, wie angegeben wird, während der ganzen Zeit auf der gleichen Stelle sich befanden und alle Umstände dieselben geblieben sein sollen, konnte damals nicht der geringste Verdacht

[1] Über die Temperatur von Wien nach 100jährigen Beobachtungen. Sitzb. der Wiener Akademie, Novemberheft 1877.

einer Änderung des Localeinflusses auftauchen. Erst durch die hier folgenden vielfachen Vergleichungen mit anderen Stationen wurde diese Änderung an den Tag gebracht.

Die gute Übereinstimmung der Temperaturmittel für die neue Sternwarte auf der Türkenschanze mit jenen auf der Hohen Warte an der meteorologischen Centralanstalt (sowie jenen von Perchtoldsdorf, Mödling und Baden etc., siehe die später folgende allgemeine Tabelle) ist ein neuer, gleichfalls schlagender Beweis dafür, dass man mittelst einer gewöhnlichen guten Aufstellung der Thermometer Monat- und Jahresmittel der Luftwärme erhält, die bis auf 1—2 Zehntelgrade genau sind. Die Lage der beiden erstgenannten Stationen, sowie die Aufstellung der Thermometer an denselben ist eine sehr verschiedene.

Die Thermometer der k. k. Centralanstalt befinden sich in einem ziemlich geräumigen Jalousiehäuschen, das im Nordschatten des Institutsgebäudes auf der Hohen Warte frei im Garten aufgestellt ist. Sie befinden sich darin ohne Blechbeschirmung in 2 Met. Höhe über dem Erdboden. Die nächste Umgebung ist ebenes Gartenland, in circa 15 Met. Entfernung steht im Norden ein Landhaus.

Auf der neuen Sternwarte dagegen sind die Thermometer in einer Blechbeschirmung in 11 Met. Höhe über dem Erdboden vor einem Fenster auf der Nordseite der Ostkuppel aufgestellt. Der Boden unterhalb ist mit Büschen und Bäumen dicht bewachsen. Die neue Sternwarte steht inmitten eines grossen Gartens auf einer dominirenden Anhöhe, die nach allen Seiten hin abfällt (am wenigsten nach Westen). Sie liegt um 30 Met. höher als das Gebäude der meteorologischen Centralanstalt. Die Lage ist eine ungleich freiere und luftigere. Die gegenseitigen Entfernungen sind: Neue Sternwarte 4·2 Kilom. NW von der alten Sternwarte, 2·5 Kilom. SW von der meteorologischen Centralanstalt. Diese letztere liegt 4·9 Kilom. nördlich von der alten Sternwarte.

Die Thermometer der neuen Sternwarte sind mit jenen der k. k. Centralanstalt verglichen und die Differenzen als Correctionen in Rechnung gestellt worden.

Reducirt man die Mitteltemperaturen der neuen Sternwarte auf das Niveau der k. k. Centralanstalt, so stimmen dieselben sehr nahe mit den an letzterer erhaltenen Temperaturen überein. Dass

die neue Sternwarte ein wenig kühler ist, als es dem Höhenunterschied allein entspricht, kann durch die freiere, dem Luftzug weit mehr exponirte Lage völlig erklärt werden. Man könnte sie im Vergleich zur Station der k. k. Centralanstalt eine Gipfelstation nennen.

3. Die Niederung im Süden und Osten von Wien. Auch hier stimmen die Mitteltemperaturen, wenn man auf Seehöhe und Zunahme der Winterkälte und Sommerwärme nach Osten hin Rücksicht nimmt, sehr gut überein, wie die folgenden Mittelwerthe zeigen, welche sämmtlich auf die Periode 1851/80 reducirt worden sind.

	Höhe	Breite 47°+	Jänn.	April	Juli	Oct.	Jahr
Perchtoldsdorf.....	260	67'	—1·4	9·3	20·1	10·1	9·3
Mödling.....	240	65	—1·3	9·6	20·0	10·2	9·4
Baden.....	240	60	—1·5	9·7	20·2	10·0	9·4
Wr. Neustadt.....	270	49	—2·2	9·2	20·1	10·2	9·1
Ödenburg	225	41	—1·3	10·1	20·5	10·6	9·7
Ung. Altenburg.....	125	53	—1·9	9·8	20·2	10·0	9·3
Pressburg (Stadt) ...	154	69	—1·4	10·4	21·2	11·1	10·0

Die Beobachtungen zu Perchtoldsdorf umfassen nur 37 Monate zwischen 1862/65 und sind nach der älteren Instruction angestellt. Zu Mödling wird seit 1875 beobachtet, die Thermometer befinden sich in einem Jalousiehäuschen 1·4 Met. über dem Boden. Die Übereinstimmung der Mitteltemperaturen der ersten vier Stationen ist gewiss überraschend. Sie zeigt, im Zusammenhalt mit den vorausgegangenen Resultaten erstlich die gleichmässige Vertheilung der Temperatur unter ähnlichen örtlichen Verhältnissen auf ziemlich weite Entfernungen hin, zweitens die genügende Zuverlässigkeit unserer jetzigen Methoden zur Bestimmung der Lufttemperatur.

Pressburg zeigt einen sehr erheblichen Localeinfluss der Stadt, der viel grösser sein muss als jener, den wir für Wien gefunden, auch zu Ödenburg scheint die Stadt einen, wenn auch geringeren Einfluss im Sinne einer Temperaturerhöhung genommen zu haben. Ung. Altenburg dürfte die wahre Temperatur der Donauniederung angeben.

Reducirt man Ödenburg und Pressburg auf die Seehöhe von Ung. Altenburg, nimmt dann die Mittel und vergleicht sie mit letzterer Station, so erhält man folgende Unterschiede:

	Breite	Jänn.	April	Juli	Oct.	Jahr
Ödenburg-Pressburg....	48°55'	—1·0	10·6	21·2	11·2	10·2
Ung. Altenburg..... ..	48 53	—1·9	9·8	20·2	10·0	9·3
Unterschied		0·9	0·8	1·0	1·2	0·9

Es lässt sich nicht entscheiden, wie viel von dieser beträchtlichen Temperaturdifferenz als specieller Localeinfluss der Stadt in Ödenburg und Pressburg angesprochen werden darf und welcher Rest einem reellen Unterschied der Luftwärme in der Gegend von Ödenburg und Pressburg gegenüber jener von Ung. Altenburg entspricht. Ödenburg wie Pressburg mögen durch ihre Lage, angelehnt an südöstliche Berghänge, eine etwas höhere Lufttemperatur haben als Ung. Altenburg — mindestens die Hälfte des oben aufgezeigten Wärmeunterschiedes kommt jedoch sicherlich auf Rechnung des Einflusses erwärmter Stadtmauern — dafür spricht auch, dass der nachgewiesene Temperaturunterschied sein Minimum im Frühling und sein Maximum im Herbst erreicht.

4. Der Wiener Wald. Die Temperatur im Wiener Walde zeigen folgende Stationen, nach ihrer Seehöhe geordnet. Die Temperatur von Mariabrunn, ganz nahe bei Hadersdorf, ist noch recht unsicher, kann aber hier stehen, weil die Übereinstimmung mit Hadersdorf zeigt, dass die Mittel nahe richtig sein mögen.

	Höhe	Breite 48°+	Jänn.	April	Juli	Oct.	Jahr
Mariabrunn	220	12'5	—1·8	8·6	18·5	8·6	8·3
Hadersdorf.....	230	13·0	—2·0	8·5	18·4	9·2	8·3
Kalksburg	260	8·0	—1·6	8·7	19·0	9·4	8·6
Kaltenleutgeben	340	7·0	—1·7	8·4	19·0	9·2	8·5
Weissenhof	330	19·5	—2·3	8·7	18·9	9·3	8·4
Kahlenberg	450	16·6	—2·9	8·2	18·6	9·1	8·0

In den Temperaturen von Mariabrunn und Hadersdorf sehen wir den Einfluss des Waldes auf die Erniedrigung der Sommertemperatur am stärksten hervortreten. Hadersdorf ist der beste Vertreter der Temperatur in jenen Thälern des Wiener Waldes, wo der Wald in die Thalsohle selbst herabreicht; Kaltenleutgeben kommt der Lage nach am nächsten, scheint aber im Sommer etwas zu warm zu sein; die anderen Stationen liegen schon ausserhalb der unmittelbaren Einwirkung des Waldes; Kahlen-

berg (Josefsdorf a. K.) ist sicherlich im Sommerhalbjahr etwas zu warm.

Die Temperaturdifferenzen Hadersdorf—Hohe Warte für die drei correspondirenden Beobachtungstermine 7^h, 2^h, 9^h sind folgende:

Hadersdorf—Hohe Warte 1875/84.

	7^h	2^h	9^h		7^h	2^h	9^h
October..	—0·8	—0·1	—1·3	April....	—0·9	—0·4	—1·5
November	—0·7	—0·1	—0·9	Mai.....	—1·2	—0·2	—2·0
December	—1·0	0·0	—0·6	Juni.....	—1·2	—0·1	—2·2
Jänner...	—0·6	0·1	—0·7	Juli	—1·0	—0·3	—2·5
Februar..	—0·8	—0·1	—1·1	August ..	—1·1	—0·3	—2·3
März	—1·1	—0·3	—1·5	September	—1·1	—0·4	—1·9

Da der Höhenunterschied beider Stationen blos 28 Met. beträgt, was einer Temperaturdifferenz von höchstens 0°17 C. entspricht und die Thermometer der k. k. Centralanstalt für Meteorologie in einem baumreichen Garten aufgestellt sind, so dürften die angeführten Temperaturdifferenzen den Einfluss eines Waldthales auf die Luftwärme (gegenüber der Temperatur über einem freien ebenen Felde unter sonst gleichen Verhältnissen) ziemlich richtig zur Darstellung bringen.

Am geringsten ist der Temperaturunterschied in den wärmeren Stunden des Tages, am grössten in den kälteren. Abends und am frühen Morgen ist der Einfluss des Waldes auf die Erniedrigung der Lufttemperatur am grössten. Es stimmt dies völlig mit den unmittelbaren Eindrücken, die wir von einem Aufenthalt in einem Waldthale empfangen. Um die Mittags- und Nachmittagsstunden spüren wir am wenigsten von einer Abkühlung der Luft durch die umgebenden Wälder, am Abend und am frühen Morgen macht sie sich dagegen sehr empfindlich fühlbar. Die Thaubildung ist bekanntlich in den Thälern des Wiener Waldes während des Sommers eine sehr reichliche und die nasse Kühle wird Abends nach Sonnenuntergang sehr unangenehm empfunden; Morgens desshalb weniger, weil man erst aufsteht und ins Freie geht, wenn die Sonne schon stundenlang wieder ihre Wirkung ausgeübt hat. Die Temperaturdifferenzen um 7^h Morgens sind desshalb auch im Sommer viel kleiner als jene um 9^h Abends, jener Termin steht blos 5 Stunden von Mittag ab, dieser 9 Stunden.

Wahre Temperaturmittel für Wien und Umgebung, bezogen auf die Periode 1851/80.

Ort	Wien, Stadt	Kornenburg	Hohe Warte	Neue Sternwarte	Perchtoldsdorf	Mödling	Baden	Wiener Neustadt	Ödenburg	Ung. Altenburg
Seehöhe	190	170	202	246	260	240	240	270	225	125
Breite	48°12'	48°20'5	48°15'0	48°13'9	48° 7'	48° 5'	48° 0'	47°49'	47°41'	47°53'
Länge	16 21	16 20	16 21·6	16 20·4	16 16	16 18	16 15	16 15	16 35	17 16
Jahre	20	2⅔	13	4¾	3	10	2	7	17	5
December	—0·6	—1·2	—0·7	—1·1	—0·5	—0·6	—1·0	—1·4	—0·7	—1·3
Jänner	—1·2	—1·7	—1·4	—1·7	—1·4	—1·3	—1·5	—2·2	—1·3	—1·9
Februar	0·5	—0·1	0·2	—0·1	0·2	0·3	0·1	—0·6	0·2	—0·2
März	4·2	3·7	3·8	3·5	3·8	3·9	3·9	3·2	4·0	3·9
April	10·0	9·4	9·6	9·2	9·3	9·6	9·7	9·2	10·1	9·8
Mai	14·6	14·0	14·1	13·6	13·9	14·1	14·2	13·9	14·6	14·4
Juni	18·7	18·2	18·2	17·7	18·3	18·3	18·3	18·2	18·8	18·5
Juli	20·4	19·7	19·9	19·5	20·1	20·0	20·2	20·1	20·5	20·2
August	19·6	18·8	19·2	18·8	19·3	19·4	19·5	19·4	19·8	19·4
September	15·8	14·8	15·3	15·1	15·5	15·4	15·6	15·6	15·9	15·5
October	10·5	9·6	10·1	9·9	10·1	10·2	10·0	10·2	10·6	10·0
November	3·6	2·9	3·5	3·2	3·4	3·5	3·0	3·0	3·6	2·8
Jahr	9·7	9·0	9·3	9·0	9·3	9·4	9·4	9·05	9·7	9·3

Ort	Korneuburg	Weissenhof	Kahlenberg	Hohe Warte	Mariabrunn	Hadersdorf	Kalksburg	Kaltenleutgeben	Neunkirchen	Reichenau am Schneeberge
Seehöhe	170	330	450	202	220	230	260	340	360	495
Breite	48°20'	48°19'5	48°16'6	48°15'	48°12'5	48°13'0	48° 8'	48° 7'	47°43'	47°42'
Länge	16 20	16 17·0	16 20·4	16 21·6	16 14	16 13	16 14	16 12	16 4	15 50
Jahre	2⅔	4½	2⅔	13	1	9	24⅔	2	2	15½
December	—1·2	—1·7	—2·3	—0·7	—1·4	—1·3	—1·1	—1·4	—1·7	—1·1
Jänner	—1·7	—2·3	—2·9	—1·4	—1·8	—2·0	—1·6	—1·7	—2·1	—1·6
Februar	—0·1	—0·4	—1·4	0·2	—0·2	—0·6	—0·3	—0·2	—0·4	—0·1
März	3·7	3·0	2·0	3·8	3·2	2·8	3·1	3·0	3·6	3·2
April	9·4	8·7	8·2	9·6	8·6	8·5	8·7	8·4	9·4	8·6
Mai	14·0	13·1	13·0	14·1	12·7	12·8	13·2	13·0	13·8	12·4
Juni	18·2	17·1	17·0	18·2	16·7	16·8	17·4	17·3	17·7	16·3
Juli	19·7	18·9	18·6	19·9	18·5	18·4	19·0	19·0	19·2	18·1
August	18·8	18·4	18·0	19·2	17·9	17·7	18·1	18·2	18·4	17·7
September	14·8	14·5	14·3	15·3	13·8	14·0	14·2	14·4	14·7	14·2
October	9·6	9·3	9·1	10·1	8·6	9·2	9·4	9·2	9·7	9·3
November	2·9	2·6	2·0	3·5	2·3	2·8	2·8	2·4	2·9	2·8
Jahr	9·0	8·4	8·0	9·3	8·3	8·3	8·6	8·5	8·8	8·3

Die Temperaturdifferenzen Wien, alte Sternwarte, gegen Hohe Warte zeigten eine ganz analoge Erscheinung; sie waren Morgens und Abends am grössten, Nachmittags 2^h am kleinsten[1] (obgleich die Temperaturen der Sternwarte gerade um diese Zeit damals schon zu hoch waren).

Fassen wir die Temperaturdifferenzen zwischen Wien, Hohe Warte, Hadersdorf und Mariabrunn noch einmal nach Mitteln für die Jahreszeiten und das Jahr zusammen, so erhalten wir:

Die Temperatur ist niedriger als auf der Hohen Warte

	zu Hadersdorf			zu Mariabrunn
	7^h a. m.	2^h p. m.	9^h p. m.	9^h p. m.
Winter.....	0°8	0°0	0°8	0°6
Frühling	1·1	0·3	1·7	1·6
Sommer.....	1·1	0·2	2·3	2·3
Herbst.....	0·9	0·3	1·4	2·3
Mittel.....	1·0	0·2	1·6	1·7

Für Mariabrunn liegen blos von einem Jahre (mit abnormen Herbst) Beobachtungen vor. Die Beobachtungen um 7^h und 2^h an dieser Station sind wegen Einflüssen von Strahlung auf das Thermometer ganz oder theilweise unbrauchbar.

Man darf diese Differenzen nicht mit jenen verwechseln, welche Temperaturbeobachtungen mitten im Walde selbst ergeben würden. Sie zeigen uns nur den Einfluss grosser Waldmassen auf die Luftwärme der nächsten Umgebung.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möchte ich noch den Satz wiederholen, der, wie mir scheint, aus den Temperaturbeobachtungen zu Wien und Umgebung gefolgert werden kann und von allgemeinerer Bedeutung ist:

Sowohl die in Österreich zumeist übliche Aufstellung der Thermometer in einem Blechgehäuse vor einem Nordfenster, als auch die Anbringung der Thermometer in einer geräumigen Jalousiehütte gestattet, wenn die gewöhnlichen Vorsichtsmassregeln gegen den Einfluss strahlender Wärme beobachtet

[1] Hann: Die Temperatur von Wien nach 100jährigen Beobachtungen, p. 25 (Sitzb. der Wien. Akad. Nov. 1877).

werden, die mittlere Lufttemperatur der Monate und des Jahres bis auf 1—2 Zehntelgrade genau zu bestimmen. Die Höhe der Thermometer über dem Erdboden nimmt, sobald dieselbe einmal mindestens mehr als $1^1/_2$ Met. beträgt, auf die Mitteltemperaturen nur geringen Einfluss. Ist die Höhe der Thermometer über dem Erdboden beträchtlich (10 Met. und darüber), so ist bei Angabe der Seehöhe der Station, soweit die Lufttemperatur in Betracht kommt, die Seehöhe des Thermometers anzusetzen.

Die schon jetzt erreichte Genauigkeit in der Bestimmung der mittleren Luftwärme macht es nöthig, die Thermometer namentlich in dem Intervall zwischen 0° und 25° genau zu vergleichen und die Correctionen, welche 0·1 Zehntelgrad erreichen, an die Mitteltemperaturen auch anzubringen.[1] Die Vergleichung soll mindestens in Zwischenräumen von einigen Jahren wiederholt werden.

Nachweise über die Ableitung der vorhin angeführten Temperaturmittel.

Um die Temperaturmittel der alten Sternwarte, der früheren Station der k. k. Centralanstalt in der Favoritenstrasse Nr. 30, sowie jener der neuen Station auf der Hohen Warte Nr. 38 bei Wien auf das 30jährige Mittel der Normalperiode 1851/80 zu reduciren, musste ich mir benachbarte Stationen suchen, von denen für die ganze Periode 1851/80 eine ununterbrochene Reihe von Temperaturaufzeichnungen vorliegt, und von welchen ich mit Grund annehmen konnte, dass die Localeinflüsse an denselben während dieses ganzen Zeitraumes constant geblieben sind. Für diese letztere Bedingung, welche als unerlässlich bezeichnet werden muss, gibt es meist nur indirecte Beweise, die ich mir dadurch verschaffte, dass ich diese Normalstationen für die ganze Periode vielfach mit benachbarten Stationen durch Bildung von

[1] Es dürfte überflüssig weil selbstverständlich erscheinen, dies hier besonders auszusprechen. Ich glaube mich aber nicht zu täuschen, wenn ich annehme, dass man in der Praxis bisher im Allgemeinen nicht so rigoros vorgegangen, weil man unter dem Eindrucke stand, dass die Fehlergrenze bei Bestimmung der Luftwärme an gewöhnlichen Stationen II. und III. Ordnung ohnehin weit oberhalb von 0°1 sich hält.

Temperaturdifferenzen verglich, was sich im Verlaufe meiner Arbeit ohnehin von selbst ergab. Als die geeignetsten und nächstgelegenen derartigen Stationen stellten sich heraus: Kremsmünster, Graz, Pressburg und, in minderem Grade, noch Brünn. Zu Brünn fand 1878 ein Beobachter- und Localwechsel statt, seither ist die Station etwas wärmer geworden, wie sich aus den folgenden Temperaturdifferenzen deutlich ergibt. Den mittelst dieser Station abgeleiteten Werthen ist desshalb ein geringeres Gewicht gegeben worden, jenen, die aus den Beobachtungen zu Pressburg sich ergeben, das grösste, wegen der grossen Nähe dieser Station an Wien.

Auf solche Weise sind die im Nachfolgenden zusammengestellten Resultate erhalten worden, die man gewiss in hohem Grade befriedigend finden wird. Die normalen Temperaturmittel der Vergleichsstationen selbst, die hier nicht in Betracht kommen, werden sich in den umfassenden Tabellen des letzten Theiles meiner Arbeit finden. Alle Mittel sind, schliesslich wenigstens, auf wahre 24stündige Mittel reducirt worden. Jene der k. k. Centralanstalt beruhen seit 1852 ohnehin auf 24stündigen oder eigentlich continuirlichen Aufzeichnungen. Die Aufzeichnungen an der neuen Sternwarte werden, wie die Terminbeobachtungen an der k. k. Centralanstalt selbst, um 7^h, 2^h, 9^h angestellt. Daraus sind die Mittel 7^h, 2^h, 9^h, 9^h abgeleitet und an diese die nurmehr kleinen Correctionen auf ein wahres 24stündiges Mittel angebracht worden. Die Thermometercorrectionen sind gleichfalls schon berücksichtigt.

Für die übrigen Stationen in der Umgebung Wiens folgen in Tabelle VI die Temperaturdifferenzen gegen die k. k. Centralanstalt zugleich mit dem Nachweis über die Beobachtungsperiode und die Ableitung wahrer Mittel. Der Buchstabe *J* in der Rubrik „Reduction" gibt an, dass die Temperaturmittel schon von Jelinek nach den stündlichen Wiener Beobachtungen auf ein wahres Mittel reducirt worden sind. Wo dies nicht der Fall ist, bei den Beobachtungen aus einer neueren Periode, beziehen sich die Temperaturdifferenzen auf das darüber angegebene, meist aus 7^h, 2^h, 9^h, 9^h gebildete Mittel, die Correctionen auf ein wahres Mittel sind erst an die auf 1851/80 reducirten Temperaturmittel selbst angebracht worden. Für die Vergleichsstation Wien dagegen sind

Reduction der wahren Mitteltemperaturen auf die Normalperiode 1851/80.

I. Wien, alte Sternwarte

Gewicht	Mittel 1851/70	Differenzen gegen Brünn	Pressburg	Graz	Kremsmünster	Auf 30 Jahre 1851/80 reducirte Mittel nach Brünn	Pressburg	Graz	Kremsmünster	Mittel
	—	1	2	1½	1½	1	2	1½	1½	(6)
Jänner	—1·06	1·07	0·20	0·85	1·52	—1·11	—1·19	—1·28	—1·13	—1·18
Februar	0·55	1·14	0·06	0·49	1·65	0·52	0·23	0·58	0·55	0·47
März	3·98	1·01	—0·12	0·19	1·90	4·26	4·08	4·18	4·29	4·18
April	9·79	0·85	—0·35	0·17	1·79	10·08	10·04	10·04	9·93	10·02
Mai	15·18	0·76	—0·50	0·30	1·92	14·70	14·64	14·56	14·44	14·58
Juni	18·83	0·76	—0·64	0·46	2·22	18·96	18·79	18·70	18·72	18·78
Juli	20·53	0·82	—0·69	0·59	2·29	20·62	20·49	20·42	20·50	20·50
August	19·69	0·81	—0·63	0·65	2·13	19·88	19·77	19·71	19·73	19·76
September	16·00	0·80	—0·55	0·59	2·24	15·89	15·85	15·86	16·04	15·88
October	10·72	0·74	—0·50	0·42	2·08	10·59	10·56	10·64	10·59	10·59
November	3·54	0·77	—0·30	0·41	1·76	3·82	3·62	3·64	3·54	3·64
December	—0·48	0·86	0·04	0·74	1·40	—0·65	—0·77	—0·66	—0·67	—0·70
Jahr	9·77	0·87	—0·33	0·49	1·91	9·78	9·69	9·69	9·71	9·71

II. Wien, k. k. Centralanstalt, Stadt (Favoritenstrasse 30)										
	Mittel	Differenzen gegen				Auf 30 Jahre 1851/80 reducirte Mittel nach				Mittel
	1851/70	Brünn	Pressburg	Graz	Krems-münster	Brünn	Pressburg	Graz	Krems-münster	
Gewicht	—	1	2	1½	1½	1	2	1½	1½	(6)
Jänner	—1·05	1·09	0·23	1·17	1·63	—1·09	—1·16	—0·96	—1·02	—1·06
Februar	0·56	1·30	0·19	0·52	1·67	0·68	0·48	0·61	0·57	0·57
März	4·10	1·02	0·01	0·20	1·94	4·23	4·21	4·19	4·33	4·24
April	9·81	0·86	—0·41	0·13	1·82	10·09	9·98	10·00	9·96	10·00
Mai	15·10	0·67	—0·50	0·28	1·94	14·61	14·64	14·54	14·46	14·57
Juni	18·73	0·55	—0·84	0·34	2·13	18·75	18·59	18·58	18·63	18·62
Juli	20·29	0·69	—0·91	0·41	2·06	20·49	20·27	20·24	20·27	20·30
August	19·60	0·60	—0·78	0·55	2·05	19·67	19·62	19·61	19·65	19·63
September	15·95	0·86	—0·51	0·61	2·01	15·95	15·91	15·88	15·81	15·88
October	10·74	0·75	—0·57	0·42	2·10	10·60	10·49	10·64	10·61	10·57
November	3·62	0·67	—0·30	0·32	1·85	3·72	3·62	3·55	3·63	3·62
December	—0·43	0·91	0·21	0·82	1·45	—0·60	—0·60	—0·58	—0·62	—0·60
Jahr	9·75	0·83	—0·35	0·48	1·89	9·76	9·67	9·69	9·69	9·695

	III. Wien, Stadt (Skodagasse 17)						V. Neue Sternwarte (Türkenschanze) April 1880 — Dec. 1884	
	Beob. 1878/84 incl. mit Max.-Min. Therm. Six Casella (corrigirt)							
	Temp. Differenz Skodagasse—Hohe Warte				Hohe Warte Normal	Skoda-gasse Normal	Neue Sternwarte—Hohe Warte	Neue Sternwarte Normal
	Mittlere Maxima	Mittlere Minima	Mittel derselben roh	Mittel derselben ausgeglichen				
Jänner	—0·1	0·6	0·25	0·18	—1·40	—1·22	—0·35	—1·75
Februar	0·0	0·5	0·26	0·25	0·17	0·44	—0·31	—0·14
März	—0·1	0·5	0·23	0·32	3·81	4·13	—0·29	3·52
April	0·3	0·8	0·54	0·45	9·64	10·09	—0·47	9·17
Mai	0·0	1·0	0·51	0·51	14·11	14·62	—0·53	13·58
Juni	—0·1	1·1	0·49	0·51	18·23	18·74	—0·49	17·74
Juli	—0·1	1·2	0·54	0·48	19·91	20·39	—0·46	19·45
August	—0·2	1·0	0·37	0·43	19·20	19·63	—0·38	18·82
September	—0·3	1·2	0·44	0·38	15·30	15·68	—0·24	15·07
October	—0·4	1·0	0·28	0·34	10·14	10·48	—0·25	9·89
November	—0·2	0·9	0·34	0·23	3·47	3·70	—0·27	3·20
December	—0·5	0·4	—0·04	0·13	—0·74	—0·61	—0·36	—1·10
Jahr	—0·14	0·85	0·35	0·35	9·32	9·67	—0·37 [1]	8·96

[1] Die einzelnen Jahresmittel der Differenzen waren

1880	1881	1882	1883	1884
—0°3	—0°4	—0°4	—0°4	—0°3 also sehr constant.

IV. Wien, k. k. Centralanstalt, Hohe Warte (Mai 1872 — Dec. 1884)

	Hohe Warte	Differenzen gegen				Auf 30 Jahre (1851/80) reducirt nach				Mittel
		Brünn	Pressburg	Graz	Krems-münster	Brünn	Pressburg	Graz	Krems-münster	
	1872/84	1872/83	1872/83	1873/83	1873/84	1	2	$1^1/_2$	$1^1/_2$	(6)
Jänner	—1·10	0·65	0·17	0·76	1·08	—1·51	—1·27	—1·47	—1·45	—1·40
Februar	0·49	0·52	—0·06	0·15	1·14	—0·02	0·25	0·31	0·03	0·17
März	4·16	0·72	—0·23	—0.14	1·17	3·76	3·86	3·93	3·64	3·81
April	9·23	0·25	—0·88	—0·10	1·53	9·49	9·69	9·71	9·61	9·64
Mai	13·39	—0·18	—0·91	—0·32	1·65	13·86	14·18	14·10	14·18	14·11
Juni	17·71	—0·20	—1·17	0·09	1·81	18·03	18·28	18·25	18·29	18·23
Juli	19·84	—0·10	—1·35	0·19	1·88	19·73	19·89	19·95	20·03	19·91
August	18·88	0·11	—1·16	0·16	1·68	19·10	19·22	19·18	19·28	19·20
September	14·95	0·00	—1·07	—0·01	1·46	15·17	15·40	15·21	15·34	15·30
October	9·72	0·19	—0·71	—0·41	1·55	10·03	10·33	10·12	9·98	10·14
November	3·47	0·32	—0·43	0·45	1·34	3·47	3·56	3·61	3·21	3·47
December	0·19	0·86	—0·10	1.04	1·48	—0·84	—0·82	—0·58	—0·73	—0·74
Jahr	9·24	0·26	—0·64	0·15	1·48	9·19	9·38	9·36	9·28	9·32

Ableitung der Normalmittel für die Umgebung von Wien.

Ort	Korneuburg	Perchtoldsdorf	Mödling	Baden	Wiener Neustadt	Neunkirchen	Neunkirchen	Reichenau am Schneebg.
Periode	1854/57	1862/65	1875/84	1861/63 1871/72	1869/75	1884/85	1864/68	1857/83
Jahre	$2^2/_3$	3	10	$2^1/_3$	7	1	1	$15^1/_2$
Mittel	$7^h2^h10^h$	$7^h2^h9^h$	$7^h2^h9^h9^h$	divers.	$8^h2^h10^h$	$7^h2^h9^h9^h$	8^h *a.* 10^h *p.*	$7^h2^h9^h(10^h)$
Red.	J.	J.	Hohe Warte	Wien	Wien	Wien	corr.	Wien
Vergleichsstat.	Wien F.	Wien F.	Hohe Warte	Wien F.	Wien F.	Mödling	Wien F.	Wien F.
Jänner	−0·7	−0·4	0·2	−0·2	−1·1	−0·6	−1·6	−0·3
Februar	−0·6	−0·1	0·1	−0·4	−1·0	−0·7	−0·7	−0·7
März	−0·4	−0·4	0·1	−0·6	−1·1	−0·4	−0·4	−0·9
April	−0·8	−0·8	0·0	0·1	−0·6	−0·4	0·5	−1·6
Mai	−0·5	−0·6	0·0	−0·3	−0·7	−0·8	−0·5	−2·0
Juni	−0·3	−0·2	0·2	−0·4	−0·4	−0·5	−0·6	−2·4
Juli	−0·4	0·0	0·3	−0·2	−0·1	−1·3	−0·8	−2·4
August	−1·1	−0·3	0·3	0·2	−0·2	−1·7	−0·3	−2·0
September	−1·0	−0·4	0·2	−0·2	−0·3	−1·4	−0·1	−1·7
October	−1·3	−0·6	−0·1	−0·6	−0·5	−0·4	0·2	−1·3
November	−0·4	0·0	0·1	−0·6	−0·4	−0·7	−0·9	−0·9
December	−0·7	−0·1	0·2	−0·7	−1·1	−1·0	−1·6	−0·3
Jahr	−0·7	−0·4	0·2	−0·3[1]	−0·6	−0·8	−0·6[2]	−1·4

[1] Unsicher, weil die zwei einjährigen Reihen nicht gut übereinstimmen.

[2] Nur die Beobachtungen des Jahres 1864 wurden verwendet, Temperaturen später viel zu hoch in Folge Strahlung besonnter benachbarter Mauern.

Ort	Weissenhof	Kahlenberg	Mariabrunn	Hadersdorf	Kalksburg	Kaltenleutgeben	Ödenburg	Ungarisch-Altenburg
Periode	1880/84	1854/57	1878/79	1875/84	1855/83	1855/58	1868/82	1866/70
Jahre	$4^1/_2$	$2^2/_3$	1	$9^1/_2$	$24^2/_3$	2	17	5
Mittel	$7^h 2^h 9^h 9^h$	$6^h 2^h 9^h$	$2^h 9^h 9^h$	$7^h 2^h 9^h 9^h$	divers.	$7^h 0^h 9^h$	$7^h 2^h 9^h$	$7^h 2^h 9^h 9^h$
Red.	Hohe Warte	J.	—	—	J.	J.	Schenzl	J.
Vergleichsstat.	Hohe Warte	Wien F.	Hohe Warte	Hohe Warte	Wien F.	Wien F.	Wien F.	Wien F.
Jänner	−0·8	−1·8	−0·4	−0·5	−0·5	−0·5	−0·2	−0·7
Februar	−0·6	−1·7	−0·4	−0·8	−0·8	−0·7	−0·3	−0·8
März	−0·7	−2·6	−0·6	−1·1	−1·1	−1·2	−0·2	0·0
April	−0·9	−1·7	−1·0	−1·1	−1·3	−1·9	0·1	0·0
Mai	−0·9	−1·3	−1·4	−1·4	−1·3	−1·4	0·2	0·1
Juni	−1·1	−1·7	−1·5	−1·4	−1·2	−1·3	0·2	0·2
Juli	−0·8	−1·6	−1·4	−1·6	−1·3	−1·3	0·3	0·2
August	−0·7	−1·7	−1·3	−1·5	−1·5	−1·3	0·2	−0·4
September	−0·6	−1·6	−1·5	−1·4	−1·7	−1·6	0·0	−0·1
October	−0·9	−1·4	−1·5	−0·9	−1·2	−1·4	0·0	−0·6
November	−0·7	−1·6	−1·2	−0·6	−0·8	−1·2	0·1	−0·7
December	−0·9	−1·8	−0·7	−0·6	−0·6	−0·9	−0·2	−0·7
Jahr	−0·8	−1·7	−1·0[1]	−1·1	−1·2	−1·2	0·0	−0·3

[1] Die 7^h Beobachtungen unbrauchbar, die obigen Differenzen sind schon ausgeglichen, hier wie bei Hadersdorf sind die Differenzen gegen die correspondirenden Terminbeobachtungen auf der Hohen Warte genommen.

die wahren 24stündigen Mittel verwendet worden. Die wahren Temperaturdifferenzen gegen Wien würde man daher erst erhalten, wenn man die den Mitteln 7^h, 2^h, 9^h, 9^h entsprechenden, allerdings sehr geringfügigen Correctionen an die in den Tabellen stehenden Differenzen anbringen würde.

Einige Nachweise von Localeinflüssen auf die mittleren Lufttemperaturen.

Unter Localeinflüssen auf die Temperaturbestimmungen verstehen wir jene Einwirkungen auf die zur Ermittlung der Lufttemperatur aufgestellten Thermometer, welche deren Angaben auf eine mehr oder minder blos locale Giltigkeit einschränken. Diese Localeinflüsse können erstlich allgemeinerer Natur sein; wir wollen sie dann Localeinflüsse im weiteren Sinne nennen, wenn sie auf die Lufttemperatur selbst sich erstrecken, also die Luftwärme selbst in grösserem oder geringerem Umkreise über die im Allgemeinen in der betreffenden Gegend herrschende Temperatur erhöhen oder vermindern. Von dem Einflusse grösserer Wasseransammlungen: von Seen, Flüssen etc., von Wäldern, Expositionsverhältnissen etc. angefangen bis herab zu dem Einflusse von Städten auf die Lufttemperatur, in deren Innern etc. gibt es die mannigfachsten Abstufungen solcher Localeinflüsse in weiterem Sinne. Vor diesen können und wollen wir unsere Thermometer nicht schützen, ja die Feststellung derartiger Localeinflüsse ist sogar eine wichtige Aufgabe der Meteorologie. Es kann in einzelnen Fällen allerdings auch vorkommen, dass die Lufttemperatur selbst an einer Stelle im Freien derart ganz local beeinflusst wird, dass es völlig zwecklos, ja sogar irreführend und desshalb schädlich wäre, die Thermometer an einer solchen Stelle anzubringen. Wenn die Einwirkungen auf die Luftwärme an einer freien Stelle so mannigfaltiger und complicirter Natur sind, dass dieselben nicht mehr physikalisch sich definiren und feststellen lassen, wird die Temperaturbestimmung zwecklos und irreführend. Bei dem raschen Ausgleich der Temperaturunterschiede im Freien kommt dieser Fall in Wirklichkeit wohl selten vor, soweit es sich, wie hier, nur um Monat- und Jahresmittel der Luftwärme handelt. Dagegen tritt er leider häufig in störender Weise auf, wo es sich um Bestimmung von Momentantemperaturen,

um den täglichen Gang der Wärme und ähnliche speciellere Daten handelt.

Die Localeinflüsse im engeren Sinne, d. i. das, was man gewöhnlich unter einem schädlichen Localeinflusse auf die Temperaturbestimmung versteht, sind die Einwirkungen von Wärmestrahlung auf die Thermometer, welche deren Angaben über die wahre Luftwärme ihrer Umgebung erhöhen oder sie unter dieselben sinken machen (zum Beispiel Ausstrahlung gegen eine kalte Mauer etc.). Diese Localeinflüsse machen die Temperaturbestimmungen oft ganz werthlos; treten sie nur in geringem Maasse und sehr constant auf, so kann eine solche Temperaturstation immerhin noch als „historische Station" im Sinne Köppens' nützlich werden. Soll sie diesen an sich wichtigen Zweck erfüllen, und wenn auch nicht die absoluten Temperaturen so doch die unperiodischen Schwankungen derselben (oder auch die Schwankungen in langen Perioden) dem Sinne und Maasse nach mit genügender Annäherung angeben, so müssen die an sich geringfügigen Localeinflüsse wirklich constant sein, die Umgebung der Thermometer darf keinerlei Änderungen ausgesetzt sein. Die meisten Stationen in Städten, ja in zusammengebauten Ansiedlungen überhaupt unterliegen solchen Localeinflüssen und häufig sind dieselben nicht constant, sondern ändern sich sprungweise oder allmälig, so dass die Station gleichsam eine andere wird. Derartige Reihen von Mitteltemperaturen desselben Ortes wollen wir künftig kurz als „nicht homogen" bezeichnen, während wir „homogene" Temperaturreihen jene nennen, bei welchen während des ganzen Zeitraumes, über welchen sie sich erstrecken, keine Änderung des Localeinflusses eingetreten ist.

Die Constatirung einer Unterbrechung in der Homogenität der Temperaturbestimmungen an einer Station ist eine wichtige Aufgabe für den Meteorologen, weil nicht homogene Temperaturmittel unbrauchbar und irreführend sind, so lange man diesen Mangel nicht constatirt hat.

Bei meiner Arbeit der Ableitung von wahren Temperaturmitteln für das ganze österreichische Alpengebiet und deren Reduction auf die 30jährige Normalperiode 1851/80 hatte ich mich vielfach mit dieser Aufgabe zu beschäftigen, denn nur homogene Temperaturreihen lassen sich zur Reduction auf eine

Normalperiode verwenden. Findet die Änderung sprungweise statt, wie dies in den meisten Fällen durch Wechsel des Beobachters und Änderung der Localität und Art der Thermometeraufstellung (am gleichen Orte) der Fall ist, und zeigt sich der neue Localeinfluss, was gleichfalls meist stattfindet, constant oder doch einer constanten jährlichen Periode unterliegend, so lässt sich auch meist durch Ermittelung der Änderung des Localeinflusses die Reihe wieder homogen machen.

Solche homogen gemachte Temperaturmittel lassen sich dann wieder zu Reductionszwecken, sowie überhaupt weiter verwenden. Am Schlusse dieser Abhandlung findet man eine derartige, aus drei verschiedenen Reihen zusammengestellte 55jährige, sehr homogene Reihe von Monat- und Jahresmitteln der Temperatur für Wien. Hiebei handelte es sich allerdings nicht um die Elimination von Localeinflüssen im engeren, sondern von solchen im weiteren Sinne.

Im Nachfolgenden will ich einige der auffallendsten Nachweise von Änderungen der Localeinflüsse beider Art zusammenstellen, zu welchen mich meine Arbeit von selbst geführt hat. Einerseits sind diese Nachweise wichtig, weil die Ableitung später folgender Temperaturmittel auf denselben beruht und sie begründet, anderseits sind sie an sich interessant, weil sie zeigen, wie nothwendig es ist, vor der Benützung längerer Temperaturreihen dieselben auf ihre Homogenität zu prüfen, und wie sicher dies durch die Differenzen gegen correspondirende Temperaturmittel benachbarter Stationen geschehen kann.

1. Die Temperaturreihen von Budapest. Da ich in meine Arbeit alle österreichischen Stationen südlich und westlich der Donau aufnehmen wollte, musste ich mich auch mit der Ableitung der normalen Temperatur von Budapest beschäftigen. Die correspondirenden Differenzen der Periode 1851/84 gegen Wien zeigten sogleich, dass die Temperaturmittel von Budapest mindestens in drei Reihen zerfallen, auch wenn man die älteren Beobachtungen vor 1851 gar nicht berücksichtigt. Auf meine Anfrage an Herrn Dr. Guido Schenzl, Director der königlich ungarischen Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, über die Modalitäten und Örtlichkeiten der Temperaturbestimmungen während dieser Periode, hat mir derselbe in höchst

dankenswerther Weise darüber eingehende Auskünfte ertheilt, von denen ich hier das Nöthigste mittheile:

„Während der Periode 1851 bis März 1861 wurden die Beobachtungen zuerst in Pest am Telegraphenbureau in der Carlskaserne angestellt, wo die Thermometer sich parterre in einem, von hohen Gebäuden ringsum umschlossenen Hofe befanden. Die darauf folgende Beobachtungsreihe von Dr. Frenreisz (März 1856 bis März 1860) bezieht sich auf Ofen, Wasserstadt. Die Thermometer waren auch in einem Hofe aufgestellt, der jedoch gegen West offen war, die umgebenden Gebäude sind nur niedrig. Mit März 1861 beginnen meine Beobachtungen an der Ofner Realschule. Dieselbe liegt zwar in der Stadt, aber ziemlich isolirt an der östlichen Abdachung des Festungsberges in 128 Met. Seehöhe. Die Thermometer befanden sich unter einer Blechbeschirmung in einer gegen NE ganz offenen Ecke des Gebäudes im zweiten Stockwerke. Nur im Hochsommer wurde eine westliche Gebäudewand theilweise etwa bis 6^h Früh von der Sonne getroffen. Stadttemperaturen möchte ich die an der Realschule erhaltenen nicht nennen, da Nebengebäude nicht durch Strahlung einwirken konnten. Die Beobachtungen wurden hier bis December 1870 inclusive fortgesetzt.

Mit 1. Jänner 1871 wurden die Beobachtungen in die Festung Ofen (Seehöhe 167 Met.) verlegt und dort bis 1. November 1872 fortgesetzt.

Mit diesem Tage begann die Übersiedlung in die Villa vor dem Wienerthore (Seehöhe 153·3 Met.), wo sich jetzt die k. ung. Centralanstalt befindet. Unsere jetzige Station liefert allerdings Landtemperaturen. Der Temperaturunterschied zwischen der Festungsstadt und unserer Localität (circa 15 Met. tiefer und 50 Schritte von der Festungsmauer gegen N) ist schon auffallend, wenn man durch das Wienerthor tritt. Sehr auffallend ist auch im Winter bei ruhigem Wetter der Unterschied zwischen Festung und Christinenstadt. Dort bildet sich ein förmlicher See von kalter Luft, die von den höheren Gegenden herabfliesst. Es ist dann auf der Thalsohle $1-1\frac{1}{2}°$ kälter als bei uns.

Unsere Thermometer befinden sich wie die Ihrigen in einem doppelten Jalousiekasten nach Wild, die innere Wand ist von Blech."

Die Temperaturbeobachtungen der Zwischenperiode 1871 und 1872 habe ich hier gar nicht in Betracht gezogen, sondern blos drei Reihen gebildet: I 1851/60, die sich allerdings auf zwei Orte bezieht, aber sehr nahe gleiche Resultate gibt, II 1861/70 Schenzl, Realschule Ofen, und 1873/84 Schenzl, königliche Centralanstalt für Meteorologie. Für die ganze Periode lagen die Mittel bereits auf wahre Mittelwerthe reducirt vor, theils in der Bearbeitung von Jelinek, theils von Director Schenzl. Die Beobachtungstermine seit 1856 waren constant 7^h, 2^h, 9^h. Als Vergleichsstationen dienten Wien, Graz und Debreczin. Da an letzterem Orte mit 1875 eine neue Beobachtungsreihe beginnt, welche mit der ersteren durchaus nicht homogen ist,[1] konnte diese Station nur theilweise als Vergleichsstation dienen und musste das Normalmittel 1851/80 von Debreczin durch Vergleiche mit Wien und Hermannstadt hergestellt werden.

Den Nachweis über die Ableitung der Normalmittel findet man in den Tabellen am Schlusse dieses Abschnittes. Hier mögen die allgemeinsten Resultate zusammengestellt und verglichen werden.

Wahre Temperaturmittel von Budapest, reducirt auf 1851/80.

	Jänner	April	Juli	October	Jahr
I. Reihe 1851/60	—0·6	11·6	22·4	12·2	11·2
II. „ 1861/70	—0·9	11·2	22·2	11·7	10·8
III. „ 1873/84	—1·9	10·7	21·4	10·8	10·0

Die beiden ersten Reihen geben die Temperatur in der Stadt an und unterscheiden sich nur wenig, wenn man den Herbst ausnimmt; die Herbsttemperaturen der I. Reihe deuten einen bedeutenderen Localeinfluss an, der das Sinken der Temperaturen im Herbst verlangsamte.

Reihe II und III sind vollkommen vertrauenswerth, die erste mag die Lufttemperatur in der Stadt, die letzte jene vor den Thoren von Budapest, also die Temperaturen der Umgebung

[1] Ein Versuch, durch Differenzen gegen das benachbarte Nyiregyháza die Reihe von Debreczin homogen zu machen, gelang nicht, da beide Stationen sich variabel erwiesen.

dieser Stadt angeben. Die Unterschiede sind hier weit grösser, als wir sie früher für Wien gefunden. Der Höhenunterschied ist in Rechnung gezogen worden.

Budapest, Stadt—Land.

	Jänner	April	Juli	October	Jahr
Temperaturdifferenz.....	0·9	0·3	0·6	0·8	0·7

Die Erklärung für die grosse Differenz im Winter liegt wohl zum Theile in den früher von Herrn Director Schenzl angeführten Umständen; die erkaltete Luft sammelt sich in der Niederung; die Temperatur am Abhange des Festungsberges war daher an sich höher, auch ohne Stadteinfluss.

Der Temperaturunterschied zwischen der ländlichen Umgebung von Wien und Budapest in gleicher Seehöhe ergibt sich aus folgendem Vergleiche:

Temperatur in der Seehöhe von 190 Met.

	Jänner	April	Juli	October	Jahr
Umgebung von Wien.....	—1·4	9·7	20·0	10·2	9·4
„ „ Budapest.....	—2·1	10·5	21·2	10·6	9·8
Differenz.....	—0·7	0·8	1·2	0·4	0·4

Der Winter ist kälter, der Sommer aber in noch höherem Maasse wärmer in der Umgebung von Budapest als in jener von Wien.

Vergleichen wir noch die Stadttemperaturen, gleichfalls auf die Seehöhe von 190 Met. bezogen.

	Jänner	April	Juli	October	Jahr
Budapest, Stadt..	—1·3	10·8	21·8	11·3	10·4
Wien, „ ..	—1·2	10·0	20·4	10·5	9·7
Differenz.....	—0·1	0·8	1·4	0·8	0·7

Daraus dürfte sich ergeben, dass der Stadteinfluss in Budapest etwas stärker auf die Thermometer gewirkt haben mag als zu Wien; dies ist allerdings überhaupt bei Zunahme der Sommerwärme zu erwarten. Im Frühling und Sommer stimmen die Differenzen mit jenen der Umgebung fast vollständig überein.

2. Die Temperaturreihen von Cilli. Die Temperaturbeobachtungen zu Cilli beginnen mit September 1848. Der Beobachtungsort wechselte aber sehr häufig, so dass die Temperaturmittel von Cilli durchaus keine homogene Reihe bilden. Ich habe dieselben desshalb auch im ersten Theile dieser Abhandlung nicht benützt. Jelinek hat in einer Abhandlung über die Temperatur von Cilli[1] die Jahrgänge 1848/65 nach Möglichkeit auf eine homogene Reihe zu reduciren versucht. Ich fügte die Jahrgänge 1866 bis 1880 hinzu und bildete die Differenzen der 30 Jahrgänge 1851/80 gegen die correspondirenden Monat- und Jahresmittel von Graz und Laibach. Es zeigte sich dabei, namentlich in der Periode 1869/73 eine auffallende Unterbrechung der Stetigkeit dieser Differenzen. Der langjährige, verdiente Beobachter zu Cilli, Herr J. Castelliz, hat eine ausführliche Stationsbeschreibung geliefert, welche, desshalb zu Rathe gezogen, die Ursache sogleich klar machte. Er sagt unter Anderem: „Die Beobachtungslocalitäten wechselten häufig, das Thermometer war theils im ersten, theils im zweiten Stockwerke verschiedener Gebäude der Stadt und zwar an der Ost- oder Nordseite angebracht. In den Jahren 1869 bis 1873 befand sich die Station ausserhalb der Stadt gegen Norden ganz im Freien, in einem vereinzelt stehenden Hause. Sonst aber stets in der Stadt, das Thermometer war immer möglichst frei exponirt. In der nächsten Umgebung der Stadt wird Garten- und Wiesencultur betrieben, stellenweise sind auch Obst- und Zierbäume zahlreich vorhanden etc.“ — (August 1877.)

Ich leitete desshalb für die Periode, während welcher die Station sich ausserhalb der Stadt im Freien befand, separate Temperaturmittel ab. Da nach den Differenzen gegen Graz und Laibach der Localwechsel erst während des Jahres 1869 eingetreten zu sein scheint, nahm ich, um sicher zu gehen, blos die Jahre 1870—73 inclusive. Diese Temperaturreihe mag die Mittelwärme der ländlichen Umgebung von Cilli repräsentiren, die übrigen Jahrgänge die Temperatur in der Stadt Cilli. Die Ableitung dieser Mittelwerthe findet man tabellarisch am Schlusse dieses Abschnittes. Hier mögen nur wieder die allgemeinsten Resultate Platz finden.

---

[1] Mitth. d. naturwiss. Vereines für Steiermark. V. Heft. Graz 1868.

Wahre Temperaturmittel 1851/80.

	Jänner	April	Juli	October	Jahr
Cilli, Stadt	—1·6	10·2	20·2	10·9	9·7
„ Land	—2·2	9·0	19·3	10·2	8·8
Differenz.....	0·6	1·2	0·9	0·7	0·9

Dieser Temperaturunterschied ist noch grösser als wir ihn vorhin für Budapest festgestellt haben. Auffallend ist es, dass derselbe sein Maximum im Frühling erreicht, während sonst um diese Zeit der Temperaturunterschied zwischen Stadt und Land sein Minimum erreicht, weil die Mauern sich langsamer wieder erwärmen als die Luft.

Da die nun folgenden Nachweise einer Änderung des Localeinflusses zu der Frage des Temperaturunterschiedes zwischen Stadt und Land keinen Beitrag mehr liefern, wollen wir die im Vorhergehenden nachgewiesenen Wärmeunterschiede zwischen Stadt und Land noch einmal zusammenstellen.

Temperaturunterschied zwischen Stadt und Land.

	Jänner	April	Juli	October	Jahr
Wien.....	0·2	0·3	0·4	0·2	0·3
Pressburg (?).....	0·9	0·8	1·0	1·2	0·9
Budapest.....	0·9	0·3	0·6	0·8	0·7
Cilli.....	0·6	1·2	0·9	0·7	0·9
Linz (?)	0·4	0·3	0·3	0·5	0·4

Die mit ? bezeichneten Differenzen sind nicht so sicher wie die übrigen. Der Stadteinfluss von Linz ist durch Differenzen gegen St. Florian bei Linz dargestellt, welche Station schon etwas entfernt liegt. Wie zu erwarten, stellt sich der Einfluss der Städte auf die Temperatur als sehr verschieden dem Maasse nach heraus, stets wird aber die Temperatur im Innern einer Stadt um 0°3 bis 0°9 höher gefunden.

Dieser Umstand ist dort sehr zu beachten, wo man die Temperatur einer Gegend blos nach den innerhalb einer Stadt angestellten Temperaturbeobachtungen beurtheilen muss.

3. Localeinfluss in der Temperaturreihe von Mailand. Für die Reduction der Temperaturen von Südtirol suchte ich mir eine möglichst homogene Reihe von Monat- und Jahresmitteln der Temperatur von Mailand herzustellen für die Periode 1851

bis 1882. Ich konnte anfänglich keinen Zweifel hegen, dass die Temperaturaufzeichnungen zu Mailand direct eine solche liefern werden, da die Beobachungen stets an der Sternwarte (Specola di Brera) in gleicher Höhe angestellt worden sind.

In den Effemeridi di Milano 1865 (pag. 121) findet sich zwar angegeben, dass 1860 die Thermometer gewechselt wurden (nun nach Celsius getheilt), aber auch, dass sie neuerdings sorgfältig verglichen wurden. Über eine Änderung der Aufstellung (die pag. 119 u. 120 beschrieben) ist nichts bemerkt. Die Temperaturmittel sind theils nach den Effemeridi di Milano, theils (später) nach den „Osservazioni meteorol. eseguite nella R. Spec. di Brera" abgeleitet worden, und zwar fast durchgängig aus den Beobachtungen um 6^h, 12^h, 3^h, 9^h nach der Formel $^1/_3(6^h, {}^1/_2(12^h, 3^h), 9^h)$. Diese Combination von Terminbeobachtungen bedarf beinahe keiner Correctur mehr, so nahe entspricht sie dem wahren 24stündigen Mittel. Für einige Jahrgänge, von welchen diese Terminbeobachtungen nicht vorlagen, wurden anderweitige, möglichst günstige Combinationen gewählt, die auch in den anderen Jahrgängen gebildet werden konnten, so dass die Reduction auf das obige Mittel $^1/_3(6^h, 1^1/_2{}^h, 9^h)$ unmittelbar aus den Terminbeobachtungen selbst abgeleitet werden konnte. Die Reduction auf wahre Mittel geschah so mit grosser Sicherheit.

Es stimmen auch meine Jahresmittel (reducirte Monatmittel sind nicht publicirt) mit jenen, welche Celoria in seiner Abhandlung über die Temperatur von Mailand[1] anführt, fast vollkommen überein, die Differenz ist nur hie und da 0°1. Man vergleiche zum Beispiel folgende Lustrenmittel:

	1851/55	1856/60	1861/65	1866/70
Celoria.....	11°94	11°88	12°82	12°92
Jelinek und Hann.....	11·90	11·86	12·80	12·94

Was schon hier auffällt, noch mehr aber in den von mir gebildeten Abweichungen der einzelnen Monat- und Jahresmittel von dem 30jährigen Mittel 1851/80 (siehe meine erste Abhand-

[1] Sulle variazioni periodiche e non periodiche della temperatura nel clima di Milano. Memoria di Giovanni Celoria, Milano 1874, Hoepli. Leider enthält dieselbe keine Monatmittel!

lung) ist die niedrige Temperatur des Decenniums 1851/60. Dasselbe zeigt eine nur selten unterbrochene Reihe negativer Abweichungen. Doch gestattet dies immerhin noch keinen sicheren Schluss auf eine Unterbrechung der Homogenität der Temp.-Reihe von Mailand. Directer erwies sich mir dieselbe bei dem Versuch, die lange Reihe von Temperaturaufzeichnungen für Alessandria auf das 30jährige Mittel 1851/80 nach Mailand zu reduciren. In Alessandria beginnen zwar die Beobachtungen schon 1854, und es liessen sich scheinbar durch die Combination 9^h 9^h Maximum-Minimum für die ganze Reihe bis 1882 gute Temperaturmittel herstellen. Nachdem dies aber geschehen, zeigten sich bei eingehenderer Kritik diese Mittel nicht verlässlich genug. Die Mittel 9^h 9^h und jene aus den täglichen Extremen weichen oft so weit von einander ab, dass ich alles Zutrauen zu letzteren verlor, und sie ganz verwarf. Ich bemerke hier nebenbei, dass mir auch bei andern italienischen Stationen bezüglich der jetzt dort üblichen Mittel 9^h 9^h Maximum-Minimum Bedenken aufgestiegen sind, weil so häufig das Mittel der täglichen Extreme niedriger ist, als das aus 9^h 9^h. Die Combination 9^h 9^h Maximum-Minimum gibt bekanntlich desshalb ein ziemlich richtiges Mittel, weil 9^h 9^h besonders im Winter zu niedrig, Maximum-Minimum etwas zu hoch; wenn aber dies nicht mehr zutrifft, verlieren die Mittel sehr von ihrer Verlässlichkeit. Doch ist dies nicht das allein Bedenkliche. In den Mitteln der täglichen Extreme stecken oft grosse Instrumentalfehler etc., so dass man sie nur im Nothfalle zur Mittelbildung benützen soll. Glücklicherweise beginnt zu Alessandria von 1858 an die Publication der Stundenmittel der Temperatur um 6^h, 9^h, 12^h, 3^h, 6^h, 9^h und ich konnte so wieder das sehr gute Mittel $^1/_3(6^h, {}^1/_2(12^h, 3^h), 9^h)$ ableiten und that dies nun für die ganze mir vorliegende Reihe 1858/82. So erhielt ich, wie sich später zeigte, eine sehr homogene 25jährige Reihe von Temperaturmitteln für Alessandria, die ich anderswo später zu publiciren gedenke. Diese Mittel wollte ich nun nach Mailand auf die Periode 1851/80 reduciren. Das Resultat war ein so unwahrscheinliches, dass sich der Verdacht, Mailand sei in der Periode vor 1860 erheblich kälter gewesen, als nachher schon fast zur Evidenz herausstellte. Man vergleiche folgende Resultate. Zu den Reductionen nach den viel entfernteren und klimatisch viel abweichenderen Stationen Bozen und Venedig

konnte ich, wenn Mailand dazu unbrauchbar, allein meine Zuflucht nehmen; der Erfolg befriedigte aber vollkommen.

30jähriges (1851/80) Temperaturmittel für Alessandria.

	Jänner	April	Juli	October	Jahr
Nach Mailand	—0·3	12·5	23·3	13·0	11·90
„ Venedig	—0·4	12·6	23·7	13·2	12·15
„ Bozen	—0·5	12·6	23·8	13·2	12·20
25jähr. Mittel 1858/82	—0·6	12·7	23·8	12·9	12·24

Da ein 25jähriges Mittel (in dieser Gegend) nicht durch die Reduction auf ein 30jähriges Mittel um 0°2—0°3 im Jahresmittel kälter werden kann, so war Mailand offenbar in der Vergleichsperiode wärmer als früher. Die Vergleiche mit Bozen und Venedig bestätigen dies vollkommen.

Differenz der Jahresmittel: Mailand weniger

	1851/55	1856/60	1861/65	1866/70	1871/75	1876/80	Änderung
Venedig	(—1·0)	—1·4	—1·0	—0·6	—0·9	—0·5	0·9
Bozen	0·1	0·2	0·2	0·5	0·9	1·1	0·9

Noch auffallender tritt diese Änderung in den Mitteln der Sommermonate hervor:

Mailand-Venedig.

	Juni	Juli	August	Mittel
1851/60	—1·04	—0·80	—1·38	—1·07
1861/70	—0·68	0·11	—0·47	—0·35
1871/80	—0·23	0·17	—0·12	—0·06
Änderung	0·81	0·97	1·26	1·01

Mailand-Alessandria.

	Juni	Juli	August	Mittel
1866/70	0·4	0·6	0·1	0·4
1871/75	0·9	0·9	0·5	0·8
1876/80	0·8	1·1	0·7	0·9
Änderung	0·4	0·5	0·6	0·5

Die fortschreitende Zunahme der Sommertemperatur in Mailand dürfte damit constatirt sein. Um die Temperaturen von Mailand dennoch in einigen Fällen zur Reduction verwenden zu können, leitete ich Normalmittel für die Periode 1851/80 und

und 1871/80 ab. Nur die ersteren fanden thatsächlich in zwei bis drei Fällen Verwendung. Es lässt sich aus dem Gange der Differenzen nicht mit Sicherheit constatiren, wo die Änderung in der Temperatur von Mailand beginnt; sie ist jedenfalls eine fortschreitende gewesen.

Normalmittel 1851/80 für Mailand.

		Jänner	April	Juli	October	Jahr
Periode	1851/60	0·4	12·9	23·5	13·1	12·25
„	1871/80	0·7	13·1	24·9	13·8	12·95
	Änd. d. Temp....	0·3	0·2	1·4	0·7	0·70

Wahrscheinlich gibt die Reihe 1851/60, sowie die vorausgegangenen Jahre die richtige Lufttemperatur für Mailand an, später hat sich dann die Situation der Thermometer verschlechtert. Wählt man aus den neueren Jahrgängen jene Differenzen gegen Alessandria aus, welche eine gewisse Constanz zeigen (die Jahre 1858, 1862—64 bleiben weg), so erhält man folgende Mittel für Mailand, neue Reihe:

Mailand, neue Reihe. Mittel für 1851/80.

Jänner	April	Juli	October	Jahr
0·4	13·1	24·7	13·6	12·75

Die Nachweise dieser Ableitungen findet man in den Tabellen am Schlusse dieses Abschnittes.

4. Änderung der Temperatur von Klagenfurt. Während ich die Entscheidung der Frage, worauf die Änderung der Temperatur von Mailand zurückzuführen ist, den italienischen Meteorologen überlassen muss, fällt eine ähnliche Frage, betreffend die Änderung der Temperatur von Klagenfurt, auf mein eigenes Gebiet.

Dass eine solche Änderung in neuerer Zeit eingetreten sei, ergab sich allmälig mit immer steigender Gewissheit durch die Änderung der Temperaturdifferenzen aller Stationen, die mittelst der Beobachtungen von Klagenfurt auf die Periode 1851/80 reducirt werden sollten.

Da die Thermometer in Klagenfurt, sowie deren Aufstellung während der ganzen Periode dieselben geblieben waren, wie ich mich selbst zu wiederholten Malen überzeugen konnte, an der gleichen Sorgfalt der Beobachter nicht der mindeste Zweifel

obwalten konnte, so währte es längere Zeit, bis ich auf den Gedanken kam, die Ursache der Änderung der Differenzen in Klagenfurt selbst zu suchen und nicht bei den kleineren Stationen die mit ersterer Station verglichen wurden. Die Ursache der Änderung der Temperatur von Klagenfurt kann nur in einer Änderung der Umgebung des Aufstellungsortes gesucht werden — für denjenigen aber, der die Örtlichkeit kennt und diese Änderung zu verfolgen Gelegenheit hatte, war a priori keine Veranlassung vorhanden, in diesen Änderungen auch die Ursache einer Änderung der Angaben der Thermometer zu vermuthen. Ich war zwischen 1876 und 1884 mehrmals in Klagenfurt und habe die Station besucht; selbst noch im Herbst 1884, wo ich schon bestimmte Andeutungen des Einflusses gefunden hatte, wurde ich beim Anblicke der Situation der Thermometer und deren Constanz an meinen, durch die Differenzen gefundenen Resultaten wieder irre. Es ergibt sich daraus, wie nothwendig es ist, die Temperaturmittel aller Stationen fortlaufend durch Differenzen zu prüfen. Manche Aufstellungen und Situationen der Thermometer sind, wie es scheint, viel empfindlicher gegen Änderungen in ihrer weiteren Umgebung, als andere und dies erschwert die directe Beurtheilung einer Änderung des Localeinflusses.

Den Nachweis einer Änderung der Temperatur von Klagenfurt habe ich durch Differenzen gegen Graz, Laibach und Saifnitz geführt, Stationen, die in NE, S und W von Klagenfurt liegen und von denen sehr homogene Temperaturreihen vorliegen. Indem ich in Betreff des Details dieser Nachweise auf die Tabelle am Schlusse dieses Abschnittes verweise, stelle ich hier folgenden kurzen Auszug aus denselben zusammen:

Temperaturdifferenzen zwischen Klagenfurt und den nachgenannten Stationen.

Das Zeichen — sagt, dass Klagenfurt kälter ist als die Vergleichsstation.

I. Jahresmittel.

Periode	Graz	Laib.	Saifn.	Änderung nach: Graz	Laib.	Saifn.	Mittel
Prettner.....	—2°0	—1·9	0·8	—	—	—	—
Seeland							
1875/77.....	—2·2	—2·0	0·9	—0·2	—0·1	0·1	0·0
1878/80.....	—1·6	—1·4	1·3	0·4	0·5	0·5	0·5
1881/84.....	—1·1	—0·7	1·8	0·9	1·2	1·0	1·0

II. Mittel des Sommerhalbjahrs.

Periode	Graz	Laib.	Saifn.	Änderung nach: Graz	Laib.	Saifn.	Mittel
Prettner	—1·3	—0·9	1·6	—	—	—	—
Seeland							
1875/77.....	—1·3	—1·2	1·8	0·0	—0·3	0·2	0·0
1878/80.....	—0·8	—0·6	2·5	0·5	0·3	0·9	0·6
1881/84.....	—0·5	—0·1	2·6	0·8	0·8	1·0	0·9

Es stellt sich heraus, dass die Änderung des Beobachters und des Beobachtungsortes zwischen der älteren Reihe von Prettner und der neueren von Seeland anfangs (bis 1877) keine merkliche Temperaturänderung zur Folge gehabt hat, mit 1878 dagegen beginnt sich eine Änderung besonders im Sommer zu zeigen, die dann noch fortschreitet und die Winter- und Sommertemperatur fast gleichmässig betrifft. Die Temperatur steigt ziemlich gleichmässig um einen Grad von 1878 bis 1884.

Dass die Änderung mit dem Jahre 1878 (und zwar im Sommer dieses Jahres) beginnt, zeigt folgende Reihe von Temperaturdifferenzen.

Klagenfurt-Saifnitz (Mai-September).

Jahr.....	1853/74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
Differenz.	1·51	1·56	1·84	1·58	2·14	2·72	2·20	2·46	2·50	2·80	2·62

Die Differenzen der Wintermonate einzelner Jahrgänge sind desshalb nicht zu verwenden, weil die Wintertemperatur von Klagenfurt gegenüber jener anderer Stationen zu locale Abweichungen zeigt.

Von 1845 bis März 1875 befand sich die meteorologische Station auf der Nordseite der Stadt in einem von Gärten umgebenen Hause, ganz im Freien kann man sagen, und schon in der Nähe des bewaldeten Hügellandes. Nach dem Tode Prettner's übernahm (April 1875) Herr Bergrath Seeland die Beobachtungen. Die Instrumente sind im Unionsgebäude der Hüttenberger Eisenwerksgesellschaft aufgestellt, das auf einem ebenen, anfänglich ganz freien Platze im Süden der Stadt sich befindet. Das Thermometer befindet sich daselbst 6·6 Met. über dem Erdboden an dem Nordfenster eines Corridors in der üblichen Blechbeschirmung. Im Hause selbst fand bis heute keine Veränderung statt. Im Jahre 1878 wurde aber auf die mechanische Werkstätte, die in einem

Abstand von 142 Met. dieser Nordseite gegenüberliegt, ein erster Stock aufgesetzt und im Jahre 1880 begann der Bau des Rudolfinums im Osten. Der früher freie Aspect nach N und E wurde so, allerdings in grösserer Entfernung, durch Bauten abgeschlossen. Hierin kann wohl allein die Ursache der Temperaturzunahme liegen. Direct aus der Beurtheilung der Situation, dürfte kaum ein Fachmann selbst einen so bedeutenden Einfluss auf die Änderung der Temperaturangaben als wahrscheinlich oder auch nur als möglich angenommen haben.[1]

5. Änderung der Temperatur der alten Sternwarte Wien. Der Nachweis dieser Änderung ist nur desshalb von Interesse, weil er Rechenschaft gibt über die Unterschiede in der Angabe der Normaltemperaturen für das meteorologische Institut auf der Hohen Warte in dieser Abhandlung und jener in einer früheren.[2] Um Normalmittel der Temperaturen für die neue meteorologische Station auf der Hohen Warte abzuleiten, konnte ich damals nur an die noch fortdauernden Temperaturaufzeichnungen der alten Sternwarte anknüpfen, welche scheinbar unter völlig ungeänderten Verhältnissen bis Ende 1878 fortdauerten. Damals hatte ich schon fünf correspondirende Jahrgänge zur Verfügung, die bei der geringen Entfernung beider Stationen vollkommen genügend erscheinen mussten, um richtige mittlere Temperaturdifferenzen gegen die alte Sternwarte zu erhalten.

Als ich im Verlaufe der jetzigen Arbeit die nun schon zu 13 Jahrgängen angewachsenen Temperaturaufzeichnungen auf der Hohen Warte mit den correspondirenden Mitteln von Kremsmünster und Graz verglich, erhielt ich auffallend höhere Sommertemperaturen für die Hohe Warte, als sie mir der Vergleich mit der alten Sternwarte ergeben hatte. Dies veranlasste mich, näher auf die Ursache dieser Unterschiede einzugehen, und es konnte bald kein Zweifel mehr übrig bleiben, dass selbe darin zu suchen sei,

---

[1] Nach einer eben eingelangten brieflichen Mittheilung des Herrn Bergrathes Seeland zeigte das trockene Thermometer in thauendem Schnee $+0°3$ C.

[2] Über die Temperatur von Wien nach 100jährigen Beobachtungen, und: Über die Temperatur von Wien. Nachtrag Sitzb. d. Wiener Akad., Novemberheft 1877 und Decemberheft 1877.

Temperatur von Budapest reducirt auf 1851/80.

Wahre Mittel.

Beobachtet unter Dr. Guido Schenzl seit 1861.

	I. Reihe, Realschule, 1861/70 reducirt nach				II. Reihe, meteorolog. Centralanstalt, 1873/84 reducirt nach		
	Debreczin	Wien	Graz	Mittel	Wien	Graz	Mittel
Decemb. .	—0·32	—0·33	—0·54	—0·40	—1·08	—0·92	—1·00
Jänner. . .	—0·85	—0·79	—1·20	—0·95	—1·96	—1·94	—1·95
Februar. .	1·14	1·14	1·03	1·10	—0·14	0·02	—0·06
März	5·17	5·18	4·91	5·09	4·21	4·27	4·24
April	11·30	11·22	11·00	11·17	10·78	10·73	10·75
Mai	16·56	16·16	15·82	16·18	15·62	15·53	15·58
Juni	20·50	20·58	20·30	20·46	19·85	19·77	19·81
Juli	22·24	22·24	22·09	22·19	21·44	21·42	21·43
August . .	21·37	21·37	21·24	21·33	20·45	20·35	20·40
Septemb. .	17·24	17·20	17·22	17·22	16·24	16·09	16·16
October. .	11·86	11·55	11·79	11·73	10·75	10·75	10·75
Novemb. .	4·77	4·23	4·35	4·45	3·61	3·77	3·69
Jahr.	10·91	10·80	10·66	10·80	9·98	9·98	9·98

	Ältere Reihe 1851/60 red. nach				Debreczin 1851/70 red. auf 1851/80 nach		
	Debreczin	Wien	Graz	Mittel	Wien	Hermannstadt	Mittel
Decemb. .	(—0·33)	0·22	0·40	0·15	—1·08	—0·76	—1·00[1]
Jänner. . .	(—1·18)	—0·47	—0·46	—0·64	—1·73	—2·21	—2·03[1]
Februar. .	(0·89)	1·32	1·49	1·27	0·07	0·09	0·08
März	5·27	5·24	5·41	5·31	4·75	4·54	4·65
April	11·44	11·53	11·77	11·58	10·90	11·30	11·10
Mai	16·82	16·57	16·72	16·70	16·56	16·68	16·62
Juni	21·02	20·58	20·76	20·79	20·72	20·95	20·83
Juli	22·66	22·23	22·32	22·40	22·51	22·56	22·53
August . .	21·64	21·56	21·60	21·60	21·42	21·48	21·45
Septemb.	17·56	17·64	17·57	17·59	17·27	17·44	17·35
October. .	12·23	12·19	12·18	12·20	12·06	12·15	12·11
Novemb. .	5·03	4·95	5·03	5·00	4·73	4·73	4·73
Jahr.	11·09	11·13	11·22	11·16	10·71	10·73	10·72

[1] Die Mittel dieser Monate sind noch mit Zuziehung der Beobachtungen 1871/80 zu Debreczin selbst berechnet worden.

Wahre Mitteltemperaturen für Cilli, Stadt und Land.

	Cilli Stadt 1851/80 (ohne 1869/73)					Cilli Land 1870/73 reducirt auf 1851/80 nach		
	Temperaturdiff.		Normalmittel 1851/80 nach					
	Cilli Graz	Cilli Laibach	Graz	Laibach	Mittel	Graz	Laibach	Mittel
Decemb.	0·63	0·55	—0·77	—0·87	—0·8	—1·24	—1·54	—1·4
Jänner	0·58	0·57	—1·55	—1·66	—1·6	—2·17	—2·27	—2·2
Februar	0·64	0·72	0·73	0·73	0·7	—0·18	—0·09	—0·1
März	0·61	0·57	4·60	4·51	4·6	3·23	3·61	3·4
April	0·34	0·56	10·21	10·24	10·2	8·75	9·18	9·0
Mai	0·18	0·64	14·44	14·58	14·5	13·26	13·55	13·4
Juni	0·32	0·72	18·56	18·68	18·6	17·56	17·68	17·6
Juli	0·32	0·60	20·15	20·31	20·2	19·19	19·35	19·3
August	0·39	0·83	19·45	19·60	19·5	18·33	18·37	18·3
Septemb.	0·35	0·72	15·62	15·55	15·6	14·65	14·54	14·6
October	0·73	0·57	10·95	10·93	10·9	10·20	10·26	10·2
Novemb.	1·00	0·46	4·23	4·20	4·2	3·62	3·70	3·7
Jahr	0·51	0·63	9·72	9·73	9·7	8·76	8·86	8·8

Mailand 1851/60.

	Mailand-Venedig	Venedig Norm.	Mailand Norm.	Mailand-Bozen	Bozen Norm.	Mailand Normal	Mailand Normal Mittel
Dec.	—1·9	3·7	1·8	0·2	1·3	1·5	1·7
Jänn.	—2·4	2·7	0·3	0·5	0·0	0·5	0·4
Feb.	—1·5	4·6	3·1	0·2	3·1	3·3	3·2
März	0·1	7·8	7·9	0·2	7·5	7·7	7·8
April	—0·3	13·0	12·7	—0·1	13·1	13·0	12·9
Mai	—0·8	17·4	16·6	—0·2	17·0	16·8	16·7
Juni	—1·0	22·0	21·0	—0·3	21·0	20·7	20·9
Juli	—0·8	24·5	23·7	0·3	23·0	23·3	23·5
Aug.	—1·4	23·7	22·3	0·2	22·0	22·2	22·3
Sept.	—1·2	19·8	18·6	—0·2	18·3	18·1	18·3
Oct.	—1·8	14·9	13·1	0·6	12·5	13·1	13·1
Nov.	—1·9	8·1	6·2	0·6	5·5	6·1	6·2
Jahr	—1·24	13·52	12·3	0·17	12·04	12·2	12·25

Mailand.

	1871/80				1871/80 Mailand Normal Mittel	1851/60 Mailand Normal Mittel	Änderung von 1851/60 auf 1871/80
	Mailand-Venedig	Mailand Normal	Mailand-Bozen	Mailand Normal			
Dec...	—1·8	1·9	1·1	2·4	2·1	1·7	0·4
Jänn..	—1·9	0·8	0·5	0·5	0·7	0·4	0·3
Feb...	—1·0	3·6	0·8	3·9	3·7	3·2	0·5
März .	0·2	8·0	0·4	7·9	8·0	7·8	0·2
April .	—0·1	12·9	0·3	13·3	13·1	12·9	0·2
Mai...	0·0	17·4	0·5	17·5	17·4	16·7	0·7
Juni .	—0·2	21·8	1·0	22·0	21·9	20·9	1·0
Juli ..	0·2	24·7	2·1	25·1	24·9	23·5	1·4
Aug. .	—0·1	23·6	1·8	23·8	23·7	22·3	1·4
Sept.	—0·3	19·5	1·2	19·5	19·5	18·3	1·2
Oct. ..	—1·2	13·7	1·4	13·9	13·8	13·1	0·7
Nov...	—1·6	6·5	1·2	6·7	6·6	6·2	0·4
Jahr..	—0·65	12·9	1·02	13·0	12·95	12·25	0·75

	Ableitung der 30jährigen Mittel 1851/80 für Alessandria					Ableitung des 30jährigen Mittels 1851/80 für Mailand	
	Mittlere Diff. der Periode 1858/82 gegen		30jährige Mittel durch Diff. gegen		30jährige Mittel Alessandria	Mailand-Alessandria 21 Jahre 1858/82	Mailand 1851/80
	Venedig	Bozen	Venedig	Bozen			
Dec...	—2·49	0·13	1·26	1·39	1·32	0·68	2·00
Jänn..	—3·03	—0·54	—0·36	—0·51	—0·43	0·84	0·41
Feb...	—1·82	—0·38	2·77	2·69	2·73	0·88	3·61
März .	—0·56	—0·36	7·19	7·20	7·20	0·56	7·76
April .	—0·48	—0·44	12·56	12·59	12·57	0·51	13·08
Mai ..	—0·77	—0·34	16·65	16·63	16·64	0·50	17·14
Juni .	—0·86	0·15	21·14	21·22	21·13	0·57	21·70
Juli ..	—0·79	0·81	23·74	23·81	23·87	0·80	24·67
Aug. .	—0·80	0·90	22·92	22·93	22·93	0·43	23·36
Sept. .	—1·09	0·65	18·70	18·99	18·84	0·32	19·16
Oct. ..	—1·73	0·66	13·15	13·19	13·17	0·43	13·60
Nov...	—2·07	0·68	6·04	6·17	6·11	0·40	6·51
Jahr .	—1·37	0·16	12·15	12·20	12·17	0·58	12·75

Nachweis eines eingetretenen Localeinflusses bei der Station Klagenfurt.

	Temperaturdifferenz Klagenfurt—											
	Graz				Laibach				Saifnitz			
	1856/75	1875/77	1878/80	1881/84	1866/74	1875/77	1878/80	1881/84	1853/75	1875/77	1878/80	1881/84
	Prettner	Seeland			Prettner	Seeland			Prettner	Seeland		
December	—3·2	—4·0	—1·8	—1·9	—3·7	—3·3	—2·9	—1·7	—0·5	—0·5	—1·4	—0·8
Jänner	—4·1	—4·2	—5·1	—2·7	—3·8	—3·7	—3·1	—1·7	—1·3	—1·6	—2·0	—0·1
Februar	—3·3	—3·3	—2·5	—1·8	—3·1	—3·4	—2·3	—1·3	—0·5	—0·3	—0·7	1·1
März	—2·4	—2·3	—1·7	—1·2	—2·1	—1·7	—2·2	—0·9	0·9	1·4	1·5	2·2
April	—1·5	—2·1	—0·9	0·0	—1·2	—1·6	—0·8	—0·2	2·0	2·2	3·0	2·9
Mai	—1·1	—1·3	—0·8	—0·5	—0·7	—1·1	—0·6	—0·1	1·9	1·8	2·5	2·7
Juni	—1·3	—1·0	—0·5	—0·4	—0·9	—0·7	—0·2	—0·3	1·7	2·1	2·7	2·9
Juli	—1·1	—0·9	—0·5	—0·4	—0·9	—0·9	—0·7	—0·2	1·6	1·7	2·3	2·8
August	—1·2	—1·4	—0·5	—0·4	—0·9	—1·4	—0·4	0·0	1·4	1·5	2·3	2·5
September	—1·4	—1·1	—1·4	—1·0	—0·9	—1·4	—0·6	—0·3	1·1	1·3	2·1	2·1
October	—1·5	—2·2	—1·2	—1·1	—1·6	—1·9	—1·2	—0·8	0·6	0·7	1·4	2·1
November	—2·1	—2·1	—1·8	—1·5	—2·9	—2·7	—1·7	—1·4	0·2	0·2	1·7	1·1
Jahr	—2·0	—2·2	—1·6	—1·08	—1·9	—2·0	—1·4	—0·7	0·8	0·9	1·3	1·8
April-Sept.	—1·3	—1·3	—0·8	—0·45	—0·9	—1·2	—0·6	—0·1	1·6	1·8	2·5	2·6

Nachweis einer Änderung der Temperatur an der (alten) Sternwarte von 1871/78.

	Mittlere Temperaturdifferenzen Sternwarte—							Änderung der Temperatur an der Sternwarte im Mittel der drei Vergleichungen
	Kremsmünster			Pressburg		Graz		
	1851/60	1861/70	1871/78	1851/70	1871/78	1851/70	1871/78	
December	1·7	1·1	1·4	0·2	—0·1	0·8	0·7	—0·2
Jänner	1·7	1·3	1·5	0·2	0·4	1·1	0·5	—0·1
Februar	1·8	1·5	1·7	0·2	0·3	0·3	0·6	0·1
März	1·9	1·9	1·7	—0·1	0·3	0·2	0·3	0·3
April	1·7	1·9	2·2	—0·4	0·0	0·1	0·4	0·4
Mai	2·0	1·8	2·6	—0·4	0·1	0·3	0·6	0·5
Juni	2·2	2·2	2·7	—0·7	0·0	0·4	1·3	0·7
Juli	2·3	2·3	2·8	—0·7	0·0	0·6	1·3	0·6
August	2·3	1·9	2·6	—0·7	—0·1	0·6	1·3	0·6
September	2·1	2·4	2·2	—0·5	—0·2	0·7	1·1	0·3
October	2·2	2·0	2·2	—0·6	—0·2	0·4	0·4	0·2
November	1·9	1·6	2·0	—0·4	—0·2	0·2	0·6	0·2
Jahr	1·98	1·83	2·13	—0·32	0·02	0·48	0·76	0·30

dass die Temperatur an der alten Sternwarte in der Vergleichsperiode (1872/77) sehr wesentlich höher war wie früher.

Eine Ursache für diesen letzteren Umstand konnte mir Herr Director Weiss nicht angeben, er erinnert sich keiner Änderung, sei es der Instrumente, sei es der Aufstellung. Auch dieser Fall lehrt, dass jede Reihe von Mitteltemperaturen, auch wenn kein Verdacht gegen sie vorliegt, durch Differenzen gegen correspondirende Mittelwerthe von Nachbarstationen geprüft werden muss, bevor man sie zu weiteren Untersuchungen verwerthet.

Wahre Temperaturmittel für Wien, Stadt, für die 55jährige Periode 1830/84.

Da es vielfach wünschenswerth erscheint, für ein- und denselben Ort eine möglichst langjährige Reihe homogener Temperaturmittel zu besitzen, so habe ich auf Grund der im Vorhergehenden näher dargelegten Untersuchungen eine 55jährige Reihe von Monat- und Jahresmitteln der Temperatur für Wien hergestellt, welche auf das frühere Locale der k. k. Centralanstalt in der Favoritenstrasse Nr. 30 bezogen ist. Sie setzt sich zusammen aus drei Reihen: 1830 bis August 1852 alte Sternwarte, September 1852 bis April 1872 Favoritenstrasse Nr. 30 und Mai 1872 bis December 1884 Hohe Warte Nr. 38.

Die Temperaturmittel der ersten Reihe sind der Abhandlung von Jelinek entnommen und auf die frühere Localität der k. k. Centralanstalt bezogen worden durch Anbringung folgender kleiner Differenzen, welche aus den correspondirenden Beobachtungen 1853/71 abgeleitet worden sind und sich sehr constant erwiesen haben:

Favoritenstrasse Nr. 30 — alte Sternwarte.

Oct. 0°0, Nov. 0°1, Dec. 0°1, Jänn. 0°1, Febr. 0°1, März 0°1, April 0°0, Mai — 0°1, Juni — 0°2, Juli — 0°3, August — 0°2, Sept. 0°0.

Aus den auf die gleiche Periode 1851/80 bezogenen Normalmitteln für die Hohe Warte und Favoritenstrasse Nr. 30 ergaben sich folgende Temperaturdifferenzen:

Favoritenstrasse Nr. 30 — Hohe Warte Nr. 38.

Oct. 0°4, Nov. 0°2, Dec. 0°2, Jänn. 0°3, Febr. 0°4, März 0°4, April 0°4, Mai 0°4, Juni 0°4, Juli 0°4, August 0°5, Sept. 0°5.

Durch Anbringung dieser Differenzen an die auf der Hohen Warte erhaltenen 24stündigen Temperaturmittel Mai 1872 bis December 1884 sind letztere auf die ältere Localität der k. k. Centralanstalt bezogen worden. Auf diese Weise entstand eine sehr homogene Temperaturreihe, die sich nun über 55 Jahre erstreckt.

Ich ging absichtlich nicht hinter 1830 zurück, denn erst mit dem Jahre 1826 etwa, wahrscheinlich seit dem Umbau der Sternwarte, beginnt die neue verlässliche Reihe der Temperaturaufzeichnungen, während die ältere Reihe, die bis 1775 zurückgeht, eine um etwa 0°6 zu hohe Mitteltemperatur für Wien gibt. Diese Differenz hat übrigens nach den Erfahrungen, die wir vorhin in Bezug auf andere Stadttemperaturen mitgetheilt haben, nichts Auffallendes.

Ich theile auch die Temperaturabweichungen mit für die ganze 55jährige Reihe von dem 50jährigen Mittelwerth 1831/80, denn die von Jelinek mitgetheilten Abweichungen basiren auf dem Mittelwerth der ganzen Reihe 1775/1864, der aus zwei nicht homogenen Reihen abgeleitet ist. Die Abweichungen sind desshalb nicht ganz richtig, weil sich die Mitteltemperatur, d. h. der Localeinfluss stark geändert hat. Es ist darum auch die daraus berechnete Veränderlichkeit der Monat- und Jahresmittel nicht ganz richtig. Ich stelle desshalb die genaueren Werthe der mittleren Abweichung der Mittelwerthe für Wien hier zusammen und vergleiche sie mit den früher gewonnenen Werthen für die 30jährige Periode 1851/80 im ersten Theile meiner Abhandlung.

Mittlere Abweichungen der Monat- und Jahresmittel für Wien.

Jahresmittel 1831/80: 0·67 1851/80: 0·68

	October	November	December	Jänner	Februar	März
1831/80.....	1·45	1·46	**2·38**	1·99	**2·41**	1·70
1851/80.....	1·45	1·55	**2·38**	1·63	**2·42**	1·63
	April	Mai	Juni	Juli	August	Septemb.
1831/80.....	1·46	**1·73**	1·11*	1·22	1·28	1·14*
1851/80.....	1·51	**1·81**	0·99*	1·16	1·21	1·05*

Wie man sieht, ist durch Hinzufügung von 20 neuen Jahrgängen die mittlere Veränderlichkeit der Monat- und Jahresmittel

nur wenig geändert worden, die jährliche Periode ist dieselbe geblieben, was namentlich in Bezug auf das Maimaximum, das ich selbst angezweifelt habe, von Interesse ist.

Die absolute Veränderlichkeit der Monat- und Jahresmittel ist durch folgende Zahlen gegeben:

December	1840	—8·9	1833	5·8	Differenz	14°7
Jänner	1830	—6·6	1834	5·7	„	12·3
Februar	1858	—7·5	1843	5·2	„	12·7
März	1845	—4·7	1836	5·4	„	10·1
April	1839	—4·3	1831	3·3	.	7·6
Mai	1874 (u.76)	—3·8	1833	4·5	„	8·3
Juni	1884	—3·4	1834 (66)	2·3	„	5·7
Juli	1837	—3·0	1834 (59)	3·8	„	6·8
August	1833	—2·6	1842	2·7	„	5·3
September	1877	—2·5	1834	4·0	„	6·5
October	1881	—3·5	1846	3·1	„	6·6
November	1858	—4·1	1852	3·5	„	6·7

Die negativen wie die positiven grössten Abweichungen nehmen vom Winter gegen den Sommer hin ab, während aber im Sommerhalbjahr durchschnittlich die positiven Abweichungen die negativen übertreffen, verhält sich dies im Winterhalbjahr gerade umgekehrt.

Die wärmsten Jahre waren 1834 (Abweichung +2·0) und 1863 (1·8), die kältesten 1838 und 1864 (Abweichung —1°6). Die wärmsten Jahre entfernen sich weiter vom Mittelwerthe als die kältesten.

Wahre Temperaturmittel für Wien.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
1830	—8·1	—3·3	4·1	11·6	15·5	19·3
1831	—3·3	1·1	5·3	13·2	14·9	16·5
1832	—0·9	1·5	4·7	10·2	13·7	17·0
1833	—5·8	3·6	5·0	8·6	19·3	20·4
1834	4·2	1·1	4·3	9·0	18·9	20·9
1835	0·6	2·6	5·1	9·0	16·4	18·8
1836	—1·6	1·1	9·5	10·4	12·4	19·3
1837	—1·3	—2·3	2·2	9·0	12·6	17·3
1838	—7·9	—4·1	4·1	7·4	15·1	18·0
1839	—0·2	1·6	1·8	5·6	13·5	20·3
1840	—0·3	—0·4	0·0	9·7	14·0	17·8
1841	—1·1	—3·4	5·5	11·6	18·4	17·8
1842	—5·1	—5·0	5·3	8·0	15·6	18·4
1843	0·8	5·8	2·8	9·7	13·4	15·8
1844	—1·8	—0·5	2·6	10·5	14·8	19·1
1845	0·6	—3·4	—0·6	10·6	12·5	19·9
1846	1·3	3·0	6·5	11·4	16·3	20·0
1847	—3·6	0·1	3·0	8·4	17·6	15·5
1848	—7·6	2·3	6·0	12·5	14·6	20·3
1849	—2·6	4·0	3·7	8·6	15·1	19·5
1850	—5·3	3·7	1·8	10·6	15·3	18·8
1851	—1·3	0·5	5·4	11·0	11·9	17·9
1852	1·0	2·6	1·5	6·8	15·3	19·1
1853	1·0	—0·3	1·0	6·5	14·6	18·4
1854	—1·0	0·3	3·9	9·5	16·0	17·3
1855	—2·6	—3·4	4·4	8·3	14·1	19·1
1856	0·2	2·9	2·1	12·0	15·0	20·1
1857	—1·5	—2·9	3·5	10·4	14·5	18·5
1858	—3·4	—6·9	2·8	9·3	13·6	20·8
1859	—0·5	3·3	7·9	10·5	15·3	19·0
1860	1·4	—0·3	2·9	9·5	16·0	19·0

Stadt (Favoritenstrasse 80).

Juli	August	Septem-ber	October	Novem-ber	Decem-ber	Jahr
20·7	20·3	13·8	8·2	5·5	2·0	9·41
21·1	19·1	13·6	12·9	4·3	0·1	9·90
19·1	20·8	15·0	10·5	2·6	—1·1	9·42
17·8	16·9	14·5	9·7	4·8	5·6	10·03
23·9	21·9	19·6	10·2	3.5	2·1	11·63
21·8	20·5	16·1	9·4	—0·1	—1·9	9·86
20·1	19·4	15·0	11·5	3·3	3·6	10·33
17·1	21·5	13·4	9·4	3·6	—0·6	8·49
19·1	17·5	16·0	8·1	3·7	—0·5	8·04
21·2	17·7	16·4	11·6	6·5	1·3	9·78
18·8	18·0	15·8	7·7	7·1	—9·1	8·26
19·3	19·0	16·6	12·9	4·8	3·3	10·39
19·8	22·2	15·5	7·1	2·5	2·1	8·87
19·2	19·5	14·3	9·5	3·8	3·7	9·86
17·9	17·3	15·9	11·5	6·5	—4·0	9·15
20·7	17·7	14·3	10·7	5·6	3·0	9·30
23·1	21·2	16·4	13·5	2·2	—1·5	11·12
19·8	20·5	13·5	8·2	2·7	0·6	8·86
19·8	19·0	15·1	11·6	4·1	—0·4	9·77
19·2	17·3	14·3	9·7	2·8	—1·6	9·17
19·1	20·0	13·5	9·1	6·0	0·7	9·44
18·8	18·9	13·4	12·4	1·8	0·3	9·25
21·6	19·9	15·5	8·5	7·3	3·4	10·21
20·8	19·8	15·3	10·9	3·0	—4·4	8·88
20·1	18·1	14.8	10·3	2·4	3·3	9·58
20·0	20·1	14·9	13·3	4·5	—5·6	8·93
17·9	20·8	14·3	10·5	0·9	—0·9	9·65
21·9	21·3	16·5	13·4	2·5	1·5	9·97
19·8	18·4	17·6	11·9	—0·3	0·9	8·71
23·9	21·9	14·9	11·6	3·3	—3·0	10·67
17·6	19·4	16·1	9·1	2·4	—0·9	9·35

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
1861	—4·3	3·0	5·6	7·6	12·3	19·6
1862	—2·8	0·0	7·1	12·9	16·5	18·0
1863	3·3	3·4	6·9	9·3	16·4	18·8
1864	—6·6	0·0	6·1	6·9	12·3	18·5
1865	0·0	—4·5	0·1	12·0	18·4	16·5
1866	1·1	4·0	5·3	12·2	12·6	20·9
1867	—0·4	4·9	3·4	10·6	14·5	18·3
1868	—1·4	4·1	4·9	9·5	18·5	20·3
1869	—2·1	5·4	3·4	12·6	17·5	16·4
1870	—1·1	—5·0	1·9	9·1	16·4	18·0
1871	—4·1	—0·6	5·0	9·6	11·8	15·5
1872	—1·3	0·9	6·7	12·3	17·1	17·5
1873	1·5	0·7	7·3	9·4	11·8	17·6
1874	0·5	0·6	4·4	11·8	10·9	18·6
1875	0.0	—4·3	0·3	9·0	15·8	20·7
1876	—4·5	0·0	6·0	12·3	11·0	18·8
1877	1·6	3·1	4·1	8·4	12·3	20·1
1878	—1·3	3·3	4·9	10·8	14·9	18·0
1879	—1·8	2·0	3·8	9·2	12·7	18·9
1880	—2·0	—1·0	4·0	11·9	13·1	17·7
1881	—4·5	—0·2	4·4	7·1	13·8	17·5
1882	0·8	2·4	9·3	10·0	15·2	16·4
1883	—1·5	2·0	0·5	7·6	15·2	18·4
1884	2·6	2·1	5·7	8·0	15·5	15·2
			Mittel			
1831/40	—1·65	0·58	4·20	9·21	15·08	18·63
1841/50	—2·44	0·66	3·66	10·19	15·36	18·51
1851/60	—0·67	—0·42	3·54	9·38	14·63	18·92
1861/70	—1·43	1·53	4·47	10·27	15·54	18·53
1871/80	—1·14	0·47	4·65	10·47	13·14	18·34
50jährige Mittel	—1·47	0·56	4·10	9·90	14·75	18·59

Juli	August	September	October	November	December	Jahr
20·3	21·3	16·6	10·9	4·0	—1·5	9·62
20·6	18·6	16·8	11·9	4·1	—0·4	10·27
19·9	21·8	16·9	12·4	5·3	2·4	11·40
18·3	17·0	15·5	8·8	3·3	—3·4	8·06
22·6	19·0	16·4	10·8	5·5	0·0	9·73
19·4	17·5	17·5	8·4	5·1	—0·5	10·29
19·1	20·6	16·8	9·5	2·8	—1·4	9·89
20·6	20·6	18·1	12·3	3·5	4·0	11·25
21·7	18·5	17·1	8·0	4·9	1·5	10·41
20·9	18·0	13·9	9·6	6·1	—3·8	8·67
20·4	19·7	16·0	7·8	2·9	—6·4	8·13
20·5	18·1	16·6	12·9	6·2	3·6	10·93
21·7	21·6	14·5	12·3	5·6	1·4	10·45
22·5	18·3	17·8	10·7	1·4	—0·8	9·72
20·0	20·6	14·7	8·1	3·2	—1·7	8·87
20·1	20·2	14·7	11·0	0·5	2·1	9·35
19·6	21·5	13·1	8·4	5·0	0·0	9·77
18·8	19·4	16·7	11·4	4·3	—1·8	9·95
17·5	20·1	16·5	9·1	1·2	—7·3	8·49
21·2	17·8	15·8	10·1	5·4	3·9	9·83
21·3	19·8	13·7	6·9	3·2	0·8	8·65
19·9	17·1	15·7	10·8	5·2	1·7	10·38
19·5	19·0	15·4	10·3	4·1	1·1	9·30
20·5	18·5	15·6	9·5	2·4	2·0	9·80
			Mittel			
20·00	19·33	15·54	10·10	3·93	—0·05	9·57
19·79	19·37	14·94	10·38	4·10	0·59	9·59
20·24	19·86	15·33	11·19	2·78	—0·54	9·52
20·34	19·29	16·56	10·26	4·46	—0·31	9·96
20·23	19·73	15·64	10·18	3·57	—0·70	9·55
20·12	19·52	15·60	10·42	3·77	—0·20	9·64

Wien, Abweichungen der Temperatur von dem 50jährigen Mittel 1831/80.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
1830	—6·6*	—3·9	0·0	1·7	0·7	0·7	0·6	0·8	—1·8	—2·2	1·7	2·2	—0·23
1831	—1·8	0·5	1·2	3·3*	0·2	—2·1	1·0	—0·4	—2·0	2·5	0·5	0·3	0·26
1832	0·6	0·9	0·6	0·3	—1·0	—1·6	—1·0	1·3	—0·6	0·1	—1·2	—0·9	—0·22
1833	—4·3	3·0	0·9	—1·3	4·5*	1·8	—2·3	—2·6*	—1·1	—0·7	1·0	5·8*	0·39
1834	5·7*	0·5	0·2	—0·9	4·2	2·3*	3·8*	2·4	4·0*	—0·2	—0·3	2·3	1·99*
1835	2·1	2·0	1·0	—0·9	1·6	0·2	1·7	1·0	0·5	—1·0	—3·9	—1·7	0·22
1836	—0·1	0·5	5·4*	0·5	—2·4	0·7	0·0	—0·1	—0·6	1·1	—0·5	3·8	0·69
1837	0·2	—2·9	—1·9	—0·9	—2·1	—1·3	—3·0*	2·0	—2·2	—1·0	—0·2	—0·4	—1·15
1838	—6·4*	—4·7	0·0	—2·5	0·4	—0·6	—1·0	—2·0	0·4	—2·3	—0·1	—0·3	—1·60*
1839	1·3	1·0	—2·3	—4·3*	—1·2	1·7	1·1	—1·8	0·8	1·2	2·7	1·5	0·14
1840	1·2	—1·0	—4·1	—0·2	—0·8	—0·8	—1·3	—1·5	0·2	—2·7	3·3	—3·9*	—1·38
1841	0·4	—4·0	1·4	1·7	3·6	—0·8	—0·8	—0·5	1·0	2·5	1·0	3·5	0·75
1842	—3·6	—5·6	1·2	—1·9	0·9	—0·2	—0·3	2·7*	—0·1	—3·3	—1·3	2·3	—0·77
1843	2·3	5·2*	—1·3	—0·2	—1·4	—2·8	—0·9	0·0	—1·3	—0·9	0·0	3·9	0·22
1844	—0·3	—1·1	—1·5	0·6	0·0	0·5	—2·2	—2·2	0·3	1·1	2·7	—3·8	—0·49
1845	2·1	—1·0	—4·7*	0·7	—2·2	1·3	0·6	—1·8	—1·3	0·3	1·8	3·2	—0·34
1846	2·8	2·4	2·4	1·5	1·6	1·4	3·0	1·7	0·8	3·1*	—1·6	—1·3	1·48
1847	—2·1	—0·5	—1·1	—1·5	2·8	—3·1	—0·3	1·0	—2·1	—2·2	—1·1	0·8	—0·78
1848	—6·1	1·7	1·9	2·6	—0·2	1·7	—0·3	—0·5	—0·5	1·2	0·3	—0·2	0·13
1849	—1·1	3·4	—0·4	—1·3	0·4	0·9	—0·9	—2·2	—1·3	—0·7	—1·0	—1·4	—0·47
1850	—3·8	3·1	—2·3	0·7	0·5	0·2	—1·0	0·5	—2·1	—1·3	2·2	0·9	—0·20
1851	0·2	—0·1	1·3	1·1	—2·8	—0·7	—1·3	—0·6	—2·2	2·0	—2·0	0·5	—0·89
1852	2·5	2·0	—2·6	—3·1	0·5	0·5	1·5	0·4	—0·1	—1·9	3·5*	3·6	0·57
1853	2·5	—0·9	—3·1	—3·4	—0·2	—0·2	0·7	0·3	—0·3	0·5	—0·8	—4·2	—0·76
1854	0·5	—0·8	—0·2	—0·1	1·2	—1·3	0·0	—1·4	—0·8	—0·1	—1·4	3·5	—0·06

1855	−1·1	1·0	0·3	−1·6	−0·6	0·5	−0·1	0·6	−0·7	2·9	0·7	−5·4	−0·71
1856	1·7	2·3	−2·0	2·1	0·3	1·5	−2·2	1·3	−1·3	0·1	−2·9	−0·7	0·01
1857	0·0	−3·5	−0·6	0·5	−0·3	−0·1	1·8	1·8	0·9	8·0	−1·3	1·7	0·33
1858	−1·9	−7·5*	−1·3	−0·6	−1·1	2·2	−0·3*	−1·1	2·0	1·5	−4·1*	1·1	−0·93
1859	1·0	2·7	3·8	0·6	0·6	0·4	3·8*	2·4	−0·7	1·2	−0·5	−2·8	1·03
1860	2·9	−0·9	−1·2	−0·4	1·2	0·4	−2·5	−0·1	0·5	−1·3	−1·4	−0·7	−0·29
1861	−2·8	2·4	1·5	2·3	2·4	1·0	0·2	1·8	0·5	0·5	0·2	−1·3	−0·02
1862	−1·3	−0·6	3·0	3·0	1·7	−0·6	0·5	−0·9	1·2	1·5	0·3	−0·2	0·63
1863	4·8	2·8	2·8	−0·6	1·6	0·2	−0·2	2·3	1·3	2·0	1·5	2·6	1·76
1864	−5·1	−0·6	2·0	−3·0	−2·5	−0·1	−1·8	−2·6	−0·1	−1·6	−0·5	−3·2	−1·58*
1865	1·5	−5·1	−4·0	2·1	3·7	−2·1	2·5	−0·5	0·8	0·4	1·7	0·2	0·09
1866	2·6	3·4	1·2	2·3	−2·1	2·3*	−0·7	−2·0	1·9	−2·0	1·3	−0·3	0·65
1867	1·1	4·3	−0·7	0·7	−0·3	−0·3	1·0	1·1	1·2	−0·9	−1·0	−1·2	0·25
1868	0·1	3·5	0·8	−0·4	3·7	1·7	0·5	1·1	2·5	1·9	−0·3	4·2	1·61
1869	−0·6	4·8	−0·7	2·7	2·8	−2·2	1·6	−1·0	1·5	−2·4	1·1	1·7	0·77
1870	0·4	−5·6	−2·2	−0·8	1·6	−0·6	0·8	−1·5	−1·7	−0·8	2·3	−3·6	−0·97
1871	−2·6	−1·2	0·9	−0·3	−2·9	3·1	0·3	0·2	0·4	−2·6	−0·9	−6·2	−1·51
1872	0·2	0·3	2·6	2·4	2·4	−1·1	0·4	−1·4	1·0	2·5	2·4	3·8	1·29
1873	3·0	0·1	3·2	−0·5	−3·0	−1·0	1·6	2·1	−1·1	1·9	1·8	1·6	0·81
1874	2·0	0·0	0·3	1·9	−3·3*	0·0	2·4	−1·2	2·2	0·3	−2·4	−0·6	0·08
1875	1·5	−4·9	−3·8	−0·9	1·0	2·1	−0·1	1·1	−0·9	−2·3	−0·6	−1·5	−0·77
1876	−3·0	−0·6	1·9	2·4	−3·3*	0·2	0·0	0·7	−0·9	0·6	−3·3	2·3	−0·29
1877	3·1	2·5	0·0	−1·5	−2·4	1·5	−0·5	2·0	−2·5*	−2·0	1·2	0·2	0·13
1878	0·2	2·7	0·8	0·9	0·2	−0·6	−1·3	−0·1	1·1	1·0	0·5	−1·6	0·31
1879	−0·3	1·4	−0·3	−0·7	−2·0	0·3	−2·6	0·6	0·9	−1·3	−2·6	−7·1	−1·15
1880	−0·5	−1·6	−0·1	2·0	−1·7	−0·9	1·1	−1·7	0·2	−0·3	1·6	4·1	0·19
1881	−3·0	−0·8	0·3	−2·8	−0·9	−1·1	1·2	0·3	−1·9	−3·5*	−0·6	1·0	−0·99
1882	2·3	1·8	5·2	0·1	0·5	−2·2	−0·2	−2·4	0·1	0·4	1·4	1·9	0·74
1883	0·0	1·4	−3·6	−2·3	0·4	−0·2	−0·6	−0·5	−0·2	−0·1	0·3	1·3	−0·34
1884	4·1	1·5	1·6	−1·9	0·8	−3·4*	0·4	−1·0	0·0	−0·9	−1·4	2·2	0·16

Über den täglichen und jährlichen Gang sowie über die Störungsperioden der magnetischen Declination zu Wien.

Von **J. Liznar.**

(Mit 3 Tafeln.)

Die k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus ist seit dem Jahre 1874 im Besitze eines Kew-Magnetographen, der bekanntlich die Änderungen der erdmagnetischen Elemente auf photographischem Wege registrirt. Obwohl dieser Apparat seit zehn Jahren functionirt, so besitzen wir doch nur sieben fast vollständige Jahrgänge der Declinationsaufzeichnungen, da in den ersten Jahren, besonders in den Sommermonaten, die photographischen Bilder sehr häufig ausblieben, wodurch das Zahlenmaterial so lückenhaft wurde, dass es bei der vorliegenden Bearbeitung ganz unberücksichtigt bleiben musste.

Bei der Reduction wurden die stündlichen Ordinaten mittelst eines in 0·5 Mm. getheilten Maassstabes gemessen und in Tabellen eingetragen, wie sie seit dem Jahre 1878 in den Jahrbüchern der k. k. Centralanstalt publicirt werden. Ich habe in den folgenden Berechnungen die Millimeter beibehalten, weil der Winkelwerth eines Mm. = 1·1 Minuten beträgt, wodurch die erhaltenen Zahlen nur wenig geändert werden.

Aus diesem siebenjährigen Beobachtungsmaterial habe ich abgeleitet:

1. den täglichen Gang,
2. den jährlichen Gang,
3. die tägliche und jährliche Störungsperiode, und
4. die einer Sonnenrotation entsprechende Periode der Störungen und hieraus die Dauer der Sonnenrotation.

I. Der tägliche Gang der Declination.

In einer früheren Abhandlung[1] habe ich durch die den Stunden 14, 18, 22, 2, 6 und 10 entsprechenden Mittel der Beobachtungsreihe 1852—71 den täglichen Gang der Declination darzustellen versucht. Aber erst durch stündliche Aufzeichnungen wird die tägliche Periode zur vollständigen Anschauung gebracht. Ich habe zu diesem Zwecke die Differenzen der einzelnen Stundenmittel gegen die Monatmittel gebildet und dann die Zahlen, welche denselben Monaten in den verschiedenen Jahren entsprechen, zu einem Mittel vereinigt. Diese Mittel sind in Tabelle I eingetragen. Man ersieht aus diesen Zahlen, dass die Declination in den Sommermonaten nur ein Maximum und ein Minimum zeigt, während in den Wintermonaten noch ein zweites Maximum und Minimum ganz deutlich hervortritt. Das Maximum tritt im Sommer später ein als im Winter; das Minimum des Sommers fällt auf die Morgenstunden, während der Winter das tiefere Minimum vor Mitternacht aufweist. Man ersieht auch auf den ersten Blick, dass die tägliche Amplitude der Sommermonate viel grösser ist als jene des Winters.

Um wenigstens annähernd die Eintrittszeiten der Maxima und Minima zu bestimmen, habe ich die Zahlen der Tabelle I auf ein Millimeterpapier eingetragen und für jeden Monat die Curve eingezeichnet, aus welchen sich folgende Eintrittszeiten abmessen liessen.

	I Nachmittags-maximum	II Morgen-minimum	III Morgen-maximum	IV Abend-minimum	Differenz I—II
Jänner . . .	1·1^h	8·3	4·0	10·3	4·8
Februar . .	1·6	8·8	4·5	10·4	4·8
März	1·4	8·7	4·3	10·4	4·7
April	1·4	8·3	—	—	5·1
Mai	1·4	7·5	—	—	5·9
Juni	1·7	7·0	—	—	6·7

[1] Über die magnetische Declination und Inclination zu Wien. Sitzb. der kais. Akad. Bd. 77.

	I Nachmittags-maximum	II Morgen-minimum	III Morgen-maximum	IV Abend-minimum	Differenz I—II
Juli	1·8	7·2	—	—	6·6
August..	1·5	7·5	—	—	6·0
September	1·0	8·0	—	—	5·0
October ..	1·0	8·5	4·9	9·7	4·5
November	1·0	8·8	5·5	11·0	4·2
December	1·8	9·9	7·0	11·0	3·9

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, dass im Sommer das Nachmittagsmaximum später, das Morgenminimum aber früher als im Winter eintritt, so dass der Unterschied zwischen den Eintrittszeiten im Sommer um drei Stunden grösser ist als im Winter, wie dies aus der letzten Columne deutlich hervorgeht. Das kleinere Maximum am Morgen tritt um 4^h—7^h, das Abendminimum zwischen 10^h—11^h auf. Das Auftreten dieser beiden ist auf das Winterhalbjahr beschränkt, die Sommermonate zeigen nur kleine Unregelmässigkeiten in der während der Nacht flach verlaufenden Curve.

Aus den Daten der Tabelle I habe ich für die Stundencombination $^1/_3(7, 2, 9)$, $^1/_3(6, 2, 10)$ und $^1/_4(7, 2, 2\times9)$ folgende Correctionen abgeleitet:

	$^1/_3(7+2+9)$	$^1/_3(6+2+10)$	$^1/_4(7+2+2\times9)$
Jänner	—0·20	—0·16	+0·10
Februar	—0·50	—0·36	—0·08
März	—0·68	—0·82	—0·27
April	—0·81	—0·86	—0·27
Mai	—0·30	—0·40	—0·08
Juni	—0·19	—0·31	0·00
Juli	—0·39	—0·37	—0·25
August.....	—0·31	—0·51	—0·09
September.....	—0·27	—0·53	+0·07
October	—0·31	—0·51	+0·12
November	—0·24	—0·29	+0·17
December	—0·17	—0·04	+0·18
Jahr.....	—0·32	—0·43	—0·02

Täglicher Gang der Declination.

Differenzen gegen das Monatmittel in Millimetern.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
1h a. m.	—0·82	—0·91	—0·98	—1·16	—0·87	—0·84	—1·01	—1·42	—1·08	—1·00	—0·96	—1·00
2	—0·56	—0·58	—0·99	—1·10	—1·06	—1·10	—1·37	—1·11	—1·21	—0·85	—0·66	—0·68
3	—0·18	—0·39	—0·78	—1·07	—1·14	—1·19	—1·38	—1·41	—1 14	—0·77	—0·43	—0·26
4	—0·02	—0·31	—0·74	—1·09	—1·52	—1·63	—1·76	—1·42	—1·24	—0·62	—0·09	0·01
5	—0·12	—0·33	—0·79	—1·20	—2·28	—2·81	—2·59	—1·97	—1·18	—0·54	0·04	0·02
6	—0·23	—0·53	—0·75	—1·72	—2·87	—3·62	—3·28	—2·47	—1·60	—0·72	0·04	0·14
7	—0·36	—0·63	—1·38	—2·77	—3·34	—3·98	—3 45	—3 12	—2·43	—1.42	—0·17	0·08
8	—0·69	—1·20	—2·38	—3·77	—3·31	—3·66	—3·33	—3·11	—2·81	—2·29	—0·88	—0·09
9	—0·47	—1·51	—2·72	—3·28	—2·38	—2·59	—2·32	—2·18	—2·06	—2·17	—1·14	—0·25
10	0·09	—0·71	—1·33	—1·32	—0·33	—0·39	—0·17	—0·29	—0·23	—0·27	—0·20	0·27
11	0·90	0·81	1·00	1·45	2 04	2·04	1·76	1·82	2·25	2·05	1·34	1·05
12	1·78	2·14	3·29	4·15	4·01	3·88	3·66	3·99	4·25	3·74	2·30	1·75
1h p. m.	2·46	2·86	4·42	5·63	5·00	4·98	4·67	5·00	4·79	4·22	3·00	2·10
2	1·99	2·93	4·38	5·29	4·84	5·11	4·87	4·82	4·25	3·75	2·27	1 66
3	1·10	2·07	3·33	3·91	3·68	4·33	3·92	3·97	2·85	2·34	1·53	1·02
4	0·54	1·10	1·62	2·26	2·41	2·97	2·49	2·39	1·45	1·16	0·85	0·64
5	0·37	0·44	0·38	0·89	0·77	1·46	1·22	0·77	0·33	0·52	0·13	0·39
6	0·12	0·16	—0·06	—0·05	0·07	0·34	0·44	—0·03	—0·03	—0·05	—0·02	—0·16
7	—0·13	—0·17	—0·50	—0·50	—0·50	—0·25	0·08	—0·33	—0·20	—0·35	—0·42	—0·51
8	—0·73	—0·48	—0·76	—0·74	—0 52	—0·45	—0·09	—0·45	—0·66	—1·18	—1·10	—0·95
9	—1·02	—0·80	—0·96	—0·72	—0·59	—0·57	—0·26	—0·67	—1·01	—1·40	—1·39	—1·23
10	—1·27	—1·33	—1·17	—0·98	—0·78	—0·56	—0·47	—0·83	—1·07	—1·49	—1·43	—1·67
11	—1·18	—1·35	—1·17	1·14	—0·81	—0·67	—0·64	—1·06	—1·09	—1·19	—1·48	—1·47
12	—1·09	—1·16	—1·16	—0·91	—0·90	—0·69	—0·87	—1·03	—1·08	—1·25	—1·31	—1·13

Hiebei muss ich bemerken, dass diese Zahlen mit 1·1 zu multipliciren sind, um die Correction in Minuten zu erhalten. Die Stundencombination $^1/_8(7+2+2\times 9)$ ist also zur Herleitung des wahren 24stündigen Mittels am besten, nur im December wäre die Combination $^1/_3(6+2+10)$ vorzuziehen.

Da die Beobachtungsreihe noch zu kurz ist, um für jeden Monat den täglichen Gang rein hervortreten zu lassen, habe ich je drei Monate zu einem Mittel vereinigt (Tabelle II) und diese Zahlen als der betreffenden Jahreszeit entsprechend in Tafel I eingetragen, wodurch sich die Curven *WW*, *HH*, *FF*, *SS* und *JJ* ergaben. Diese Curven stellen den jährlichen Gang im Winter, respective Herbst, Frühjahr, Sommer und Jahr dar. In der Tabelle II sind auch die Differenzen des täglichen Ganges, wie er sich im Jahresmittel ergibt, gegen die extremen Monate Juni und December gegeben, welche Differenzen man bekanntlich die halbjährige Ungleichheit des täglichen Ganges nennt.

Tabelle II.

Täglicher Gang der Declination.

	Winter	Frühl.	Sommer	Herbst	Jahr	Jährliche Ungleichheit	
						Juni	Dec.
1h a. m.	—0·91	—1·00	—1·09	—1·01	—1·00	0·16	0·00
2	—0·61	—1·05	—1·19	—0·91	—0·94	—0·16	0·26
3	—0·28	—1·00	—1·33	—0·78	—0·85	—0·34	0·59
4	—0·11	—1·12	—1·60	—0·69	—0·87	—0·76	0·88
5	—0·14	—1·42	—2·46	—0·56	—1·15	—1·66	1·17
6	—0·21	—1·78	—3·12	—0·76	—1·47	—2·15	1·61
7	—0·30	—2·83	—3·52	—1·34	—2·00	—1·98	2·08
8	—0·66	—3·15	—3·37	—1·99	—2·29	—1·37	2·38
9	—0·74	—2·79	—2·36	—1·79	—1·92	—0·67	2·17
10	—0·12	—0 99	—0·28	—0·23	—0·41	0·02	0·68
11	0·92	1·50	1·87	1·88	1·54	0·50	—0·49
12	1·89	3·82	3·84	3·43	3·25	0·63	—1·50
1h p. m.	2·47	5 02	4·88	4·00	4·09	0·89	—1·99
2	2·19	4·84	4·93	3·42	3·85	1·26	—2·19
3	1·40	3·64	4·07	2·24	2·78	1·55	—1·76
4	0·76	2·30	2·62	1·15	1·71	1·26	—1·07
5	0·40	0·68	1·15	0·33	0 64	0·82	—0·25
6	0·04	—0·02	0·25	—0·03	0·06	0·28	—0·22
7	—0·34	—0·50	—0·17	—0·32	—0·33	0·08	—0·18
8	—0·72	—0·67	—0·33	—0·98	—0·68	0·23	—0·27
9	—1·02	—0·76	—0·50	—1·27	—0·89	0·32	—0·34
10	—1·42	—0·98	—0·62	—1·33	—1·09	0·53	—0·58
11	—1·33	—1·04	—0·79	—1·25	—1·10	0·43	—0·37
12	—1·13	—0·99	—0·86	—1·21	—1·05	0·36	—0·08

Um zu sehen, wie sich die tägliche Amplitude im Laufe des Jahres ändert, habe ich die mittlere Ordinate eines jeden Monates gerechnet und diese als Maass der täglichen Schwankung betrachtet, wodurch sich die nachfolgende Tabelle III ergab.

Aus dem unten angeführten Mittel ersieht man, dass die tägliche Schwankung ihr Maximum zur Zeit des Sommersolstitiums erreicht, während das Minimum auf das Wintersolstitium fällt. In der früher citirten Abhandlung bin ich zu einem andern Resultat gelangt, da ich als Mass der täglichen Amplitude die Differenz

Tabelle III.

Tägliche Amplitude.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
1878	0·48	0·79	1·17	1·69	1·61	1·93	(1·76)	(1·59)	1·42	0·99	0·60	0·66	1·22
1879	0·67	0·75	1·27	1·46	1·71	1·78	1·61	1·73	1·40	1·15	0·70	0·64	1·24
1880	0·55	0·86	1·28	1·80	1·72	1·86	1·86	1·94	1·79	1·64	1·06	0·79	1·43
1881	0·86	1·23	1·73	1·95	1·92	2·36	2·09	(2·00)	(1·84)	1·69	1·05	1·08	1·65
1882	0·99	1·15	1·69	2·24	2·62	2·09	1·95	2·05	1·91	1·57	1·53	0·82	1·72
1883	1·02	1·24	1·77	2·30	2·04	2·26	2·37	2·00	1·96	1·82	1·29	0·86	1·74
1884	1·04	1·44	2·01	2·45	2·02	2·44	2·02	2·02	1·94	1·66	1·09	0·85	1·75
Mittel	0·80	1·07	1·56	1·99	1·95	2·10	1·95	1·90	1·75	1·50	1·05	0·81	1·55

2^h—18^h nehmen musste. Nachdem aber die Eintrittszeiten der Maxima und Minima nicht constant sind, so kann die aus der Differenz der bezeichneten zwei Stunden abgeleitete Amplitude in Folge dieses Umstandes bedeutend geändert werden. Aus den Mittelwerthen der letzten Verticalcolumne tritt die Zunahme der täglichen Amplitude von 1878 bis 1884 deutlich hervor, welche Änderung bekanntlich mit derjenigen der Sonnenflecken-Relativzahlen parallel verlauft.

Die Zunahme der Amplitude erfolgt im Sommer- und Winterhalbjahr gleichmässig, so dass die Differenz eine constante ist. Es betrug die mittlere Amplitude:

Jahr	im Winterhalbjahr	im Sommerhalbjahr	Differenz
1878	0·78	1·67	0·89
79	0·86	1·62	0·76
80	1·03	1·71	0·68
81	1·27	2·03	0·76
82	1·29	2·14	0·85
83	1·33	2·16	0·83
84	1·35	2·15	0·80

Die Curve *AA* der Tafel II stellt den jährlichen Gang der täglichen Amplitude vor; die Curve ist bis auf eine kleine Einbiegung im Mai ziemlich regelmässig,

II. Jährlicher Gang der Declination.

Zur Ableitung des jährlichen Ganges habe ich die in meiner früheren Arbeit abgeleiteten Monatmittel der Periode 1853—71 und jene der Jahre 1874—83 verwendet. Die Monatmittel der letzteren Reihe enthält die nachfolgende Tabelle IV, wobei bemerkt werden muss, dass die negativen Zahlen von 10° abgezogen werden müssen.

Da diese Monatmittel aus $^1/_3(7+2+9)$ gebildet worden sind so müssen an die in der letzten Horizontalreihe stehenden Mittel, die früher für diese Stundencombination abgeleiteten Correctionen angebracht werden.

Monatmittel der Declination Wien.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
1874	10°38'8	38'2	38'2	37'1	36'8	35'6	37'3	36'4	34'5	32'3	32'2	31'7	35'8
1875	32·7	33·3	32·8	31·9	30·6	31·1	28·8	28·2	28·0	26·5	28·4	26·7	29·9
1876	25·7	25·9	25·5	27·7	25·2	25·5	25·3	24·5	23·6	22·0	22·4	21·0	24·5
1877	18·6	18·2	18·5	17·5	18·6	18·3	18·6	17·9	17·3	15·9	15·1	14·6	17·4
1878	15·3	15·2	15·0	14·6	13·0	11·5	11·8	10·5	10·6	10·5	9·4	9·2	12·2
1879	8·7	7·2	7·1	6·2	5·1	4·6	4·4	4·1	3·1	2·6	2·5	2·4	4·8
1880	2·8	3·0	1·6	0·9	— 0·2	— 1·6	— 2·9	— 3·0	— 3·3	— 3·0	— 3·4	— 3·2	— 1·0
1881	— 2·7	— 3·5	— 3·3	— 3·7	— 4·7	— 5·2	— 5·6	— 5·6	— 6·8	— 7·3	— 8·9	— 9·9	— 5·5
1882	— 9·7	— 9·5	— 9·4	— 9·5	— 9·3	— 9·6	— 9·5	—10·1	—11·1	—12·5	—13·2	—11·1	—10·6
1883	—15·9	—15·9	—15·5	—16·6	—17.8	—18·2	—18·4	—18·8	—19·1	—20·1	—20·7	—21·4	—18·2
Mittel	10 11·43	11·21	11·05	10·61	9·73	9·20	8·98	8·41	7·68	6·69	6·38	5·70	8·93

Die Correctionen betragen in Minuten:

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
—0·22	—0·55	—0·74	—0·89	—0·33	—0·20	—0·42	—0·34	—0·29	—0·34	—0·26	—0·18

Die corrigirten Mittel sind demnach:

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
10°	11·21	10·66	10·31	9·72	9·40	9·00	8·56	8·07	7·39	6·32	6·12	5·52

Die mittlere jährliche Abnahme beträgt 6·00 Minuten. Wenn man daher mittelst dieser Zahl aus den vorstehenden Monatwerthen die seculäre Änderung eliminirt, so erhält man:

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
10°	11·21	11·16	11·31	11·22	11·40	11·50
	— 0·06	— 0·11	0·04	— 0·05	0·13	0·23

	Juli	August	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
10°	11·56	11·57	11·39	10·82	11·12	11·02
	0·29	0·30	0·12	— 0·45	— 0·15	— 0·25

wobei die letzte Reihe Differenzen der einzelnen Monatmittel gegen das Jahresmittel vorstellt.

Nach den Daten der neueren Reihe würde also die Declination im Sommer mehr westlich, im Winter dagegen mehr östlich sein, welches Resultat mit jenem aus den Beobachtungen anderer Stationen abgeleiteten übereinstimmt. Die Amplitude der jährlichen Bewegung ist übrigens sehr gering, denn sie beträgt nur einige Zehntel einer Minute.

Will man den jährlichen Gang der Declination ableiten, so muss man entweder 24stündige Mittel zur Verfügung haben oder aber im Stande sein, die aus einer Stundencombination abgeleiteten auf 24stündige reduciren zu können. Dass dieser Umstand für die Ableitung des jährlichen Ganges von grossem Belang sein kann, habe ich erfahren, als ich die in Tabelle IV berechneten Mittel der letzten Reihe von der secularen Änderung befreit und die Differenz der so erhaltenen Zahlen gegen das Jahresmittel gebildet hatte, wodurch ich den nachfolgenden Gang erhielt:

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
—0·24	0·14	0·38	0·44	0·06	0·03

Juli	August	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
0·31	0·24	0·01	—0·48	—0·29	—0·47

der mit jenem der älteren Reihe gut übereinstimmte, dafür aber von dem Gange, wie er sich für andere europäischen Stationen ergab, sehr abwich.

Ich dachte nun auch aus den Monatmitteln der älteren Reihe 1853—71 nach Anbringung der Correction, welche der Stunden-

combination $^1/_4(6^h$ a. m. + 10 p. m.) + $^1/_6(10^h$ a. m. + 2^h p. m. + + 6^h p. m.) zukommt, den jährlichen Gang richtiger zu erhalten, erhielt aber ein Resultat, das trotzdem von jenem der neueren Reihe abwich. Die Ursache der Verschiedenheit des Ganges der älteren Reihe liegt eben nicht darin, dass die Correctionen bei der früheren Ableitung vernachlässigt worden sind, denn diese sind nur sehr klein. Nach dem, was ich über den Localeinfluss in dem alten Beobachtungslocale der k. k. Centralanstalt in einer früheren Arbeit ausgeführt habe, muss das Resultat der neueren Beobachtungen entschieden vorgezogen werden.

Der jährliche Gang, wie er sich nach Anbringung der Correctionen aus der älteren Reihe 1853—71 ergibt, ist durch folgende Zahlen dargestellt:

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
0·25	0·42	0·45	—0·37	0·07	—0·71
Juli	**August**	**Sept.**	**Oct.**	**Nov.**	**Dec.**
—0·26	—0·44	0·31	0·62	—0·58	0·27

III. Die tägliche und jährliche Periode der Störungen.

Die Störungen treten nicht zu allen Zeiten gleichmässig vertheilt auf, sondern haben eine tägliche und jährliche Periode, und treten ausserdem zur Zeit der Sonnenfleckenmaxima intensiver auf als zur Zeit der Minima.

Alle diese Perioden sind von Sabine, Broun u. A. schon vor einigen Decennien abgeleitet worden, und es kann daher meine Aufgabe nur darin bestehen, zu zeigen, dass sich diese Perioden in unseren siebenjährigen Beobachtungen wiederfinden.

Ich habe bei der Berechnung der Störungen eine Methode angewendet, die bereits Broun[1] befolgt hatte. Es wurde nämlich von jeder Stundenordinate der Mittelwerth der entsprechenden Stunde abgezogen und in eine eigene Tabelle eingetragen. Auf diese Weise erhielt ich ebensoviele Differenzen-

[1] Observations of magnetic Declination made at Trevandrum and Augustia Malley in the observatories of Hiss Highness the Maharajah of Trevancore in the years 1852 to 1869. Trevandrum magnetical observations, Vol. I.

tabellen, als Monate in Rechnung gebracht wurden. Ich habe also nichts anderes gethan, als den mittleren täglichen Gang eines jeden Monats von dem Gange eines jeden Tages abgezogen; jede solche Abweichung habe ich als Störung betrachtet. Nachdem die einzelnen Differenzen mit ihrem Zeichen in die Tabellen eingetragen worden sind, habe ich die Summen der positiven und der negativen Abweichungen sowie ihre Anzahl gesucht, und auf diese Weise die westlichen und östlichen Störungen getrennt. Die Summen der positiven und negativen Abweichungen geben den Gang der Störungen ohne Rücksicht auf die Richtung. Indem ich die positiven und negativen sowie die Summen der Differenzen ohne Rücksicht auf das Zeichen, welche in den einzelnen Jahren dem gleichen Monat entsprachen, nochmals summirte und durch die entsprechende Anzahl dividirte, erhielt ich den mittleren täglichen Gang der westlichen, östlichen und der Störungen ohne Rücksicht auf die Richtung. Diese Mittelwerthe sind in den Tabellen V, VI und VII eingetragen.

Aus der Tabelle V ersieht man, dass die westlichen Störungen um die Zeit der oberen Culmination der Sonne am intensivsten sind; am stärksten ist ihre Periode in den Sommermonaten ausgeprägt. Die Zahlen der Tabelle VI sagen aus, dass die östlichen Störungen zwei Maxima haben, und zwar zur Zeit der Culmination der Sonne. Auch bei diesen macht sich ein Unterschied zwischen den Sommer- und Wintermonaten geltend, der darin besteht, dass im Sommer das Maximum zur Zeit der oberen, im Winter jenes zur Zeit der unteren Culmination das Hauptmaximum ist.

Selbstverständlich muss die Curve der Störungen ohne Rücksicht auf die Richtung, weil durch Vereinigung der beiden früheren entstanden, auch ein doppeltes Maximum aufweisen, wie dies Tabelle VII zeigt. Noch besser ist das eben Gesagte aus den Tabellen VIII und IX ersichtlich, wo je drei Monate zu einem Mittel vereinigt sind und zwar (vielleicht nicht ganz passend) den meteorologischen Jahreszeiten entsprechend. Die graphische Darstellung der letzterwähnten Mittelwerthe ist auf Tafel II gegeben, und zwar stellt die Curve *OO* den Gang der östlichen, jene *WW* der westlichen und *SS* den der Störungen überhaupt dar. Die Zeit der geringsten Störung fällt im Jahresmittel

Tabelle V.

Mittlere negative Abweichungen der Declination

(entsprechend einer Zunahme der Declination).

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
1h a. m.	0·84	0·73	0·82	0·78	0·67	0·67	0·75	0·78	0·71	0·55	0·79	0·80
2	0·63	0·64	0·86	0·80	0·63	0·71	0·78	0·84	0·77	0·62	0·79	0·65
3	0·64	0·77	0·77	0·70	0·71	0·68	0·71	0·71	0·76	0·48	0·78	0·64
4	0·61	0·77	0·69	0·72	0·77	0·82	0 77	0·85	0·75	0·52	0·62	0·58
5	0·51	0·57	0·68	0·89	0·82	0·88	0·99	0·84	0·86	0·68	0·95	0·64
6	0·54	0·60	0·77	0·89	0·79	0·93	1·33	1·27	0·91	0·65	1·33	0·61
7	0·56	0·63	0·87	1·00	0·84	0·90	1·09	0·97	1·07	0·84	1·46	0·70
8	0·51	0·84	1·04	0·90	0·86	0·96	1·01	1·02	1·11	1·11	0·79	0·66
9	0 65	1·00	1·10	1·02	1·00	1·02	1·11	0·97	1 17	1·21	0·88	0·70
10	0·74	0·79	1·13	1·03	1·06	1·07	1·18	1·03	1·10	1·21	0·79	0·67
11	0·67	0·74	1·05	1·02	1·03	1·14	1·11	1·27	1·19	1·07	0·76	0·66
12	0·70	0·78	1·13	0·90	0·99	1·14	1·21	1·57	1·12	0·97	1·00	0·62
1h p. m.	0·82	0·85	1·14	0·89	0·98	1·11	1·32	1·41	0·99	0·97	1·13	0·66
2	0·85	0·71	1·13	1·17	1·11	1·00	1·21	1·47	1·05	0·94	0·92	0·69
3	0·80	0·75	1·02	1·33	1·05	0·94	1·13	1·53	0·99	0·95	1·11	0·75
4	0·77	0·76	0·86	1·27	0·85	1·08	1·15	1·33	0·99	0·80	0·94	0·86
5	0·61	0·73	0·81	0·98	0·74	0·79	1·02	1·05	0·82	0·62	0·98	0·69
6	0·63	0·78	0·78	0·77	0·61	0·82	0·91	0·90	0·69	0·69	0·83	0·75
7	0·56	0·78	0·81	0·76	0·59	0·64	0·67	0·68	0·70	0·62	1·01	0·68
8	0·71	0·61	0·73	0·80	0·64	0·63	0·61	0·66	0·70	0·90	0·94	0·69
9	0·72	0 67	0·78	0·64	0·51	0·71	0·59	0·65	0·83	0·94	0·90	0·68
10	0·70	0·71	0·89	0·66	0·67	0·72	0·57	0·65	0·82	0·84	0·81	0·82
11	0·68	0·81	0·83	0·86	0·63	0·62	0·60	0·65	0·77	0·73	0·76	0·79
12	0·73	0·80	0·89	0·71	0·62	0·67	0·65	0·67	0·76	0·73	0·86	0·66

Tabelle VI.

Mittlere positive Abweichungen der Declination

(entsprechend einer Abnahme der Declination).

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
1h a. m.	1·05	1·27	1·54	1·74	0·64	0·76	1·08	1·49	1·19	1·02	1·57	1·28
2	0·97	0·96	1·29	1·27	0·77	0·92	1·19	0·94	1·41	0·93	1·26	1·04
3	0·84	0·93	1·20	1·09	0·86	0·79	0·87	1·11	1·01	0·87	1·29	0·88
4	0·77	0·83	0·93	0·81	0·73	0·73	0·81	0·68	0·92	0·77	0·83	0·63
5	0·74	0·60	0·92	0·97	0·82	0·75	0·91	0·78	0·90	0·59	0·65	0·69
6	0·57	0·56	0·65	0·94	0·76	0·83	1·00	0·82	0·79	0·58	0·78	0·43
7	0·47	0·55	0·80	0·84	0·77	0·88	0·96	0·88	0·85	0·79	0·68	0·46
8	0·49	0·68	1·01	0·71	0·81	0·87	0·94	0·79	0·89	0·89	0·67	0·49
9	0·64	0·91	0·97	0·84	0·89	1·00	1·02	0·86	0·98	0·85	0·71	0·51
10	0·73	0·83	1·03	0·86	1·13	1·02	1·08	0·99	1·07	0·88	0·72	0·58
11	0·61	0·73	1·13	1·02	1·05	1·13	1·19	1·19	1·08	0·83	0·67	0·64
12	0·66	0·74	1·07	0·96	0·90	1·12	1·23	1·31	1·07	0·91	0·86	0·54
1h p. m.	0·66	0·73	1·09	0·94	0·83	0·93	1·32	1·14	1·02	0·85	0·85	0·55
2	0·66	0·72	0·94	1·04	0·89	0·89	1·16	1·17	0·99	0·87	0·77	0·65
3	0·60	0·67	0·81	1·01	0·93	0·92	1·02	1·09	0·99	0·82	0·73	0·55
4	0·64	0·61	0·86	0·82	0·76	0·86	0·94	0·97	0·91	0·67	0·73	0·63
5	0·73	0·82	0·93	0·65	0·70	0·69	0·80	0·86	0·92	0·91	1·49	0·64
6	0·52	1·10	1·13	0·83	0·63	0·73	0·76	0·77	1·03	1·15	1·22	0·95
7	0·67	1·10	1·55	1·06	0·78	0·74	0·73	0·81	0·86	1·23	1·18	1·10
8	1·21	1·09	1·41	1·09	0·93	0·83	0·86	0·97	1·13	2·34	1·79	1·31
9	1·06	1·23	1·38	0·85	0·92	0·92	0·80	0·81	1·63	2·04	1·76	1·30
10	1·19	1·48	2·39	1·55	1·48	0·90	0·88	1·23	1·28	2·05	1·43	1·88
11	0·90	1·51	2·03	2·17	1·04	0·97	0·94	1·37	1·15	1·50	1·65	1·66
12	1·03	1·25	1·94	1·41	1·04	0·72	1·05	1·02	1·61	1·45	2·00	1·29

Mittlere Abweichungen der Declination ohne Rücksicht auf das Zeichen.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
1h a. m.	0·93	0·94	1·07	1·08	0·67	0·72	0·89	1·03	0·89	0·72	1·05	0·98
2	0·76	0·77	1·03	0·99	0·63	0·80	0·95	0·89	1·00	0·73	0·97	0·80
3	0·73	0·85	0·94	0·85	0·71	0·73	0·79	0·85	0·87	0·68	1·00	0·74
4	0·68	0·79	0·79	0·76	0·77	0·77	0·79	0·75	0·83	0·62	0·71	0·61
5	0·62	0·59	0·78	0·94	0·82	0·81	0·95	0·81	0·87	0·63	0·77	0·62
6	0·55	0·58	0·74	0·91	0·79	0·88	1·14	1·00	0·85	0·62	0·99	0·51
7	0·51	0·58	0·83	0·92	0·84	0·89	1·02	0·93	0·95	0·81	0·93	0·56
8	0·50	0·75	1·02	0·79	0·86	0·92	0·98	0·89	0·98	0·98	0·72	0·56
9	0·64	0·95	1·02	0·92	1·00	1·01	1·06	0·91	1·07	1·00	0·78	0·59
10	0·73	0·81	1·07	0·94	1·06	1·05	1·13	1·01	1·09	1·01	0·75	0·62
11	0·64	0·74	1·09	0·97	1·03	1·14	1·14	1·23	1·13	0·96	0·71	0·60
12	0·73	0·76	1·10	0·93	0·99	1·13	1·22	1·42	1·10	0·94	0·93	0·58
1h p. m.	0·73	0·79	1·07	0·96	0·98	1·01	1·32	1·26	1·00	0·91	0·97	0·60
2	0·75	0·72	1·02	1·10	1·11	0·94	1·18	1·31	1·02	0·91	0·84	0·67
3	0·69	0·71	0·90	1·15	1·05	0·93	1·07	0.28	0·99	0·88	0·88	0·63
4	0·70	0·68	0·86	1·00	0·85	0·96	1·03	1·13	0·95	0·73	0·82	0·72
5	0·61	0·77	0·86	0·80	0·74	0·74	0·89	0·95	0·87	0·74	1·18	0·66
6	0·57	0·91	0·93	0·80	0·61	0·77	0·83	0·83	0·82	0·86	0·99	0·84
7	0·61	0·91	1·06	0·88	0·59	0·69	0·70	0·74	0·77	0·82	1·09	0·84
8	0·89	0·79	0·96	0·92	0·64	0·71	0·71	0·79	0·86	1·30	1·24	0·90
9	0·84	0·87	1·00	0·73	0·51	0·80	0·68	0·71	1·11	1·29	1·19	0·89
10	0·83	0·97	1·30	0·93	0·67	0·80	0·69	0·85	1·00	1·19	1·04	1·15
11	0·77	1·05	1·18	1·24	0·63	0·75	0·74	0·88	0·92	0·98	1·04	1·08
12	0·86	0·98	1·22	0·94	0·62	0·69	0·80	0·81	1·03	0·97	1·20	1·87

Tabelle VIII.

	Positive Abweichungen (Östliche Störungen)					Negative Abweichungen (Westliche Störungen)				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1h a. m.	1·20	1·31	1·11	1·26	1·22	0·79	0·76	0·73	0·68	0·74
2	0·99	1·11	1·02	1·20	1·08	0·64	0·76	0·78	0·73	0·73
3	0·88	1·05	0·92	1·06	0·98	0·68	0·73	0·70	0·67	0·70
4	0·74	0·82	0·74	0·84	0·79	0·65	0·73	0·81	0·66	0·71
5	0·68	0·90	0·81	0·71	0·78	0·57	0·80	0·90	0·83	0·80
6	0·52	0·78	0·88	0·72	0·73	0·58	0·82	1·17	0·96	0·93
7	0·49	0·80	0·91	0·77	0·74	0·63	0·90	0·99	1·12	0·91
8	0·55	0·84	0·87	0·82	0·77	0·67	0·93	1·00	1·00	0·90
9	0·69	0·90	0·96	0·85	0·85	0·78	1·04	1·03	1·09	0·98
10	0·71	1·01	1·03	0·89	0·91	0·73	1·07	1·09	1·03	0·98
11	0·66	1·07	1·17	0·88	0·95	0·69	1·03	1·17	1·01	0·98
12	0·65	0·98	1·22	0·95	0·95	0·70	1·01	1·31	1·03	1·01
1h p. m.	0·65	0·95	1·13	0·91	0·91	0·78	1·00	1·28	1·03	1·02
2	0·68	0·96	1·07	0·88	0·90	0·75	1·14	1·23	0·97	1·02
3	0·61	0·92	1·01	0·85	0·85	0·77	1·13	1·20	1·02	1·03
4	0·63	0·81	0·92	0·77	0·78	0·80	0·99	1·19	0·91	0·97
5	0·73	0·76	0·78	1·11	0·85	0·68	0·84	0·95	0·81	0·82
6	0·86	0·86	0·75	1·13	0·90	0·72	0·72	0·88	0·74	0·77
7	0·96	1·13	0·76	1·09	0·98	0·67	0·72	0 66	0·78	0·71
8	1·20	1·14	0 89	1·75	1·25	0·67	0·72	0·63	0·85	0·72
9	1·20	1·05	0·84	1·81	1·23	0·69	0·64	0·64	0·88	0·72
10	1·85	1·81	1·00	1·59	1·31	0·74	0·74	0·65	0 82	0·74
11	1·36	1·75	1·09	1·43	1·41	0·76	0·77	0·62	0·75	0·73
12	1·19	1·46	0·93	1·69	1·32	0·73	0·74	0·66	0·78	0·73

Tabelle IX.

Abweichungen ohne Rücksicht auf das Zeichen
(Störungen überhaupt.)

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1h a. m.	0·95	0·94	0·88	0·89	0·92
2	0·78	0·88	0·88	0·90	0·86
3	0·77	0·83	0·79	0·85	0·81
4	0·69	0·77	0·77	0·72	0·74
5	0·61	0·85	0·86	0·76	0·77
6	0·55	0·81	1·01	0·82	0·80
7	0·55	0·86	0·95	0·90	0·82
8	0·60	0·89	0·93	0·89	0·83
9	0·78	0·98	0·99	0·95	0·91
10	0·72	1·02	1·06	0·95	0·94
11	0·66	1·03	1·17	0·93	0·95
12	0·69	1·01	1·26	0·99	0·99
1h p. m.	0·71	1·00	1·20	0·96	0·97
2	0·71	1·08	1·14	0·92	0·96
3	0·68	1·03	1·09	0·92	0·93
4	0·70	0·90	1·04	0·83	0·87
5	0·68	0·80	0·86	0·93	0·82
6	0·77	0·78	0·81	0·89	0·81
7	0·79	0·84	0·71	0·89	0·81
8	0·86	0·84	0·74	1·13	0·89
9	0·87	0·75	0·73	1·20	0·89
10	0·98	0·97	0·78	1·08	0·95
11	0·97	1·02	0·79	0·98	0·94
12	0·90	0·93	0·77	1·07	0·92

auf 4h a. m. und 6h und 7h p. m. Der hier dargestellte Gang der Störungen stimmt mit dem von Kew nach Lloyd[1] fast vollständig überein.

Durch Summirung der Anzahl der östlichen und westlichen Störungen, welche den einzelnen Stunden in den gleichnamigen Monaten der auf einander folgenden Jahre entsprechen, und durch Substraction der betreffenden Monatmittel von den einzelnen

[1] Lloyd: Results of the Magnetic Observations at the Kew Observatory, from 1857 to 1862 inclusive. Transact. of the R. S. 1863.

Stundensummen ergibt sich der tägliche Gang der Häufigkeit, wie er für die westlichen Störungen in Tabelle X ersichtlich gemacht ist. Für die östlichen Störungen ist, wie aus der Art der Berechnung von selbst folgt, der Gang gerade umgekehrt; dort wo die Tabelle X die grössten negativen Abweichungen aufweist, treten die grössten positiven auf und umgekehrt.

Der jährliche Gang der Störungen ergibt sich aus den Tabellen V, VI und VII, indem man die 24stündigen Mittel bildet. Man erhält in dieser Weise:

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
Östlich.....	0·77	0·91	1·21	1·06	0·88	0·87
Westlich	0·67	0·74	0·90	0·90	0·80	0·86
Überhaupt...	0·70	0·76	0·99	0·94	0·80	0·86

	Juli	August	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
Östlich.....	0·98	1·00	1·07	1·08	1·10	0·86
Westlich	0·94	0·99	0·90	0·82	0·92	0·69
Überhaupt...	0·95	0·97	0·96	0·89	0·95	0·73

Der jährliche Gang der Störungen zeigt hienach ein doppeltes Maximum und Minimum, entsprechend ungefähr der Zeit der Äquinoctien und Solstitien. Die diesen Zahlen entsprechenden Curven findet man auf Tafel II unter $O_1 O_1$, $W_1 W_1$ und $S_1 S_1$ verzeichnet.

Die der Sonnenfleckenperiode entsprechende Änderung in der Störungsintensität ist aus den nachfolgenden Zahlen ersichtlich.

	1878	1879	1880	1881	1882	1883	1884
Östlich.....	0·64	0·70	0·81	1·07	1·26	1·09	0·97
Westlich ...	0·59	0·62	0·75	0·80	1·14	0·88	0·85
Überhaupt..	0·58	0·61	0·65	1·08	0·89	0·71	0·74

Man sieht die von Sabine zuerst erkannte Zunahme der Störungsintensität zur Zeit der Fleckenmaxima sehr deutlich hervortreten.

Negative Differenzen (westliche Störungen)

Differenzen gegen das 24stündige Mittel.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
1h a. m.	5	18	19	32	0	3	13	22	15	20	29	18	16
2	14	10	8	16	5	11	16	3	18	8	15	18	12
3	7	1	10	15	5	6	6	16	5	12	20	10	10
4	5	— 4	3	— 1	— 8	— 7	— 1	—11	2	9	10	— 1	8
5	12	— 5	3	— 3	— 5	— 9	— 7	— 4	— 5	—19	—25	—11	— 6
6	— 2	—10	—22	— 4	— 7	— 7	—16	—16	—13	—17	—32	—24	—14
7	—11	—14	—17	—16	— 9	— 3	— 9	— 6	—17	—14	—44	—26	—15
8	— 6	—17	—15	—19	— 8	— 6	— 6	—10	—16	—23	—14	—20	—13
9	— 5	—12	—20	—17	—11	— 2	— 7	— 5	—15	—29	—17	—21	—13
10	— 5	— 5	—18	—16	— 2	— 3	— 7	— 2	— 8	—29	—12	—12	—10
11	— 9	— 8	— 9	— 7	— 4	— 2	0	— 3	—11	— 21	—12	—15	— 8
12	— 7	—10	—16	— 4	—10	— 3	— 2	— 7	— 9	—15	—15	—12	— 9
1h p. m.	—14	—14	—20	—10	—13	—10	— 3	— 8	— 7	—19	—22	—14	—13
2	—15	— 7	—23	—13	—16	— 7	— 5	— 9	—10	—16	—15	— 8	—12
3	—17	—13	—25	—21	—11	— 4	— 8	—13	— 7	—21	—27	—20	—16
4	—12	—18	—13	—29	—11	—12	—12	—12	—11	—21	—19	—21	—16
5	3	— 2	— 6	—27	— 8	— 8	—14	— 8	— 2	9	16	—10	— 5
6	—13	8	6	— 3	— 3	— 7	—11	— 6	10	16	14	7	2
7	3	8	20	10	9	5	1	6	2	23	— 1	18	9
8	18	18	20	9	14	12	12	13	11	36	25	25	18
9	12	19	16	7	24	11	11	7	21	28	28	25	18
10	18	25	35		33	9	16	17	12	31	23	33	24
11	8	20	31		20	20	17	25	10	26	33	30	23
12	10	12	26		21	2	18	13	23	24	36	27	20

IV. Die einer Sonnenrotation entsprechende Periode der Störungen.

Durch die Arbeiten Broun's und Hornstein's[1] ist erwiesen, dass die erdmagnetischen Elemente eine der Rotationsdauer der Sonne entsprechende Periode von 26 Tagen zeigen. Die beiden genannten Forscher haben die absoluten Werthe der erdmagnetischen Elemente ihren Rechnungen zu Grunde gelegt; da aber die Störungen von der Stellung der Sonne und Beschaffenheit ihrer Oberfläche abhängige Perioden zeigen, so habe ich mir die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob die 26tägige Periode auch dieses Element zeigt.

Zu diesem Behufe wurden in den auf pag. 463 besprochenen Differenzen-Tafeln die den einzelnen Tagen entsprechenden positiven und negativen Differenzen gesondert summirt und durch ihre zugehörige Anzahl dividirt, wodurch man den mittleren Werth der östlichen respective westlichen Störungen für den betreffenden Tag erhielt. In dieser Weise sind für die Zeit vom 1. Juli 1882 bis 31. December 1883 die mittleren Werthe der Störungen in eigene Tabellen eingetragen worden. Um nun zu sehen, ob diese Zahlen eine 26tägige Periode zeigen, habe ich nach der von Hornstein auf pag. 67 seiner citirten Abhandlung angeführten Methode diese Zahlen in Gruppen von 24, 25, 26, 27 und 28 Tagen geordnet und in jeder Gruppe das Mittel der demselben Tage zugehörigen Zahlen gebildet. Diese Mittelwerthe sind in Tabelle XI eingetragen. Indem ich weiter nach dem Vorgange Hornstein's für die Zahlen einer jeden Columne die Constanten der Formel

$$p_0 + p_1 \sin\left(r_1 + \frac{360}{T}.x\right)$$

berechnete (p_0, p_1 und r_1 sind bekanntlich die zu bestimmenden Constanten, T bedeutet die Länge der Periode und x den Tag), erhielt ich folgende Gleichungen:

---

[1] Hornstein: „Über die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne.“ Sitzb. der kais. Akad. Bd. 64.

Tabelle XI.

	Östliche Störungen					Westliche Störungen				
	24	25	26	27	28	24	25	26	27	28
1	1·204	1·072	1·015	1·517	1·192	0·943	0·834	0·905	1·320	1·249
2	0·887	1·357	0·983	1·224	0·948	0·884	1·169	0·807	1·080	0·905
3	0·987	0·939	0·983	1·187	1·473	0·932	1·286	0·935	1·013	1·662
4	0·954	0·860	1·049	1·159	1·244	0·907	0·834	0·714	1·023	1·042
5	1·160	0·863	1·344	1·427	0·977	1·110	0·855	1·233	0·969	1·047
6	1·473	0·965	1·091	1·377	1·071	1·234	0·788	1·156	1·183	0·939
7	1·210	0·920	1·193	1·316	0·830	1·162	0·935	0·900	1·025	0·877
8	1·012	0·958	1·104	1·416	1·184	0·870	0·861	0·973	1·338	1·053
9	0·852	0·925	1·237	1·250	0·969	0·986	0·770	1·107	1·023	1·030
10	1·160	1·131	1·594	0·894	1·076	0·870	0·873	1·147	0·770	0·862
11	1·331	1·143	1 399	0·974	0·956	1·123	1·045	1·170	0·900	0·904
12	1·132	1·316	1·303	1·057	1·100	0·954	0·875	0·939	1·160	0·908
13	1·322	0·925	1·509	1·137	1·377	1·028	0·795	1·624	1·062	1·145
14	0·909	1·073	1·146	1·156	1·286	0·915	0·944	0·909	1·160	1·051
15	1·026	1·315	1·016	0·866	1·014	0·943	1·018	0·957	0·886	1·077
16	1·189	1·352	1·312	1·077	1·141	1·090	1·198	1·197	0·917	0·990
17	1·143	1·102	1·453	1·033	1·266	1·135	0·894	1·093	1·124	0·901
18	1·117	1·569	1·247	1·128	1·317	0·844	1·401	0·855	0·890	1·053
19	0·791	1·679	0·955	0·975	1·149	0·913	1·093	0·859	0·875	0·952
20	1·180	1·262	1·070	1·039	1·125	1·350	1·150	0·961	0·982	0·926
21	1·205	1·015	0·911	1·065	0·922	1·174	0·806	0·905	0·826	0·999
22	1·139	1·097	0·858	1·252	1·100	0·806	0·823	0·821	0·835	0·850
23	1·146	1·347	0·925	0·886	1·226	1·313	1·046	0·884	0·863	0·999
24	1·367	1·137	0·916	1·075	1·230	1·211	0·887	0·884	1·145	1·013
25	—	0·885	0·967	0·957	1·341	—	0·957	1·009	0·793	1·055
26	—	—	0·908	0·946	1·031	—	—	0·831	0·853	0·822
27	—	—	—	1·330	1·096	—	—	—	1·082	0·955
28	—	—	—	—	0·954	—	—	—	—	0·927

für die östlichen Störungen

24 Tage ..... $1{\cdot}1207+0{\cdot}0401.\sin(205°45'20''+x.n)$, $n = 15°\ 0'\ 0''$
25 „ ..... $1{\cdot}1283+0{\cdot}2101.\sin(209\ 22\ 45\ +x.n_1)$, $n_1 = 14\ 24\ 0$
26 „ ..... $1{\cdot}1359+0{\cdot}2327.\sin(302\ 8\ 40\ +x.n_2)$, $n_2 = 13\ 50\ 45$
27 „ ..... $1{\cdot}1378+0{\cdot}1295.\sin(361\ 47\ 48\ +x.n_3)$, $n_3 = 13\ 20\ 0$
28 „ ..... $1{\cdot}1284+0{\cdot}1007.\sin(242\ 51\ 26\ +x.n_4)$, $n_4 = 12\ 51\ 26$

für die westlichen Störungen

24 Tage ..... $1{\cdot}0290+0{\cdot}0476.\sin(119°32'20''+x.n)$
25 „ ..... $0{\cdot}9656+0{\cdot}1196.\sin(338\ 51\ 30\ +x.n_1)$
26 „ ..... $0{\cdot}9914+0{\cdot}1416.\sin(303\ 33\ 40\ +x.n_2)$
27 „ ..... $1{\cdot}0013+0{\cdot}1006.\sin(325\ 28\ 30\ +x.n_3)$
28 „ ..... $1{\cdot}0069+0{\cdot}0455.\sin(\ 17\ 5\ 20\ +x.n_4)$

Stellt man die Amplitude als Function der Periode T dar, so sind in dem Ausdrucke:

$$A = \alpha+\beta(T-25)+\gamma(T-25)^2$$

die Constanten α, β und γ zu bestimmen. Zu ihrer Bestimmung hat man die Gleichungen:

für östliche Störungen	für westliche Störungen
$0{\cdot}0401 = \alpha-\beta+\gamma$	$0{\cdot}0476 = \alpha-\beta+\gamma$
$0{\cdot}2101 = \alpha$	$0{\cdot}1196 = \alpha$
$0{\cdot}2327 = \alpha+\beta+\gamma$	$0{\cdot}1416 = \alpha+\beta+\gamma$
$0{\cdot}1295 = \alpha+2\beta+4\gamma$	$0{\cdot}1006 = \alpha+2\beta+4\gamma$
$0{\cdot}1007 = \alpha+3\beta+9\gamma$	$0{\cdot}0455 = \alpha+3\beta+9\gamma$

Rechnet man aus diesen Gleichungen die Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergeben sich die Formeln:

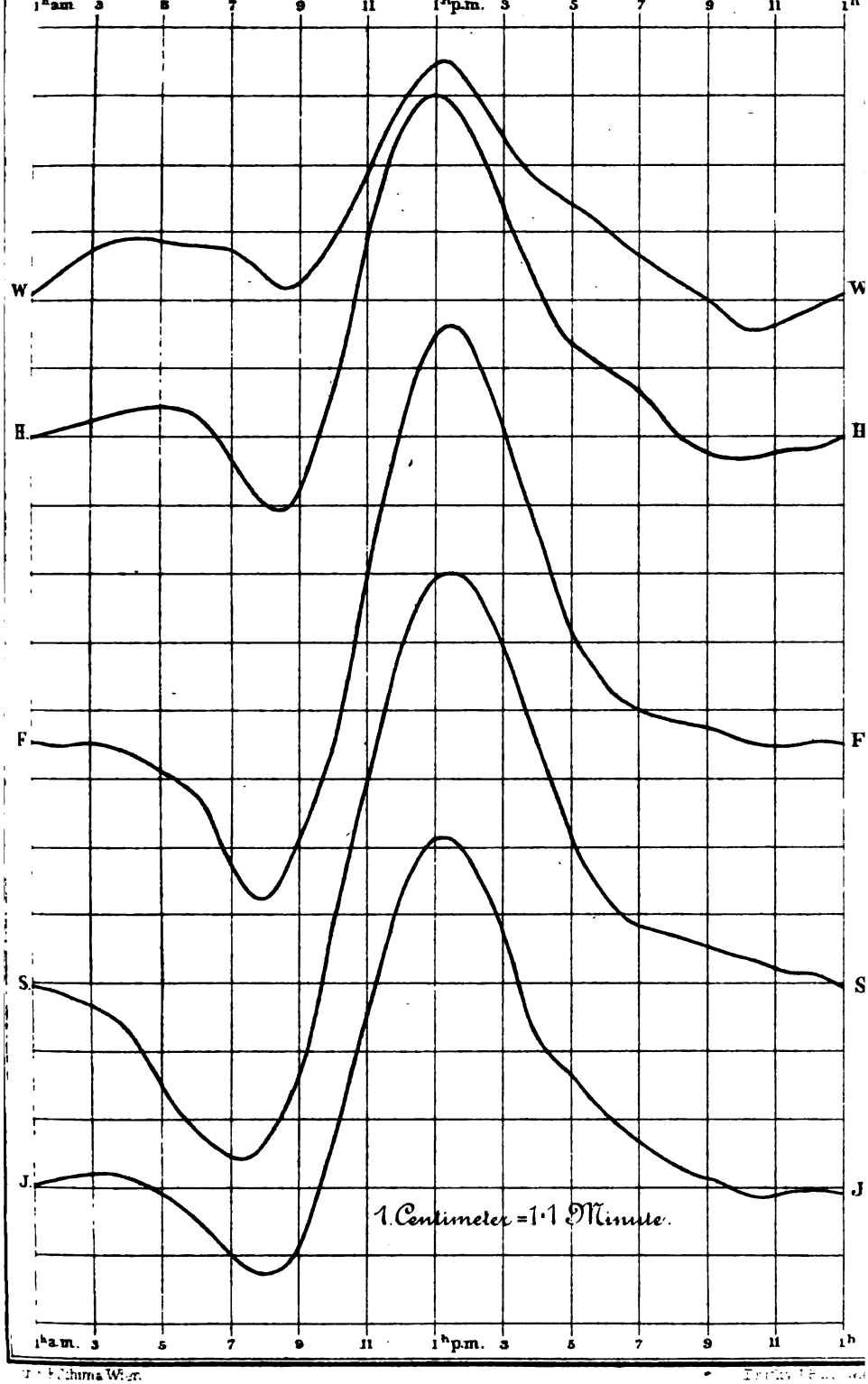
$A = 0{\cdot}1760+0{\cdot}0788(T-25)-0{\cdot}0374(T-25)^2$ für östl. Stör.
$A = 0{\cdot}1161+0{\cdot}0430(T-25)-0{\cdot}0227(T-25)^2$ für westl. Stör.

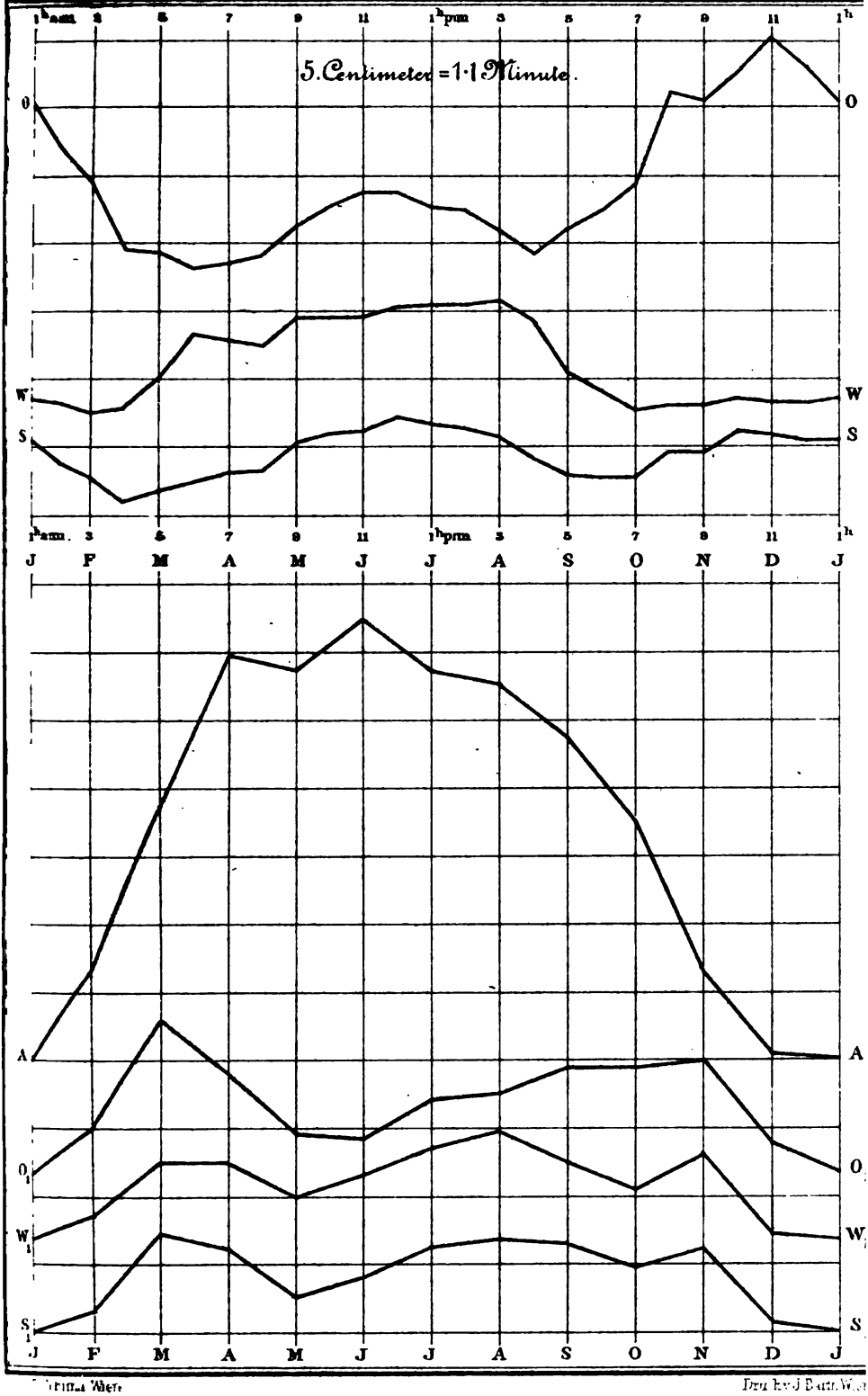
Für den wahrscheinlichsten Werth der Dauer der Periode T muss A ein Maximum werden; sucht man diesen, so ergeben die

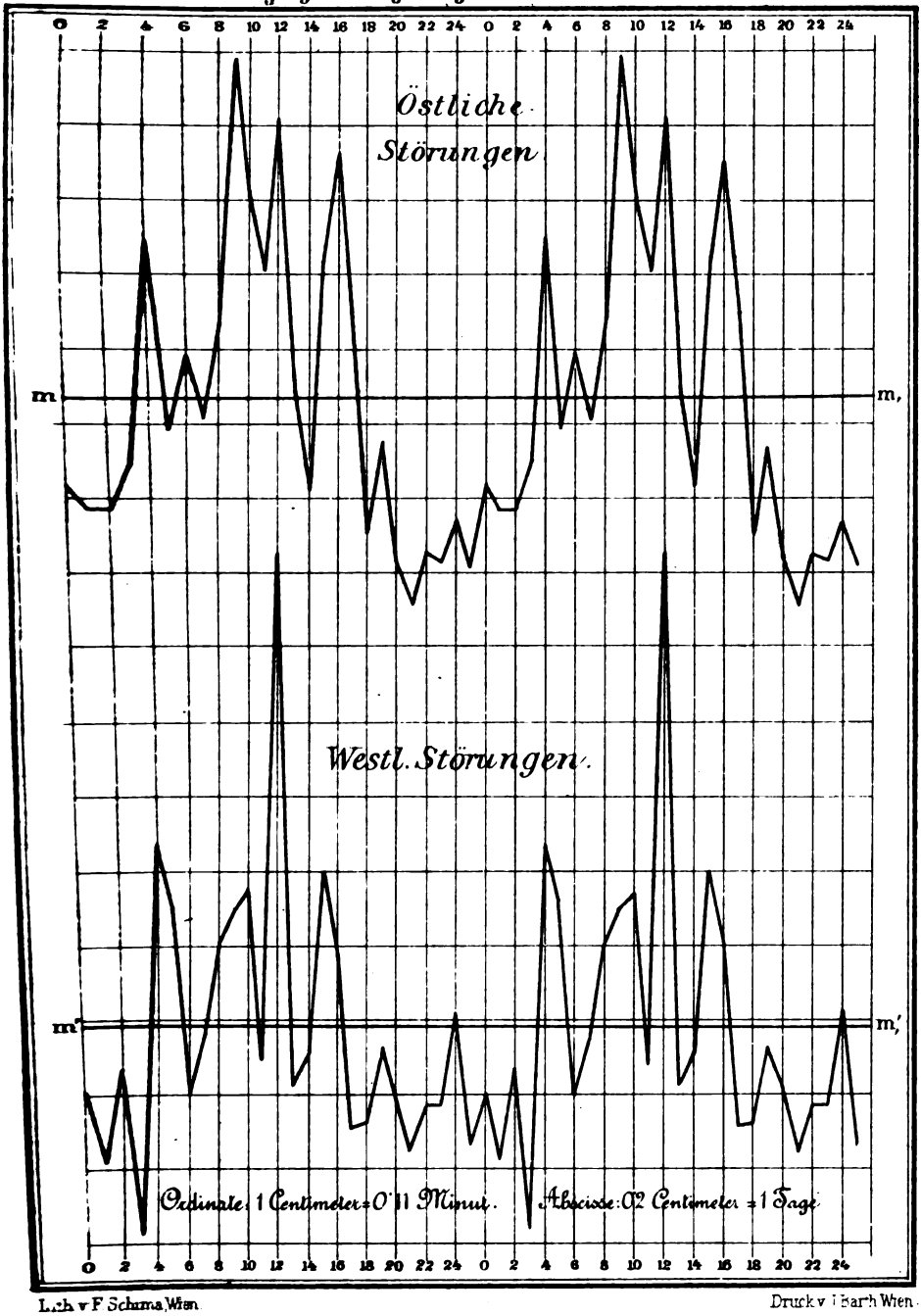
östlichen Störungen	westlichen Störungen
$T_1 = 26{\cdot}054$	$T_2 = 25{\cdot}947$ Tage

$$\text{Mittel} = {}^1/_2(T_1+T_2) = T = 26{\cdot}00.$$

Die Störungen ergeben also für die synodische Rotationsdauer der Sonne $T = 26{\cdot}00$ Tage; genau denselben Werth ergeben im Mittel die bisherigen


1h a.m. 3 5 7 9 11 1h p.m. 3 5 7 9 11 1h
W
H
F
S
J
1. Centimeter = 1·1 Minute.


5. Centimeter = 1·1 Minute.
1h am. 3 5 7 9 11 1h pm 3 5 7 9 11 1h
0
W
S
J F M A M J J A S O N D J
A
O1
W1
S1



Lith. v. F. Schuma, Wien. Druck v. Ebarth Wien.
Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe XCI. Bd. II. Abth. 1885.

Berechnungen aus den magnetischen und barometrischen Beobachtungen.[1]

Die Zahlen der Tabelle XI, und zwar der mit 26 überschriebenen Columne, stellen demnach die periodische Änderung der Störungen während einer Rotation der Sonne dar. Zur besseren Übersicht habe ich diese Zahlen in Tafel III graphisch dargestellt. Die Zickzacklinien entsprechen zwei Perioden, damit beide Wendepunkte deutlich auftreten; die Geraden mm_1 und $m'm_1'$ stellen die Mittelwerthe dar.

Die Amplitude der 26tägigen Periode ist bei den östlichen Störungen grösser als bei den westlichen, sie ergibt sich nach den letzten Gleichungen zu 0·2176, respective 0·1364. Dasselbe Verhalten zeigen die Amplituden des täglichen und jährlichen Ganges, wie dies aus den entsprechenden Curven auf Tafel II ersichtlich ist.

Alle diese Thatsachen beweisen uns, dass eine innige Beziehung zwischen den Bewegungen der Magnetnadel und der Stellung der Sonne und Beschaffenheit ihrer Oberfläche existirt; sie sind aber nicht im Stande, das Dunkel aufzuhellen, in welches die Erscheinungen des Erdmagnetismus gehüllt sind und wahrscheinlich noch durch lange Zeit gehüllt bleiben werden.

---

[1] Siehe die Zusammenstellung dieser Werthe in Hornstein's Abhandlung: „Über die Abhängigkeit der täglichen Variation des Barometerstandes von der Rotation der Sonne". Sitzb. der kais. Akad. Bd. 67, pag. 414.

Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene.

Von **Karl Bobek**,
Privatdocenten in Prag.

I.

Obgleich es möglich ist jede eindeutige involutorische Transformation der Ebene durch successive Anwendung von quadratischen Transformationen auf einen von vier bestimmten Grundtypen zu reduciren,[1] glaube ich doch im Folgenden einige Untersuchungen über eine ausgezeichnete Reihe dieser Transformationen der hohen Akademie vorlegen zu dürfen, die sich durch die Einfachheit ihrer Definition auszeichnen und ein bemerkenswerthes Beispiel solcher Transformationen liefern. Unter ihnen treten die bekannten Transformationen 8ter[2] und 17ter[3] Ordnung als Glieder dieser Reihe auf. Die Transformationen zeigen die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass eine ungerade Anzahl derselben hintereinander angewandt wieder zu einer Transformation der Reihe führt, hingegen liefert eine gerade Anzahl solcher Transformationen eine eindeutige, aber nicht mehr involutorische Transformation der Ebene.

Ein weiteres Interesse bieten diese Transformationen dadurch, dass in engster Beziehung mit ihnen hyperelliptische Curven auftreten, und auf diese Art gewisse Typen solcher Curven erhalten werden können,[4] von denen sich aber zeigen lässt, dass

---

[1] Cf. Bertini: Ricerche sulle transformazioni univoche involutorie nel piano. Annali di matematica, Serie II, Tomo VIII, pag. 244.

[2] Geiser: Über zwei geometrische Probleme. Crelle, Bd. 67, pag. 78.

[3] Bertini, l. c. pag. 245.

[4] Vgl. Küpper: Über hyperelliptische Curven $3n^{ter}$ Ordnung. Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1884.

sie, vom Geschlecht p, von $p+1$ willkürlichen Constanten abhängen, und dass sie daher specielle Curven dieser Art sind (Vgl. pag. 513.)

I. Eindeutige involutorische Transformationen der $(3\nu+5)^{\text{ten}}$ Ordnung.

1. Es seien die Punkte $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ Basispunkte eines Büschels von Curven 3ter Ordnung. Man bestimme eine nicht zerfallende Curve Γ^ν der νten Ordnung so, dass sie den Punkt i zum γ_i-fachen Punkt besitzt, wobei

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \gamma_4 \geq \gamma_5 \geq \gamma_6 \geq \gamma_7 \geq \gamma_8 \geq \gamma_9 \geq 0$$

sei. Die Zahlen γ_i wählen wir nun so, dass

$$\sum_1^9 \gamma_i = 3\nu - 1 \tag{1}$$

ist. Da dann jede Curve des Büschels 3ter Ordnung durch 1—9 die Γ^ν nur in einem Punkte schneidet, so ist Γ^ν rational oder es gilt gleichzeitig mit (1) auch

$$\sum_1^9 \gamma_i(\gamma_i-1) = (\nu-1)(\nu-2),$$

woraus sich mit Hilfe von (1)

$$\sum_1^9 \gamma_i^2 = \nu^2+1 \tag{2}$$

ergibt. Aus (1) und (2) folgt nun

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_i(\gamma_i+1) = \tfrac{1}{2}\nu(\nu+3),$$

d h. die Curve Γ^ν ist durch die Annahme der vielfachen Punkte 1—9 vollständig bestimmt.

Wir werden bald eine Methode angeben, mittels deren man aus den Zahlen ν und γ_i für eine Curve Γ^ν die Zahlen γ_i für eine Curve höherer als νten Ordnung angeben kann. Hier mögen einige der Zahlen angegeben werden.

ν	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	$\sum_1^9 \gamma_i$	$\sum_1^9 \gamma_i^2$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2
2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	5	5
3	2	1	1	1	1	1	1	0	0	8	10
4	2	2	2	1	1	1	1	1	0	11	17
	3	1	1	1	1	1	1	1	1		
5	2	2	2	2	2	2	1	1	0	14	26
	3	2	2	2	1	1	1	1	1		
6	3	2	2	2	2	2	2	2	0	17	37
	3	3	2	2	2	2	1	1	1		
7	3	3	3	3	2	2	2	1	1	20	50
	4	3	2	2	2	2	2	2	1		
8	3	3	3	3	3	3	3	1	1	23	65
	4	3	3	3	3	2	2	2	1		
	4	4	3	2	2	2	2	2	2		
9	4	4	3	3	3	3	3	2	1	26	82
	4	4	4	3	3	2	2	2	2		
	5	3	3	3	3	3	2	2	2		
10	4	4	4	4	3	3	3	3	1	29	101
	4	4	4	4	4	3	2	2	2		
	5	4	4	3	3	3	3	2	2		
11	6	4	4	3	3	3	3	3	3	32	122

Der variable Punkt in dem eine Curve C^3 des Büschels durch 1—9 die Γ^ν trifft, sei mit γ bezeichnet.

Wir setzen nun folgende Beziehung zwischen den Punkten der Ebene fest:

Einem Punkte a möge der Punkt α entsprechen, in welchem C_a^3 (die Curve 3ter Ordnung des Büschels durch 1—9, welche durch den Punkt a geht) die Gerade $\overline{\gamma a}$ noch schneidet.

Die hiedurch definirte Verwandtschaft zwischen den Punkten a, α der Ebene ist offenbar eindeutig und involutorisch. Die Punkte 1—9 sind ihre Fundamentalpunkte.

2. Dem Punkte i möge die Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu_i}$ entsprechen Ihre Ordnung ν_i ergibt die folgende Betrachtung. Ist a ein Punkt einer beliebigen Geraden g und schneidet $\overline{ai}$ die Γ^ν in demselben Punkte, wie C_a^3, so ist a ein Schnittpunkt von g mit $\Delta_i^{\nu_i}$. Es trifft nun $\overline{ai}$ die Curve Γ^ν in $\nu-\gamma_i$ Punkten, durch die ebensoviele Curven 3ter Ordnung gehen, die g in $3(\nu-\gamma_i)$ Punkten a' treffen sollen. Umgekehrt entspricht einem Punkte a' ein Punkt a. Es treten mithin auf g im Ganzen $3(\nu-\gamma_i)+1$ Coincidenzen auf, von denen ν auf Γ^ν liegen und die $2\nu-3\gamma_i+1$ übrigen offenbar Punkte von $\Delta_i^{\nu_i}$ sind.

Die Ordnung der Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu_i}$ ist daher $\nu_i=2\nu-3\gamma_i+1$.

Legt man g durch den Punkt i, so ergibt die obige Correspondenz, dass der Punkt i für $\Delta_i^{\nu_i}$ ein $(\nu-2\gamma_i+1)$-facher ist, was übrigens auch daraus folgt, dass auf g nur die $\nu-\gamma_i$ Punkte von $\Delta_i^{\nu_i}$ liegen können, in denen die Curven 3ter Ordnung, die durch die $\nu-\gamma_i$ Schnittpunkte von g mit Γ^ν gehen, die Gerade g schneiden.

Legt man g durch den Fundamentalpunkt x, so ergibt die Correspondenz, da einem Punkte a, ausser x noch $2(\nu-\gamma_i)$ Punkte a' entsprechen, $2(\nu-\gamma_i)+1$ Coincidenzen, unter denen $(\nu-\gamma_x)$ Schnittpunkte von Γ^ν mit g auftreten, so dass auf g nunmehr bloss $2(\nu-\gamma_i)+1-(\nu-\gamma_x)=\nu-2\gamma_i+\gamma_x+1$ Punkte von $\Delta_i^{\nu_i}$ liegen, oder der Punkt x ist für $\Delta_i^{\nu_i}$ ein $(\nu-\gamma_i-\gamma_x)$-facher.

Bezeichnet man also die Ordnung der Vielfachheit des Punktes x von $\Delta_i^{\nu_i}$ mit γ_{ix}, so ist

$$\gamma_{ix}=\nu-\gamma_i-\gamma_x \text{ für } i\neq x$$

und

$$\gamma_{ii}=\nu-2\gamma_i+1 \tag{3}$$

Hieraus folgt, dass die $\Delta_i^{\nu_i}$, wie es sein muss, rational sind, und sich ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht mehr schneiden.

3. Entspricht dem Punkte i eine Fundamentalcurve, so dass also $2\nu-3\gamma_i+1>0$ ist, so müssen offenbar die Zahlen γ_{ix} und γ_{ii} entweder positiv oder es können einzelne auch null sein, d. h. es ist

$$\nu+1-2\gamma_i\geqq 0$$

oder

$$\gamma_i\leqq\frac{\nu+1}{2}.$$

Da nun γ_1 der höchstvielfache Punkt ist, so wird, im Falle diesem eine Fundamentalcurve entspricht,

$$\gamma_1 \leqq \frac{\nu+1}{2}$$

sein.

Soll aber dem Punkte 1 keine Fundamentalcurve entsprechen, so muss entweder die Gerade $\overline{1\gamma}$, wenn γ der Schnittpunkt der beweglichen C^3 mit Γ^ν ist, fest sein, oder die entsprechende C^3 in 1 berühren. Der erste Fall kann offenbar nur eintreten, wenn Γ^ν die Gerade $\overline{1\gamma}$ selbst ist, also $\nu=1$; $\gamma_1=1$, $\gamma_2=1$. Der zweite zweite Fall, da $\overline{1\gamma}$ die C^3 im Punkte 1 berührt, liefert eine Curve 4ter Ordnung, welche in 1 einen 3-fachen Punkt hat, und welche durch den Curvenbüschel C^3 und den ihm projectivischen Tangentenbüschel erzeugt wird. Es ist der zweite unter $\nu=4$ in der Tafel angegebene Fall der Γ^ν.

In jedem anderen Falle wird also dem Punkte 1, und folglich auch jedem Punkte i eine Fundamentalcurve entsprechen und es ist

$$\gamma_1 \leqq \frac{\nu+1}{2}. \tag{4}$$

Da $\gamma_i \leqq \gamma_1$ ist, so entsprechen auch allen Punkten i Fundamentalcurven, die durch diesen Punkt i gehen.

Für eine Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu,i}$ ist

$$\sum_1^9 \gamma_{ix} = \nu+1-2\gamma_i+\sum_1^{9\prime}(\nu-\gamma_i-\gamma_x),$$

hiebei bedeutet Σ', dass x alle Werthe von 1—9 annehmen soll, ausser den Werth i. Also ist zu Folge (1)

$$\sum_1^9 \gamma_{ix} = 6\nu-9\gamma_i+2 = 3\nu_i-1$$

d. h. die Curve $\Delta_i^{\nu,i}$ kann als eine Curve Γ genommen werden, um eine neue Verwandtschaft zu definiren.

Da $\Sigma\gamma_i = 3\nu-1$, so muss wenigstens ein $\gamma_i < \frac{3\nu-1}{9}$, denn wären alle $\gamma_i > \frac{3\nu-1}{9}$, so wäre auch $\Sigma\gamma_i > 3\nu-1$. Ist also

$\gamma_i < \frac{3\nu-1}{9}$, so wird

$$3\gamma_i < \nu - \tfrac{1}{3}$$
$$2\nu - 3\gamma_i + 1 \geqq \nu + 1,$$

d. h. $\nu_i \geqq \nu+1$. Es ist also die diesem Fundamentalpunkte entsprechende Fundamentalcurve von höherer Ordnung als die Γ^ν. So viele verschiedene Werthe also $\gamma_i < \frac{3\nu-1}{9}$ sind, so viele neue Curven Γ kann man angeben, die eine höhere Ordnung haben als die angenommene. Es kommen auch $\gamma_x > \frac{3\nu-1}{9}$ vor; durch diese erhält man offenbar Curven Γ niedrigerer Ordnung. (Vgl. pag. 492.)

4. Ist n die Ordnung der Verwandtschaft, so wird die Curve n^{ter} Ordnung G^n, welche der Geraden g entspricht im Fundamentalpunkte i einen ν_i-fachen Punkt haben. Zwei Curven G^n und G'^n, welche den Geraden g, g' entsprechen, können sich ausserhalb der Fundamentalpunkte 1—9 nur in einem Punkte schneiden, dem entsprechenden zum Schnittpunkte von $g.g'$. Also ist

$$n^2 = 1 + \sum_1^9 \nu_i^2 = (3\nu+5)^2$$

und die Ordnung der Verwandtschaft ist also $3\nu+5$. Einer Curve m^{ter} Ordnung, die in i einen δ_i-fachen Punkt hat, entspricht mithin eine Curve der Ordnung

$$M = (3\nu+5)m - \sum_1^9 \delta_i \nu' \quad (\nu' = 2\nu - 3\gamma_i + 1) \qquad (5)$$

5. Die Curven $\Delta_i^{\nu'}$ schneiden sich ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht mehr. Es ist auch

$$(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-\gamma_i-\gamma_x)+(\nu-2\gamma_x+1)(\nu-\gamma_x-\gamma_i)+$$
$$+\sum{}''(\nu-\gamma_i-\gamma_x)(\nu-\gamma_x-\gamma_x) = (2\nu-3\gamma_i+1)(2\nu-3\gamma_x+1) = \nu_i\nu_x$$

zu Folge der Gleichungen (1) und (2), wobei in Σ'' h nicht gleich i und x zu setzen ist.

Die Fundamentalcurven bilden zusammen die Jacobische Curve des Netzes der G^n, indem diese nur Doppelpunkte aufweisen können, sobald sie zerfallen, also g durch einen der Fundamentalpunkte geht. Es ist auch

$$\sum_1^9 (2\nu - 3\gamma_i + 1) = 3(3\nu + 4) = 3(n-1).$$

6. Auf jeder Geraden g der Ebene liegen ν Paare a, α der Verwandtschaft; denn g trifft Γ^ν in ν Punkten, durch welche ν Curven C^3 gehen, welche jede ein Paar, auf g liegend, ausschneidet.

Lässt man g um einen festen Punkt k der Ebene sich drehen, so ist der Ort der auf ihr liegenden Paare a, α eine Curve der $2\nu+1$ten Ordnung, $k^{2\nu+1}$; denn auf jeder Geraden durch k liegen 2ν Punkte derselben, und k ist einfacher Punkt von $k^{2\nu+1}$, da die C_k^3 die Γ^ν in dem Punkt γ trifft, so dass $\overline{k\gamma}$ den Punkt $\varkappa$ enthält, der dem Punkte k entspricht.

Der Fundamentalpunkt i ist ein $(\nu-\gamma_i)$-facher Punkt von $k^{2\nu+1}$; denn auf $\overline{ki}$ liegen von $k^{2\nu+1}$ die γ_i Paare, welche die C^3 ausschneiden, die Γ^ν in i berühren, und die $\nu-\gamma_i$ Schnittpunkte von $\overline{ki}$ mit $\Delta_i^{\nu\gamma_i}$, während die $\nu-\gamma_i$ entsprechenden Punkte dieser Schnittpunkte in i fallen. In der That ist auch

$$2\nu + 1 - 2\gamma_i - (\nu - \gamma_i) - 1 = \nu - \gamma_i$$

die Vielfachheit des Punktes i für $k^{2\nu+1}$.

Die Curven $k^{2\nu+1}$ entsprechen sich offenbar in der Verwandtschaft selbst. Ihr Geschlecht ist

$$\nu(2\nu-1) - \tfrac{1}{2}\sum_1^9 (\nu-\gamma_i)(\nu-\gamma_i-1) = \nu.$$

Die Curven $k^{2\nu+1}$ bilden ein Netz. Durch jeden Punkt a der Ebene geht ein Büschel derselben. Denn trifft C_a^3 der Γ^ν in γ, so werden alle $k^{2\nu+1}$, welche ihre Punkte k auf $\overline{a\gamma}$ haben, durch a und α, überdiess aber noch durch die $\nu-1$ andere Paare dieser Geraden gehen.

Die vielfachen Punkte der $k^{2\nu+1}$ und die ν Paare auf der festen Geraden geben nun zusammen

$$\sum_{1}^{9}{}_i (\nu-\gamma_i)^2+2\nu=(2\nu+1)^2,$$

d. h. alle Schnittpunkte zweier Curven $k^{2\nu+1}$, sie bilden die Basis des erwähnten Büschels.

Sind zwei Punkte a, b gegeben, durch die $k^{2\nu+1}$ gehen soll, so schneide C_a^3 die Γ^ν in γ_1 und C_b^3 in γ_2, dann liefert der Schnittpunkt von $\overline{a\gamma_1}$ und $\overline{b\gamma_2}$ den Punkt k, welchem $k^{2\nu+1}$ entspricht.

Die Curven $k^{2\nu+1}$ bilden eine Art von Nullsystem in der Ebene, indem jedem Punkte eine durch ihn hindurchgehende Curve und einer Curve ein auf ihr liegender Punkt entspricht.

Eine Curve $k^{2\nu+1}$ wird von einer C^3 nur in einem Punktepaar geschnitten. Hieraus folgt, dass $k^{2\nu+1}$ ohne zu zerfallen nur in einem Coïncidenzpunkte der Verwandtschaft einen Doppelpunkt besitzen kann. Denn hätte $k^{2\nu+1}$ in a einen Doppelpunkt, so müsste sie auch in α einen Doppelpunkt haben. Fällt nun a nicht mit α zusammen, so hätte die C_a^3, da sie auch durch α geht, mit $k^{2\nu+1}$ vier Punkte gemeinschaftlich und müsste daher einen Theil von $k^{2\nu+1}$ bilden. Da nun letzteres in der That eintreten kann, wie wir gleich sehen werden, so zerfällt die Jacobische Curve des Netzes der $k^{2\nu+1}$ in die Coïncidenzcurve der Verwandtschaft, auf der die $k^{2\nu+1}$ einen Doppelpunkt haben können und in eine zweite Curve, auf der die Punkte paarweise so auftreten, dass sie Schnittpunkte einer C^3 und einer $C^{2\nu-2}$ sind, die zusammen eine $k^{2\nu+1}$ constituiren.

7. Die Coïncidenzcurve der Verwandtschaft ist von der $\nu+5^{\text{ten}}$ Ordnung und hat in dem Fundamentalpunkte i einen $\nu-2\gamma_i+1$ Punkt. Denn die Gerade g trifft die ihr entsprechende Curve $G^{3\nu+5}$ in $3\nu+5$ Punkten, von denen 2ν die ν auf g liegenden Paare sind. Die übrigen $\nu+5$ Punkte sind solche, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Da ferner die Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu'}$ durch i $(\nu-2\gamma_i+1)$-fach geht, so fallen in den $(\nu-2\gamma_i+1)$ Richtungen ihrer Äste entsprechende Punkte mit i zusammen. Hieraus ersieht man auch, dass $\Delta_i^{\nu'}$ von der Coïncidenzcurve $H^{\nu+5}$ in den $\nu-2\gamma_i+1$ Ästen in i berührt wird.

$\Delta_i^{\nu,i}$ kann die $H^{\nu+5}$ ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht schneiden und es ist auch

$$(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-2\gamma_i+2)+\sum_x{}'(\nu-\gamma_i-\gamma_x)(\nu-2\gamma_x+1)=$$
$$=(\nu+5)(2\nu-3\gamma_i+1).$$

Das Geschlecht der $H^{\nu+5}$ ist

$$\tfrac{1}{2}(\nu+4)(\nu+3)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-2\gamma_i)=3.$$

8. Die Punkte von $H^{\nu+5}$ können auch auf jeder C^3 erhalten werden, indem man von γ an die C^3 die vier Tangenten zieht. Die Berührungspunkte derselben liegen offenbar auf $H^{\nu+5}$. Es schneidet auch die $H^{\nu+5}$ eine C^3 nur in

$$3(\nu+5)-\sum_1^9(\nu-2\gamma_i+1)=4$$

beweglichen Punkten, deren Tangentialpunkt auf Γ^ν liegt.

$H^{\nu+5}$ geht durch die 12 Doppelpunkte der Curven 3ter Ordnung des Büschels.

Die Tangenten der Curven 3ter Ordnung in ihren Schnittpunkten mit der $H^{\nu+5}$ hüllen eine Curve E der $(2\nu+2)^{\text{ten}}$ Classe ein. Denn die dem Punkte k entsprechende $k^{2\nu+1}$ schneidet die $H^{\nu+5}$ in

$$(2\nu+1)(\nu+5)-\sum_1^9(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-\gamma_i)=2\nu+2$$

Punkten, die mit k verbunden die Richtungen angeben, in denen die entsprechenden Punkte a, α zusammenfallen. Diese Geraden sind Tangenten von $k^{2\nu+1}$.

9. Der andere Theil der Jacobischen Curve des Netzes der $k^{2\nu+1}$ ist eine Curve der $3.2\nu-(\nu+5)=5(\nu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $K^{5(\nu-1)}$.

Sei d, δ ein Punktepaar, für welches eine der hindurchgehenden $k^{2\nu+1}$ zerfällt, also aus C_d^3 und einer $C^{2\nu-2}$ besteht. Schneidet C_d^3 die Γ^ν in γ, so ist dieser Punkt offenbar derjenige, welchem die zerfallende Curve zugehört; denn die C_d^3 enthält

unendlich viele Paare, die auf den Strahlen durch γ liegen, auf jedem Strahl ein Paar. Die übrigen $\nu-1$ Paare liegen auf $C^{2(\nu-1)}$, welche nicht mehr durch γ geht. Nun geht $C^{2(\nu-1)}$ auf der Geraden $\overline{\gamma d}$ durch das Paar d, δ, durch welches auch C_d^3 geht, und kann daher diese Gerade nur mehr in $(\nu-2)$ Paaren treffen, d. h. $\overline{\gamma d}$ schneidet die Curve Γ^ν ausserhalb γ nur noch in $\nu-2$ Punkten und muss daher Tangente von Γ^ν in γ sein. Der Ort der Punkte d, δ ist also der Ort der Schnittpunkte der Tangenten von Γ^ν mit den Curven 3ter Ordnung C^3, welche durch ihren Berührungspunkt gehen. Durch Anwendung des Correspondenzprincips kann nun die Ordnung direct bestimmt werden. Die Classe von Γ^ν ist, da die Curve rational ist $2(\nu-1)$. Ist nun x ein Punkt einer beliebigen Geraden g, so gehen von ihm an Γ^ν $2(\nu-1)$ Tangenten und die durch ihre Berührungspunkte gehenden Curven 3ter Ordnung schneiden g in $6(\nu-1)$ Punkten x'. Umgekehrt entspricht einem Punkte x' ein Punkt x. Es sind also auf g im Ganzen $6(\nu-1)+1$ Coïncidenzen vorhanden, unter denen ν in die Schnittpunkte von Γ^ν mit g fallen, und die übrigen $5(\nu-1)$ auf dem gesuchten Orte liegen.

Dieselbe Betrachtung liefert, dass auf einer Geraden, welche durch den Fundamentalpunkt i geht ausserhalb dieses nur noch $3(\nu-1)+\gamma_i$ Coïncidenzen auftreten, die auf $H^{5(\nu-1)}$ liegen, so dass dieser Punkt für die Curve ein $(2\nu-2-\gamma_i)$-facher wird.

Die Curve $H^{5(\nu-1)}$ entspricht sich in der Verwandtschaft selbst. Ihr Geschlecht ist $3\nu-4$.

10. Die Curve $H^{5(\nu-1)}$ schneidet die dem Punkte k zugehörige $k^{2\nu+1}$ noch in

$$5(\nu-1)(2\nu+1) - \sum_1^9 (2\nu-2-\gamma_i)(\nu-\gamma_i) = 4\nu-4$$

Punkten d, δ die paarweise auf $2\nu-2$ Geraden durch k liegen.

Da jede der $2(\nu-1)$ Geraden Tangente von Γ^ν ist, so schneidet dieselbe Γ^ν ausser in dem Berührungspunkte noch in $\nu-2$ Punkten und die $k^{2\nu+1}$, ihren Punkt k auf der Tangete $\overline{d\delta}$ liegen haben und welche nicht zerfallen, müssen daher diese Geraden in d und δ berühren. Durch den Punkt k gehen daher ausser den früher gefundenen $2\nu+2$ Tangenten noch $2(\nu-1)$ Doppeltangenten. Da k ein Punkt von $k^{2\nu+1}$ ist, so

folgt, dass von ihm an $k^{2\nu+1}$ keine Tangente mehr geht, denn diese Curve ist, da ihr Geschlecht ν war, von der $2.2\nu+2\nu=6\nu^{\text{ten}}$ Classe.

11. Hat die $k^{2\nu+1}$ einen Doppelpunkt auf $H^{\nu+5}$, so gehen von k nur mehr 2ν Tangenten an dieselbe, oder der Punkt k liegt auf der Enveloppe E der Richtungen, in denen die Punkte auf $H^{\nu+5}$ zusammenfallen. Hieraus ergibt sich die Ordnung dieser Enveloppe. Beschreibt nämlich k eine Gerade g, so sahen wir, dass $k^{2\nu+1}$ einen Büschel beschreibt. Nun gibt es in einem Büschel von Curven m^{ter} Ordnung, welche in Punkten i je δ_i-fache Punkte haben, noch

$$3(n-1)^2-3\Sigma\,\delta_i^2+\Sigma(2\delta_i+1)$$

Curven, welche noch einen Doppelpunkt besitzen ausserhalb der Basispunkte.[1] In unserem Büschel der $k^{2\nu+1}$ gibt es daher noch

$$3.4\nu^2-3\sum_1^9(\nu-\gamma_i)^2+\sum_1^9(2\nu-2\gamma_i+1)=6\nu+8$$

Curven, die Doppelpunkte besitzen. Da nun den ν Schnittpunkten von g mit Γ^ν je Curven mit zwei Doppelpunkten entsprechen, so bleiben noch $4(\nu+2)$ Curven übrig, welche einen Doppelpunkt haben, die ihnen entsprechenden Punkte auf g sind Punkte der Enveloppe E, diese ist mithin von der $4(\nu+2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Da ihre Classe $2\nu+2$ war, so ergibt sich ihr Geschlecht

---

[1] Sind nämlich a, b, c drei Punkte der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen, so werden die ersten Polaren von a und b für den Büschel der Curven m^{ter} Ordnung projectivische Büschel bilden in Anbetracht der Polaren für dieselbe Grundcurve. Beide erzeugen daher eine Curve der $2(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die in δ_i einen $2(\delta_i-1)$-fachen Punkt hat, dessen Tangenten die $2(\delta_i-1)$ Doppelstrahlen der Involution der δ_i Tangenten der Grundcurven sind. Analog erzeugen die Polarenbüschel für a und c eine Curve $2(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche dieselben $2(\delta_i-1)$ Tangenten in $2(\delta_i-1)$-fachen Punkte besitzen. Diese beiden Curven schneiden einander in $4(m-1)^2-4\Sigma(\delta_i-1)\delta_i$ Punkten ausserhalb der vielfachen Punkte. Zieht man hievon die Basispunkte des Büschels von Polaren ab, die dem Punkte a zukommen und deren Zahl $(m-1)^2-\Sigma(\delta_i-1)^2$ ist, so bleiben noch $3(m-1)^2+\Sigma(\delta_i-1)^2-4(\Sigma\delta_i(\delta_i-1)$ Punkte in der Ebene übrig, durch welche je eine Polare des Punktes a, b, und c für dieselbe Grundcurve geht, und welche also Doppelpunkte von Curven des Büschels m^{ter} Ordnung sind.

gleich $\frac{1}{2}[4\nu+8-2(2\nu+2-1)]=3$, was damit übereinstimmt, dass E durch ihre Tangenten eindeutig auf die Punkte von $H^{\nu+5}$ bezogen ist, also von demselben Geschlechte sein muss.

12. Verbindet man die Punkte a einer Geraden g mit den ihnen entsprechenden Punkten α von G^n, so ist die Enveloppe $\mathfrak{E}$ dieser Geraden von der $(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Classe, denn durch den Punkt k gehen $2\nu+1$ ihrer Tangenten, die Verbindungslinien der $2\nu+1$ Schnittpunkte von $k^{2\nu+1}$ mit g. Die Gerade g enthält ν Paare und ist daher 2ν-fache Tangente. Die Enveloppe $\mathfrak{E}$ ist rational. Berührt eine $k^{2\nu+1}$ die g, so liegt k auf $\mathfrak{E}$. Beschreibt nun k eine Gerade g', so wird der Büschel der $k^{2\nu+1}$ die g in einer Involution $(2\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden, die 2.2ν Doppelelemente aufweist, in denen die $k^{2\nu+1}$ die g berühren. $\mathfrak{E}$ ist also von der $4\nu^{\text{ten}}$ Ordnung. Hieraus ergibt sich wieder ihr Geschlecht $\frac{1}{2}[4\nu-2(2\nu)]=0$.

Ist E eine beliebige Enveloppe der m^{ten} Classe, so liegen auf jeder Tangente derselben ν Paare der Verwandtschaft, deren Ort eine Curve K der $m(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, die in i einen $m(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt hat. Denn soll ein Punkt a von K auf g, einer beliebigen Geraden liegen, so muss $\overline{a\alpha}$ Tangente von E und $\mathfrak{E}$ sein, und umgekehrt ist $\overline{a\alpha}$ Tangente von $\mathfrak{E}$ und E, so ist a ein Punkt von K. Da $\mathfrak{E}$ und E $m(2\nu+1)$ Tangenten gemeinschaftlich haben, so ist dies die Ordnung von K. Ist aber g eine durch i gehende Gerade, so ist $\mathfrak{E}$ nur mehr von der $2\nu+1-(\nu-\gamma_i)=(\nu+\gamma_i+1)^{\text{ten}}$ Classe und hat also mit E nur $m(\nu+\gamma_i+1)$ Tangenten gemeinschaftlich, also schneidet g die K ausserhalb i in $m(\nu+\gamma_i+1)$ Punkten und dieser ist also ein $m(2\nu+1)-m(\nu+\gamma_i+1)=m(\nu-\gamma_i)$-facher Punkt von K. Die Curve K entspricht sich in der Verwandtschaft selbst.

13. Eine allgemeine Curve der $(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in i je einen $(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt hat, ist bestimmt durch

$$(\nu+2)(2\nu+1)-\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\nu}{}_i(\nu-\gamma_i)(\nu-\gamma_i+1)=\nu+1$$

Punkte und unsere $k^{2\nu+1}$ bilden daher ein ausgezeichnetes Netz in der Mannigfaltigkeit dieser Curven.

Jede Curve $C^{2\nu+1}$ aber, welche in i einen $(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt hat, entspricht sich in der Verwandt-

schaft selbst. Denn die $C^{2\nu+1}$ schneidet eine feste C^3 die durch die neun Fundamentalpunkte geht nur in zwei Punkten, die ein Paar unserer Verwandtschaft bilden, und die ganze Schaar von zwei Punkten auf C^3 wird von allen $C^{2\nu+1}$ der obigen Art ausgeschnitten.

Da unter ihnen nun auch unsere $k^{2\nu+1}$ vorkommen und diese je in einem Paare a, α die C^3 schneiden, so thuen es alle $C^{2\nu+1}$, welche in i einen $(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt haben, d. h. diese Curven entsprechen sich in der Verwandtschaft selbst.

Aber auch jede Curve $C^{2\nu-3\lambda+1}$ der $(2\nu-3\lambda+1)$ten Ordnung, welche in i einen $(\nu-\gamma_i-\lambda)$-fachen Punkt hat, entspricht sich in der Verwandtschaft selbst. Denn eine C^3 schneidet eine solche Curve noch in

$$3(2\nu-3\lambda+1)-\sum_1^9(\nu-\lambda-\gamma_i)=2$$

Punkten. Es schneidet daher die Gesammtheit der Curven $C^{2\nu-3\lambda+1}$ auf einer festen C^3 eine einfach lineare Schaar von zwei Punkten aus, deren Verbindungsgeraden durch einen festen Punkt von C^3 gehen. Nimmt man zu $C^{2\nu-3\lambda+1}$ noch λ Curven C^3 hinzu, so bilden diese zusammen eine $C^{2\nu+1}$ der oben erwähnten Art, die sich in der Verwandtschaft selbst entsprechen, und da jede C^3 sich selbst entspricht, so muss es auch die $C^{2\nu-3\lambda+1}$ thun.

Von einer solchen Curve sind nur noch

$$\tfrac{1}{2}(2\nu-3\lambda+1)(2\nu-3\lambda+4)-\tfrac{1}{2}\sum_1^9(\nu-\gamma_i-\lambda)(\nu-\gamma_i-\lambda+1)=$$

$$=\nu+1-2\lambda$$

Punkte willkürlich wählbar. Ist also

$$2\lambda\leqq\nu+1$$

so werden solche Curven $C^{2\nu-3\lambda+1}$ wirklich existiren, und da

$$\gamma_1\leqq\frac{\nu+1}{2}$$

(nach 3) ist, wenn ν nicht 4 ist, so wird

$$\lambda+\gamma_1\leqq\nu+1 \text{ und } \nu-\lambda-\gamma_1\geqq 1,$$

d. h. die Fundamentalpunkte werden Punkte der $C^{2\nu-3\lambda+1}$ sein.

Ist $\nu = 2\nu' + 1$, so kann man $\lambda = \nu'$ setzen und erhält als Curven niedrigster Ordnung dieser Art, die sich selbst entsprechen, Curven der $(\nu'+3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in i einen $(\nu' - \gamma_i + 1)$-fachen Punkt haben, und die ein Netz bilden; denn von jeder solchen Curve sind noch $\nu + 1 - 2\lambda = 2$ Punkte frei wählbar. Die Curven, welche durch einen Punkt a der Ebene gehen, bilden einen Büschel, und schneiden sich noch in

$$(\nu'+3)^2 - \sum_1^9 (\nu'+1-\gamma_i)^2 - 1 = 1$$

Punkte, der der entsprechende α zu a sein muss.

Ist also ν ungerade, so können wir unsere Verwandtschaft auch durch das Netz der Curven $\left(\frac{\nu+5}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung definiren, die in jedem der neun Fundamentalpunkte i einen $\left(\frac{\nu+1}{2} - \gamma_i\right)$-fachen Punkt haben, so zwar, dass die Curven, welche durch a gehen, sich noch in dem Punkte α schneiden.

Ist $\nu = 2\nu''$ und ν'' nicht gleich 2, so kann man $\lambda = \nu''$ setzen und erhält als Curven niedrigster Ordnung solche von der $(\nu''+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in i einen $(\nu'' - \gamma_i)$-fachen Punkt haben. Diese Curven bilden einen Büschel, dessen Fundamentalpunkte in den Punkten 1—9 liegen; denn es ist

$$(\nu''+1)^2 - \sum_1^9 (\nu'' - \gamma_i)^2 = 0$$

und jede Curve ist durch einen weiteren Punkt bestimmt. Eine solche $C^{\nu''+1}$, welche durch a geht, schneidet, die C_a^3 in dem Punkte α.

Setzt man aber $\lambda = \nu'' - 1$, so erhält man Curven der $(\nu''+4)^{\text{ten}}$ Ordnung, die in i einen $(\nu''+1-\gamma_i)$-fachen Punkt haben und von jeder solchen Curve sind drei Punkte willkürlich wählbar. Die Curven $C^{\nu''+4}$ nun, welche durch einen festen Punkt b der Ebene gehen, gehen auch durch den Punkt β und bilden ein Netz sich selbst entsprechender Curven, so dass die

durch einen Punkt a gehenden Curven sich nur mehr in einem Punkte α schneiden, denn es ist

$$(\nu''+4)^2-\Sigma(\nu''+1-\gamma_i)^2-2-1=1.$$

Diese Annahme kann man auch für $\nu''=2$ machen, was von der ersteren nicht anging, da $\nu''+1=3$ wird und der Büschel selbst entsprechender Curven eben derjenige wird, von dem wir ausgingen, sobald wir den zweiten in der Tabelle angeführten Fall betrachten, für den $\gamma_1=3>\frac{\nu+1}{2}$ ist. Für den ersten Fall werden die Curven $\nu''+1^{\text{ter}}$ Ordnung Curven 3ter Ordnung, welche in 9 einen Doppelpunkt besitzen und durch die Punkte 1—3 nicht hindurch gehen, durch 4—8 einfach gehen.

Ist also ν gerade, so bilden die Curven $\left(\frac{\nu+8}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in i einen $\left(\frac{\nu}{2}+1-\gamma_i\right)$-fachen Punkt haben, und durch einen festen Punkt b der Ebene gehen ein Netz sich selbst entsprechender Curven derart, dass die Curven, welche durch den Punkt a der Ebene gehen auch durch den Punkt α, welcher a entspricht, laufen. Die Punkte b und β, welche zu den Basispunkten des Netzes gehören, haben keine Fundamentalcurven zu entsprechenden Curven, sondern einer entspricht dem andern, und ist übrigens die Verwandtschaft von der Wahl des Punktes b unabhängig.

Das Geschlecht der Curven $\frac{\nu+5}{2}$ ter Ordnung mit $\left(\frac{\nu+1}{2}-\gamma_i\right)$-fachen Punkten im Falle des ungeraden ν ist

$$\tfrac{1}{2}(\nu'+2)(\nu'+1)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu'+1-\gamma_i)(\nu'-\gamma_i)=1.$$

Für die Curven $(\nu''+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, für ein gerades ν ergibt sich, wenn ν'' nicht 2 ist und gleichzeitig $\gamma_1=3$, das Geschlecht gleich

$$\tfrac{1}{2}\nu''(\nu''-1)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu''-\gamma_i)(\nu''-\gamma_i+1)=0$$

und für die Curven $\left(\frac{\nu+8}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung ist das Geschlecht

$$\tfrac{1}{2}(\nu''+3)(\nu''+2)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu''+1-\gamma_i)(\nu''-\gamma_i)=3.$$

14. Die Curven der eben erwähnten Netze können, offenbar ohne zu zerfallen, einen Doppelpunkt nur auf der Coïncidenzcurve $H^{\nu+5}$ besitzen. Diese bildet also einen Theil der Jacobischen Curve der Netze. Der andere Theil ist:

1. Wenn $\nu=2\nu'+1$ ist, eine Curve der $3(\nu'+2)-(\nu+5)=\nu'^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist a ein Punkt derselben, so wird die Curve $C^{\nu'+3}$, die durch a geht, in a und α je einen Doppelpunkt haben müssen, also ist C_a^3 ein Bestandtheil derselben, der andere ist mithin eine Curve $C^{\nu'}$ der ν'^{ten} Ordnung, welche in dem Punkte i einen $(\nu'-\gamma_i)$-fachen Punkt besitzt. Da nun

$$\Sigma(\nu'-\gamma_i)(\nu'-\gamma_i+1)=\nu'(\nu'+3) \text{ und } \Sigma(\nu'-\gamma_i)^2=\nu'^2+1$$

ist, so ist die Curve ν'^{ter} Ordnung durch ihre vielfachen Punkte eindeutig bestimmt und diese ist mithin der andere Theil der Jacobischen Curve des Netzes der Curven $C^{\nu'+3}$. Dieselbe ist vom Geschlecht 1 und bildet mit jeder C^3 eine zerfallende $C^{\nu'+3}$.

2. Wenn $\nu=2\nu''$ ist, eine Curve der $3(\nu''+3)-(\nu+5)=$ $=(\nu''+4)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Curven des Netzes $C^{\nu''+4}$ gehen alle durch die Punkte b, β, diese sind also Doppelpunkte der Jacobischen Curve. Sei nun C_b^3 die Curve 3ter Ordnung, welche durch b, also auch durch β geht und a ein Punkt derselben, dann muss offenbar die $C^{\nu''+4}$, welche durch a geht in die C_b^3 und eine Curve $C^{\nu''+1}$ der $(\nu''+1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu zerfallen, welche letztere dem Büschel von Curven $(\nu''+1)^{\text{ter}}$ Ordnung angehört, das in diesem Falle auftritt. Ist ferner c ein nicht auf C_b^3 liegender Punkt der Jacobischen Curve, so ist C_c^3 ein Theil der zerfallenden Curve $C^{\nu''+4}$, der andere Theil muss durch b gehen und ist die Curve $C_b^{\nu''+1}$ des eben erwähnten Büschels, welche durch b geht. Diese bildet nun mit jeder C^3 eine zerfallende $C^{\nu''+4}$ und die Jacobische Curve dieses Netzes zerfällt daher in die C_b^3 und die $C_b^{\nu''+1}$, welche beide auch durch β gehen.

Ist $\nu=4$ und $\gamma_1=3$, $\gamma_i=1$ $(i=2, 3\ldots 9)$, so ist unser Netz ein solches von Curven der 6ten Ordnung, welche in $2, 3\ldots.9$ Doppelpunkte haben und durch 1 nicht hindurchgehen, und b, β zu festen einfachen Punkten besitzen. Jeder Büschel dieser Curven enthält nun zerfallende Curven 6ter Ordnung, denn die durch a gehenden C^6 schneiden sich noch in α und die durch 1 gehende Curve dieses Büschels zerfällt offenbar in die C_a^3 und in die C_b^3.

II. Erzeugung der Transformationen.

15. Wir haben in I die Ordnung ν der Curve Γ grösser als Null angenommen. Wir können aber den beiden Gleichungen

$$\sum_1^9 \gamma_i = 3\nu - 1 \qquad \sum_1^9 \gamma_i^2 = \nu^2 + 1$$

auch für $\nu = 0$ genügen, wenn wir $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots\ldots = \gamma_8 = 0$, $\gamma_9 = -1$ setzen und dann 9 als den Punkt betrachten, der Γ ersetzt. Die Beziehung zwischen den Punkten a, α ist dann folgende: Man legt durch a die Curve C_a^3 des Büschels durch 1—9, und verbindet a mit 9, der dritte Schnittpunkt von $\overline{a9}$ mit C_a^3 ist der Punkt α. Man erkennt nun leicht, dass dem Punkte $i = 1, 2 \ldots 8$ die Gerade $\overline{9i}$ als Fundamentalcurve Δ_i^1 entspricht, und dass dem Punkte 9 eine Curve 4ter Ordnung Δ_9^4 als Fundamentalcurve zugehört, welche in 9 einen dreifachen Punkt hat, und durch die übrigen 8 Punkte einfach hindurchgeht. Die in 2 und 4 abgeleiteten Formeln ergeben also auch für die obige Annahme von $\nu = 0$ richtige Werthe. Die Ordnung der Transformation wird 5.

16. Wir sahen in I, 3, dass jede Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu'}$ als Curve Γ^ν für eine Transformation angenommen werden kann und man hiedurch Transformationen höherer und niedrigerer Ordnung, als die vorgelegte erhalten kann. Ich will nun zeigen, dass überhaupt jede Γ^ν in einer Verwandtschaft niedrigerer Ordnung, als sie ergibt, Fundamentalcurve ist, und dass man also auf die angegebene Art überhaupt alle Curven Γ^ν erhält.

Zu dem Zwecke zeige ich vorerst: Ist die Verwandtschaft festgelegt durch die Grundcurve Γ^ν und entspricht dem Fundamentalpunkte i die Fundamentalcurve $\Gamma^{\nu'}$, so wird in der Verwandtschaft, welche durch die Grundcurve $\Gamma^{\nu'}$ festgelegt ist, dem Punkte i die Curve $\Gamma^{\nu'}$ als Fundamentalcurve entsprechen.

Denn Γ^ν habe in h einen γ_h-fachen und $\Gamma^{\nu'}$ einen γ_h'-fachen Punkt, dann ist nach 3 für die durch Γ^ν festgelegte Verwandtschaft, da $\Gamma^{\nu'}$ die Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu'}$ ist:

$$\nu' = \nu_i = 2\nu - 3\gamma_i + 1, \quad \gamma_i' = \gamma_{ii} = \nu - 2\gamma_i + 1, \quad \gamma_h' = \gamma_{i,h} = \nu - \gamma_i - \gamma_h.$$

Wählt man nun $\Gamma^{\nu'}$ als Grundcurve, so wird dem Punkte i als Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu' i}$ entsprechen, und zwar wird für diese

$$\nu_i' = 2\nu' - 3\gamma_i' + 1 = \nu \quad \gamma_{i,i}' = \nu' - 2\gamma_i' + 1 = \gamma_i \quad \gamma_{k,i}' = \nu' - \gamma_i' - \gamma_k' = \gamma_k$$

sein, d. h. sie ist mit Γ^{ν} identisch.

Wir werden nun gleich zeigen, dass $2\nu - 3\gamma_1 + 1 < \nu$ sein muss, dass also die Fundamentalcurve $\Delta_1^{\nu_1}$ sicherlich von niedriger Ordnung ist als Γ^{ν}. Es tritt mithin Γ^{ν} als Fundamentalcurve wenigstens in der Verwandtschaft, die durch $\Delta_1^{\nu_1}$ bestimmt ist, und deren Ordnung niedriger ist, schon auf.[1]

17. Um zu zeigen, dass $\nu_1 < \nu$ ist, zeige ich, dass wenn $\nu = 3\mu + \varepsilon$ ($\varepsilon = 0, 1, 2$) gesetzt wird, sich mit alleiniger Ausnahme dreier Fälle

$$\gamma_1 \geqq \frac{\nu - \varepsilon}{3} + \varepsilon + 1$$

ergibt.

Wäre nämlich $\gamma_1 = \mu + \varepsilon$, so folgt aus

$$\sum_1^9 \gamma_i = 9\mu + 3\varepsilon - 1$$

$$\sum_2^9 \gamma_i = 8\mu + 2\varepsilon - 1$$

und da

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_3 \geqq \gamma_4 \geqq \gamma_5 \geqq \gamma_6 \geqq \gamma_7 \geqq \gamma_8 \geqq \gamma_9 \geqq 0$$

sein soll, so folgt aus letzterer

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \mu + \varepsilon \text{ und } \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = \mu \quad \gamma_9 = \mu - 1$$

[1] Hiemit ist gleichzeitig gezeigt, dass man alle positiven ganzzahligen Lösungen der beiden Gleichungen

$$\sum_1^9 \gamma_i = 3\nu - 1 \qquad \sum_1^9 \gamma_i^2 = \nu^2 + 1$$

erhält, wenn man aus einer (ν, γ_i) bekannten $\nu_i = 2\nu - 3\gamma_i + 1$, $\gamma_{i,i} = \nu - 2\gamma_i + 1$ $\gamma_{i,k} = \nu - \gamma_i - \gamma_k$ ($i = 1, 2 \ldots 9$) bildet, wodurch $\nu' = \nu_i$, $\gamma_i' = \gamma_{i,i}$, $\gamma_k' = \gamma_{i,k}$ gesetzt, sich eine neue Lösung für ν' ergibt. Man kann hiebei von der Lösung $\nu = 0$ $\gamma_1 = \gamma_2 \ldots = \gamma_8 = 0$ $\gamma_9 = -1$ ausgehen.

daher ist

$$\sum_{1}^{9} \gamma_i^2 = \nu^2 + 1 + 2(\varepsilon^2 - \mu)$$

und es wird nur für

$$\varepsilon = 0 \qquad \mu = 0$$
$$\varepsilon = 1 \qquad \mu = 1$$
$$\varepsilon = 2 \qquad \mu = 4.$$

die Curve Γ^ν nicht zerfallen und rational sein, also für unsere Verwandtschaft Grundcurve sein können.

Für diese drei Fälle ist aber

$$\begin{aligned}
&\nu = 0 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 0 \quad \gamma_9 = -1 \\
&\nu = 4 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2 \quad \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 1 \quad \gamma_9 = 0 \qquad (A) \\
&\nu = 14 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 6 \quad \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 4 \quad \gamma_9 = 3
\end{aligned}$$

Da nun für

$$\nu = 0, \quad \nu_1 = 1$$
$$\nu = 4, \quad \nu_1 = 3$$
$$\nu = 14, \quad \nu_1 = 11$$

folgt, so ist mit alleiniger Ausnahme des Falles $\nu = 0$ stets $\nu_1 < \nu$

Wir können noch analog zeigen, dass $\gamma_9 \leqq \frac{\nu - \varepsilon}{3} - \varepsilon - 1$ ist, indem, wenn $\gamma_9 = \mu - \varepsilon$ ist, folgen würde, sobald $\varepsilon > 0$ ist

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \mu + \varepsilon, \quad \gamma_6 = \mu + \varepsilon - 1, \quad \gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = \mu - \varepsilon$$

woraus

$$\sum_{1}^{9} \gamma_i^2 = \nu^2 + 1 + 2(4\varepsilon^2 - \varepsilon - \mu)$$

sich ergibt, also nur wenn

$$\varepsilon = 1 \qquad \mu = 3$$
$$\varepsilon = 2 \qquad \mu = 14,$$

ist die betreffende Curve Γ^ν rational und zerfällt nicht. In diesen Fällen ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\nu = 10 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 4, \quad \gamma_6 = 3, \quad \gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = 2 \\
&\nu = 44 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 16, \quad \gamma_6 = 15, \quad \gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = 12 \qquad (B)
\end{aligned}$$

also $\gamma_9 = \frac{\nu-\varepsilon}{3} - \varepsilon$. Ist aber $\varepsilon = 0$, so ist $\gamma_9 < \mu - 1$, denn für $\gamma_9 = \mu - 1$ ergibt sich für alle übrigen $\gamma_i = \mu$ und daher

$$\sum_1^9 \gamma_i^2 = \nu^2 + 1 - 2\mu.$$

Eine solche Curve zerfällt stets in μ Curven 3ter Ordnung, besitzt also auch den 9. Punkt zu einem μ-fachen.

18. Wir hätten nun zwei Transformationen T_ν, $T_{\nu'}$ mit denselben neun Fundamentalpunkten gegeben und ihre Grundcurven Γ^ν, $\Gamma^{\nu'}$ hätten in dem Fundamentalpunkte i einen γ_i respective γ_i'-fachen Punkt, wobei wir von den Bedingungen $\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \ldots$ $\gamma_1' \geqq \gamma_2' \geqq \ldots$ absehen.

Wenden wir auf den Punkt a die Transformation T_ν an, wodurch wir den Punkt α erhalten, und auf diesen die Transformation $T_{\nu'}$, so erhalten wir den Punkt a', welcher daher aus a durch die Transformation $S = T_\nu . T_{\nu'}$ erhalten wird, wobei $T_\nu . T_{\nu'}$ bedeuten soll, dass zuerst T_ν und dann $T_{\nu'}$ angewendet wird.

Die Transformation S ist eine eindeutige und hat die Punkte 1—9 zu Fundamentalpunkten. Jede Curve C^3 des Büschels durch 1—9 entspricht sich selbst. Denn liegt a auf der C_a^3, so wird sowohl α als a' auf ihr liegen.

Um die Ordnung s der Transformation zu finden, brauchen wir nur die Curve G^n, welche einer Geraden g vermöge T_ν entspricht, durch $T_{\nu'}$ zu transformiren und erhalten, da G^n von der Ordnung $3\nu+5$ ist und in i je einen $(2\nu - 3\gamma_i + 1)$-fachen Punkt besitzt.

$$s = (3\nu+5)(3\nu'+5) - \sum_1^9 (2\nu - 3\gamma_i + 1)(2\nu' - 3\gamma_i' + 1)$$

$$= 9\left(\nu\nu' - \sum_1^9 \gamma_i \gamma_i'\right) + 10$$

Setzen wir daher

$$\nu\nu' - \sum_1^9 \gamma_i \gamma_{i'} = \delta_{\nu\nu'} \qquad 1)$$

so wird

$$s = 9\delta_{\nu,\nu'} + 10. \qquad 2)$$

Es möge nun der Punkt i einer Fundamentalcurve $D_i^{\nu' i}$ von der Ordnung s_i entsprechen, so müssen alle ihre Punkte durch S in den Punkt i gebracht werden, oder $D_i^{\nu' i}$ entsteht aus i durch die inverse Transformation $S^{-1} = T_{\nu'} . T_\nu$. Vermittelst $T_{\nu'}$ wird aus i eine Curve $\Delta_i^{\nu' i}$ erhalten, deren Ordnung $\nu_i' = 2\nu' - 3\gamma_i' + 1$ ist und die in i einen $\gamma_{i,i}' = \nu' - 2\gamma_i' + 1$-fachen Punkt, in h einen $\gamma_{i,h}' = \nu' - \gamma_i' - \gamma_h'$-fachen Punkt hat. Dieser $\Delta_i^{\nu' i}$ entspricht daher vermöge T_ν eine Curve der Ordnung

$$s_i = \nu_i'(3\nu+5) - (2\nu - 3\gamma_i + 1)\gamma_{i,i}' - \sum_1^{9\prime} (2\nu - 3\gamma_h + 1)\gamma_{i,h}'$$

$$= (\nu' - 2\gamma_i' + 1)(3\nu+5) - (2\nu - 3\gamma_i + 1) - \sum_1^{9} (2\nu - 3\gamma_h + 1)(\nu' - \gamma_i' - \gamma_h')$$

$$= 3\left(\nu\nu' - \sum_9^1{}' \gamma_i\gamma_i'\right) + \nu' - \nu + 3 - 3\gamma_i' + 3\gamma_i,$$

wobei $\sum_9^1{}'_h$ bedeutet, dass $h+i$ gesetzt werden soll.

Es ist mithin

$$s_i = 3(\delta_{\nu,\nu'} + \gamma_i - \gamma_i' + 1) + \nu' - \nu. \qquad (3)$$

Dahingegen entspricht dem Punkte i vermöge $S = T_\nu . T'_{\nu'}$ eine Fundamentalcurve $\mathfrak{D}_i^{\nu' i}$ von der Ordnung

$$s_i' = 3(\delta_{\nu,\nu'} + \gamma_i' - \gamma_i + 1) + \nu - \nu' \qquad 4)$$

und mithin wird einer Curve C^m von der Ordnung m als transformirte durch S eine Curve entsprechen, deren Ordnung

$$M = ms - \sum_1^9 s_i' x_i$$

ist, wenn C^m in i einen x_i-fachen Punkt hat.

Bezeichnen wir mit $\sigma_i^{(x)}$ die Vielfachheit des Punktes x für die Fundamentalcurve $D_i^{\nu' i}$, so ist $\sigma_i^{(x)}$ gleich der Anzahl der

Schnittpunkte der Curve $\Delta_x^{\nu x}$ mit $\Delta_i^{\nu' i}$, welche ausserhalb der Fundamentalpunkte liegen.

Ist also $i \mp x$, so ist:

$$\sigma_i^{(x)} = \nu_x \nu_i' - \gamma_{xx}\gamma_{i,x}' - \nu_{ix}'\gamma_{i,x} - \sum_1^9{}'' \gamma_{x,h}\gamma_{i,h}'$$

wobei Σ_h'' bedeuten soll, dass h nicht die Werthe x und i annehmen soll. Es ergibt sich mithin

$$\sigma_i^{(x)} = (2\nu - 3\gamma_x + 1)(2\nu' - 3\gamma_i' + 1) - (\nu' - \gamma_i' - \gamma_x' + \nu - \gamma_i - \gamma_x) - \\ - \sum_1^9{}_h (\nu - \gamma_x - \gamma_h)(\nu' - \gamma_i' - \gamma_h')$$

$$= \nu\nu' - \sum_1^9{}_h \gamma_h\gamma_h' + 1 + (\gamma_i - \gamma_i') + (\gamma_x' - \gamma_x)$$

also

$$\sigma_i^{(x)} = \delta_{\nu\nu'} + 1 + (\gamma_i - \gamma_i') + (\gamma_x' - \gamma_x) \qquad 5)$$

Ist aber $i = x$, so folgt

$$\sigma_i^{(i)} = \nu_i\nu_i' - \gamma_{i,i}\cdot\gamma_{i,i}' - \sum_h \gamma_{i,h}\cdot\gamma_{ih}'$$

$$= (2\nu - 3\gamma_i + 1)(2\nu' - 3\gamma_i' + 1) - (\nu - 2\gamma_i + \nu' - 2\gamma_i') - \\ - \sum_1^9{}_h (\nu - \gamma_i - \gamma_h)(\nu' - \gamma_i' - \gamma_h')$$

$$= \nu\nu' - \sum_1^9{}_h \gamma_h\gamma_h'$$

oder

$$\sigma_i^{(i)} = \delta_{\nu\nu'} \qquad 5\,a)$$

d. h. jede $D_i^{\nu i}$ geht gleich oft durch den ihr entsprechenden Punkt i.

Für die $\mathfrak{D}_i^{\nu' i}$, welche dem Punkt i entspricht, ergibt sich die Vielfachheit $\sigma_i'^{(x)}$ des Punktes x als Anzahl der Schnittpunkte der Curve $\Delta_x^{\nu' x}$ mit $\Delta_i^{\nu i}$, also ist

$$\sigma_i'^{(x)} = \delta_{\nu\nu'} + 1 + (\gamma_x - \gamma_x') + (\gamma_i' - \gamma_i) = \sigma_x^{(i)}$$

$$\sigma_i'^{(i)} = \delta_{\nu\nu'} \qquad 6)$$

19. Die Beziehung der Punkte a, a' auf einer Curve C_a^3 ist bekanntlich derartig, dass entweder kein Punkt a mit seinem entsprechenden a' zusammenfällt, oder dass jeder mit seinen entsprechenden coïncidirt und dass also dann die Curve 3ter Ordnung ein Theil der Coïncidenzcurve wird. Es kann auf C_a^3 der Punkt a' nur mit a zusammenfallen, wenn der Punkt γ in dem C_a^3 die Γ^ν trifft, identisch ist mit dem Schnittpunkte γ' von C_a^3 mit $\Gamma^{\nu'}$, d. h. wenn C_a^3 durch den Schnittpunkt von Γ^ν mit $\Gamma^{\nu'}$ geht, der ausserhalb der Fundamentalpunkte liegt. Dann ist aber C_a^3 eine Curve, deren Punkte mit ihren entsprechenden coïncidiren. Die Coïncidenzcurve der Transformation S besteht daher aus den $\delta_{\nu,\nu'}$ Curven 3ter Ordnung, welche durch die $\delta_{\nu,\nu'}$ Schnittpunkte von Γ^ν mit $\Gamma^{\nu'}$, die ausserhalb der Fundamentalpunkte fallen, (Glg. 1) gehen. Ist $\delta_{\nu,\nu'}=0$, d. h. schneiden sich Γ^ν und $\Gamma^{\nu'}$ nicht ausserhalb der Fundamentalpunkte, so existirt keine Coïncidenzcurve, gleichzeitig geht keine $D_i^{\nu i}$ respective $\mathfrak{D}_i^{\nu' i}$ durch i. Ist $\delta_{\nu,\nu'}\neq 0$, so berührt jede $D_i^{\nu i}$ respective $\mathfrak{D}_i^{\nu' i}$ die $\delta_{\nu,\nu'}$ Curven 3ter Ordnung in i.

Nehmen wir beispielsweise als Γ^ν und $\Gamma^{\nu'}$ zwei Fundamentalcurven, welche den Punkten i und $\varkappa$ entsprechen, in der durch die Grundcurve Γ^μ mit δ_i-fachen Punkten bestimmten Verwandtschaft also

$$\nu=2\mu-3\delta_i+1 \qquad \gamma_i=\mu-2\delta_i+1 \qquad \gamma_h=\mu-\delta_i-\delta_h$$
$$\nu'=2\mu-3\delta_\varkappa+1 \qquad \gamma'_\varkappa=\mu-2\delta_\varkappa+1 \qquad \gamma'_\varkappa=\mu-\delta_\varkappa-\delta_h$$

so wird $\delta_{\nu,\nu'}=0$, (I, 5) also $s=10$

$$s_h=3 \quad (h\neq i,\varkappa); \quad s_i=6 \quad s_\varkappa=0.$$

Die Curven D_h^3 haben in $\varkappa$ einen Doppelpunkt und gehen durch alle Punkte bis auf die Punkte i und h, wo sie nicht hindurchgehen. D_i^6 hat in $\varkappa$ einen dreifachen Punkt in den übrigen Punkten Doppelpunkte, und geht ebenfalls nicht durch i.

Wir wollen diese Transformation mit $S_{i,\varkappa}$ bezeichnen, und die den Curven $\Delta_i^{\mu i}=\Gamma^\nu$ und $\Delta_\varkappa^{\mu\varkappa}=\Gamma^{\nu'}$ entsprechenden Transformationen mit $T_i, T_\varkappa$, so ist $T_i . T_\varkappa = S_{i,\varkappa}$, d. h. $T_i = S_{i,\varkappa} T_\varkappa$ oder man kann die involutorische Cremonatransformation, welche der Grundcurve $\Delta_i^{\nu i}$ entspricht, erhalten, wenn man die bestimmte Transformation 10ter Ordnung $S_{i,\varkappa}$ und hierauf die involutorische Transformation, welche zu einer zweiten Fundamentalcurve $\Delta_\varkappa^{\nu\varkappa}$ gehört,

anwendet. Ist $\delta_i > \delta_x$ also $\nu < \nu'$, so folgt hieraus, wie man durch $S_{i,x}$ die Ordnung von T_x erniedrigen kann, was später noch deutlicher gezeigt werden soll.

Auf einer Curve 3ter Ordnung des Büschels durch 1—9, liegen, wie wir sahen, vier Punkte der Coïncidenzcurve $J^{\nu+5}$ der Verwandtschaft $T_{\nu,\nu'}$, geht nun C^3 durch einen Schnittpunkt von Γ^ν und $\Gamma^{\nu'}$, d. h. entsprechen sich ihre Punkte in der Transformation S selbst, so müssen offenbar ihre Schnittpunkte mit der Coïncidenzcurve der einen Verwandtschaft T_ν auch auf der Coïncidenzcurve der anderen $T_{\nu'}$ liegen. Nun gehen aber alle Coïncidenzcurven, wie wir in I, 8 erkannten, durch die zwölf Punkte, in denen die Curven C^3 des Büschels Doppelpunkte haben, also müssen sich die beiden Coïncidenzcurven $J^{\nu+5}$ und $J^{\nu'+5}$ in $4\delta_{\nu,\nu'}+12$ Punkten ausserhalb der Fundamentalpunkte schneiden. In der That liefert die Gleichung

$$(\nu+5)(\nu'+5) - \sum_1^9 (\nu - 2\gamma_i + 1)(\nu' - 2\gamma_i' + 1) = 4\delta_{\nu,\nu'} + 12$$

die Bestätigung.

20. Das Entsprechen der Punkte a, a' auf der Curve C_a^3 vermöge S ist im Allgemeinen kein involutorisches. Denn schneidet C_a^3 die Γ^ν in γ und $\Gamma^{\nu'}$ in γ', so bestimmt $\overline{\gamma a}$ auf C_a^3 den Punkt α und $\overline{\gamma'\alpha}$ den Punkt a'. Schneidet nun $\overline{\gamma a'}$ die C_a^3 in α' und $\overline{\gamma'\alpha'}$ in a'', so wird a'' dem Punkte a vermöge S^2 entsprechen. Soll nun a'' mit a zusammenfallen, so wird das Viereck $a\alpha a'\alpha'$ der C_a^3 eingeschrieben sein und ein Paar Gegenecken desselben γ, γ' liegen auch auf C_a^3, daher bilden nach einem bekannten Satze $a\alpha a'\alpha'$ ein Quadrupel von Punkten mit gemeinsamem Tangentialpunkt und auch γ, γ' haben denselben Tangentialpunkt. Umgekehrt haben γ, γ' auf einer C^3 denselben Tangentialpunkt, so wird a'' stets mit a zusammenfallen, d. h. auf C^3 ist das Entsprechen der Punkte ein involutorisches. Es frägt sich, wie viel solcher Curven C^3 existiren, auf denen die Punkte sich involutorisch entsprechen.

Ist γ der Schnittpunkt von Γ^ν mit einer beliebigen C^3, so liegt der Tangentialpunkt γ_1 desselben für die C^3 auf einer bestimmten rationalen Curve Γ^N der Ordnung N, welche ihre vielfachen Punkte nur in den Fundamentalpunkten hat. Fällt nun einer der

drei anderen Berührungspunkte, der von γ_1 an C^3 gehenden Tangenten auf $\Gamma^{\nu'}$, so ist dieser mit γ zusammen ein solches Punktepaar, welches auf der C^3 ein involutorisches Entsprechen bewirkt. Den Ort J^m der drei Berührungspunkte der von γ_1 an die C^3 gehenden Tangenten erhalten wir nun folgendermassen.

Es ist Γ^N die Curve, welche der Grundcurve Γ^ν vermöge T_ν entspricht, also ist

$$N = \nu(3\nu+5) - \sum_1^9 \gamma_i(2\nu - 3\gamma_i + 1) = 4(\nu+1)$$

und diese Curve hat in i einen Γ_i-fachen Punkt, wenn Γ_i die Anzahl Schnittpunkte von $\Delta_i^{\nu-\gamma_i}$ mit Γ^ν ausserhalb der Fundamentalpunkte gelegen, bedeutet. Also ist

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \nu\nu_i - \gamma_i(\nu - 2\gamma_i + 1) - \sum_k{}' \gamma_k(\nu - \gamma_i - \gamma_k)\\ &= \nu(2\nu - 3\gamma_i + 1) - \gamma_i - \sum_1^9{}_k \gamma_k(\nu - \gamma_i - \gamma_k)\\ &= 2(\nu - \gamma_i) + 1.\end{aligned}$$

Es ergibt sich nun auch, wie es sein muss

$$\begin{aligned}\Sigma\Gamma_i &= 3N - 1\\ \Sigma\Gamma_i^2 &= N^2 + 1.\end{aligned}$$

Nehmen wir nun Γ^N als Grundcurve zur Bestimmung einer neuen Verwandtschaft T_N, so wird die Coïncidenzcurve dieser offenbar Γ^ν als Theil enthalten und der übrige Theil wird eine Curve J^m der m^{ten} Ordnung sein, welche die drei Punkte enthält, die mit dem Schnittpunkte von C^3 mit Γ^ν zusammen ein Quadrupel auf C^3 bilden.

Nun ist nach I, 7 die Ordnung der Coïncidenzcurve $N+5 = 4\nu+9$ also ist $m = 3(\nu+3)$. Ferner hat die Coïncidenzcurve in i einen $N - 2\Gamma_i + 1 = 4\gamma_i + 3$-fachen Punkt, also hat J^m in i noch einen $m_i = 3(\gamma_i+1)$-fachen Punkt.

Es schneidet nun J^m die $\Gamma^{\nu'}$ in

$$\begin{aligned}\nu' m - \Sigma m_i\gamma_i' &= 3(\nu+3)\nu' - 3\Sigma p_i'(\gamma_i+1)\\ &= 3\delta_{\nu\nu'} + 3\end{aligned}$$

Punkten. Es gibt daher $3(\delta_{\nu,\nu'}+1)$ Curven 3ter Ordnung des Büschels durch 1—9, auf denen das Entsprechen der Punkte vermöge S involutorisch ist. Denn ist γ' einer dieser Schnittpunkte, und γ der Schnittpunkt von $C^3_{\gamma'}$ mit Γ^ν, so haben γ, γ' auf $C^3_{\gamma'}$ denselben Tangentialpunkt.

21. Wendet man auf einen Punkt a hintereinander drei Transformationen T , $T_{\nu'}$, $T_{\nu''}$ an, so zwar, dass dem a der Punkt α diesem α' und diesem α' entspricht, so ergibt sich, wenn $\gamma, \gamma', \gamma''$ die drei Schnittpunkte von C^3_a mit Γ^ν, $\Gamma^{\nu'}$, $\Gamma^{\nu''}$ sind, α als Schnittpunkt von $\overline{\gamma a}$, α' als Schnittpunkt von $\overline{\gamma'\alpha}$ und α' als Schnittpunkt von $\overline{\gamma''\alpha'}$ mit C^3_a, und daher ist das Entsprechen der Punkte $a\alpha'$ ein involutorisches, indem für alle Punkte der festen Curve C^3 die Geraden $\overline{a\alpha'}$ durch einen festen Punkt γ''' von C^3 laufen. Das Resultat der drei hintereinander ausgeführten Transformationen T_ν, $T_{\nu'}$, $T_{\nu''}$ ist mithin wieder eine involutorische, eindeutige Transformation $T_{\nu'''}$, deren Grundcurve $\Gamma^{\nu'''}$ den Ort der Punkte γ''' für alle Curven des Büschels der C^3 bildet. Es ist $T_{\nu'''} = T_\nu . T_{\nu'} . T_{\nu''}$ in früher angegebenem Sinne.

Was zunächst die Ordnung n''' dieser Transformation anbelangt, so ergibt sich dieselbe aus der Ordnung der Curve, welche vermöge $T_{\nu''}$ der G^s entspricht, die zu Folge $S = T_\nu . T_{\nu'}$ einer Geraden g correspondirt, und die in i je s_i-fache Punkte hat, d. h. es ist

$$n''' = n'' s - \sum_1^9 s_i \nu_i''$$

also zufolge der Gleichungen 2) und 3)

$$n''' = (3\nu''+5)(9\delta_{\nu,\nu'}+10) - \sum_1^9 (2\nu''-3\gamma_i''+1)(3\delta_{\nu,\nu'}+3+\nu'-\nu+3\gamma_i-3\gamma_i')$$

$$= 9(\delta_{\nu,\nu'}+\delta_{\nu',\nu''}-\delta_{\nu,\nu''})+3(\nu+\nu''-\nu')+14$$

wobei

$$\delta_{\nu,\nu'} = \nu\nu' - \Sigma\gamma_i\gamma_i' \qquad \delta_{\nu',\nu''} = \nu'\nu'' - \Sigma\gamma_i'\gamma_i'' \qquad \delta_{\nu,\nu''} = \nu\nu'' - \Sigma\gamma_i\gamma_i''$$

ist. Hieraus ergibt sich die Ordnung der Curve $\Gamma^{\nu'''}$

$$\nu''' = \frac{n'''-5}{3} = 3(\delta_{\nu\nu'}+\delta_{\nu'\nu''}-\delta_{\nu\nu''})+\nu+\nu''-\nu'+3 \qquad 7)$$

Um die Curve $\Delta_i^{\nu'''i}$ zu bestimmen, welche dem Punkte i entspricht, bemerken wir, dass sie der Ort ist, welcher dem Punkte i vermöge $T_\nu . T_{\nu'} . T_{\nu''}$ entspricht. Nun entspricht dem Punkte i vermöge $T_\nu . T_{\nu'}$ die Curve $\mathfrak{D}_i^{\nu'i}$, welche in $\varkappa$ einen $\sigma_i^{(\varkappa)} = \sigma_\varkappa^{(i)}$-fachen Punkt hat. Dieser wird mithin vermöge $T_{\nu''}$ eine Curve entsprechen, deren Ordnung

$$\nu_i''' = n''\varepsilon_i' - \sum_1^9 \sigma_\varkappa^{(i)}\nu_\varkappa''$$

ist. Zufolge 4) und 5) und 6) wird

$$\nu_i''' = (3\nu''+5)(3\delta_{\nu\nu'}+3+3\gamma_i'-3\gamma_i+\nu-\nu') - \\ -\delta_{\nu\nu'}(2\nu''-3\gamma_i''+1) - \sum_\varkappa{}' \sigma_\varkappa^{(i)}\nu_\varkappa''$$

$$= (3\nu''+5)(3\delta_{\nu\nu'}+3+3\gamma_i'-3\gamma_i+\nu-\nu')+(2\nu''-3\gamma_i''+1) - \\ -\Sigma(2\nu''-3\gamma_\varkappa''+1)(\delta_{\nu\nu'}+1+\gamma_i'-\gamma_i+\gamma_\varkappa-\gamma_\varkappa')$$

$$\nu_i''' = 3(\delta_{\nu\nu'}+\delta_{\nu'\nu''}-\delta_{\nu\nu''})+2(\nu+\nu''-\nu')-3(\gamma_i+\gamma_i''-\gamma_i')+4 \qquad 8)$$

Da nun $\nu_i''' = 2\nu''' - 3\gamma_i''' + 1$ ist, so ergibt sich

$$\gamma_i''' = (\delta_{\nu\nu'}+\delta_{\nu'\nu''}-\delta_{\nu\nu''})+(\gamma_i+\gamma_i''-\gamma_i')+1 \qquad 9)$$

Aus diesen Werthen in 7), 8), 9) folgt nun auch, wie es sein muss

$$\sum_1^9 \gamma_i'' = 3\nu''' - 1 \qquad \sum_1^9 \gamma_i'''^2 = \nu'''^2 + 1.$$

Aus dem Baue der Grössen ν''', γ_i''' erkennt man ohne weiters, dass die Transformation $T_{\nu'''} = T_\nu . T_{\nu'} . T_{\nu''}$ involutorisch ist, denn es ergeben sich für $T_{\nu''} . T_{\nu'} . T_\nu$ dieselben Werthe, also ist auch $T_{\nu'''} = T_{\nu''} . T_{\nu'} . T_\nu$ und daher

$$T_{\nu'''}^2 = T_\nu . T_{\nu'} . T_{\nu''} . T_{\nu''} . T_{\nu'} . T_\nu = 1$$

wenn mit 1 die Identität bezeichnet wird.

22. Setzen wir nun

für $T_\nu \ldots\ldots \gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_3 \geqq \gamma_4 \geqq \gamma_5 \geqq \gamma_6 \geqq \gamma_7 \geqq \gamma_8 \geqq \gamma_9 \geqq 0$

fest und nehmen

für $T_{\nu'} \ldots\ldots \nu' = 0 \quad \gamma_1' = \gamma_2' = \gamma_3' = \gamma_4' = \gamma_5' = \gamma_6' = \gamma_7' = \gamma_8' = 0$
$\gamma_9' = -1$

$T_{\nu''} \ldots\ldots \nu'' = 0 \quad \gamma_1'' = -1 \quad \gamma_2'' = \gamma_3'' = \gamma_4'' - \gamma_5'' = \gamma_6'' = \gamma_7''$
$= \gamma_8'' = \gamma_9'' = 0$

so wird

$$\nu''' = \nu + 3 - 3(\gamma_1 - \gamma_9).$$

Da nun nach 17 pag. 493

$\gamma_1 \geqq \frac{\nu - \varepsilon}{8} + \varepsilon + 1$ mit Ausnahme der Fälle (*A*) (pag. 494)

und

$\gamma_9 \leqq \frac{\nu - \varepsilon}{3} - \varepsilon - 1$ „ „ „ „ (*B*) (pag. 494)

so ist

$$\gamma_1 - \gamma_9 \geqq 2\varepsilon + 2$$

und daher

$$\nu''' \leqq \nu - 3 - 6\varepsilon$$

In den Fällen (*A*) ist sobald $\nu > 0$ ist, $\gamma_1 - \gamma_9 = 2$, respective 3, also $\nu''' = 1$ respective 8 in den Fällen (*B*) ist $\gamma_1 - \gamma_9 = 2$, respective 4 und $\nu''' = 7$ respective 35, also ist für alle möglichen $\nu > 0$ stets

$$\nu''' \leqq \nu - 3$$

d. h. also: wendet man auf die Transformation S_ν eine Transformation $\mathfrak{S}_{9,1} = T_0^{(9)}\, T_0^{(1)}$ an, wobei $T_0^{(9)}$ die Transformation für $\nu = 0$ sein soll, welche den Punkt $\gamma = -1$ in 9 hat, so wird der Grad der Transformation wenigstens um neun Einheiten erniedrigt.

Die Transformation $\mathfrak{S}_{9,1}$ hat als Curven $D_i^{s_i}$ folgende:

$$s_1 = 6, \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = s_8 = 3, \quad s_9 = 0,$$

und zwar haben die Curven 3ter Ordnung in 9 je einen Doppelpunkt, gehen durch 1 und den ihnen entsprechenden Punkt nicht.

Die Curve 6ter Ordnung hat in 2—8 Doppelpunkte in 9 einen dreifachen Punkt und geht durch 1 nicht hindurch. Diese $\mathfrak{S}_{9,1}$ ist also identisch mit der früher in 19, als $S_{1,9} = T_1 . T_9$ bezeichneten.

Da nun

$$T_{\nu'''} = T_\nu . \mathfrak{S}_{9,1}$$

ist und $T_{\nu'''}$ eine um wenigstens neun Einheiten niedrigere Transformation ist, so sieht man, dass, wenn man auf diese wieder eine $\mathfrak{S}_{i,\varkappa}$ passend anwendet, man zu einer noch niedrigeren Verwandtschaft gelangt und so schliesslich zu einer Transformation 5ter, 8ter oder 11ter Ordnung anlangt, denn es ist immer $\nu''' \equiv \nu$ modulo 3. Um dies aber zu bewirken, hat man für $\mathfrak{S}_{i,\varkappa}$ den Punkt i in den niedrigsten und $\varkappa$ in den höchst Vielfachen von $\Gamma^{\nu'''}$ zu legen.

Es ist nach Glg. 9)

$$\gamma_i''' = \gamma_9 - \gamma_1 + \gamma_i + \gamma_i'' - \gamma_i' + 1$$

also

$$\gamma_1''' = \gamma_9, \quad \gamma_k''' = \gamma_9 + 1 - (\gamma_1 - \gamma_k), \quad \gamma_9''' = 2(\gamma_9 + 1) - \gamma_1$$

woraus leicht erkennbar, in welcher Abstufung die Vielfachheit der Punkte vorhanden ist.

Ist $\gamma_1 - \gamma_9 = 2\lambda + \rho$ $(\rho = 0, 1)$ und $\lambda > 3$, so kann man auf $T_{\nu'''}$ nochmals $\mathfrak{S}_{9,1}$ anwenden, denn es ergibt sich dann

$$\nu'''' = \nu''' + 3 - 3(\gamma_1''' - \gamma_9''') = \nu''' + 9 - 3(\gamma_1 - \gamma_9)$$

also

$$\nu'''' = \nu - 2 . 3(\gamma_1 - \gamma_9 - 2)$$

nach nochmaliger Anwendung von $\mathfrak{S}_{9,1}$ erhält man für die Ordnung der Grundcurve

$$\nu - 3 . 3(\gamma_1 - \gamma_9 - 3)$$

also nach μ-maliger Anwendung derselben $\mathfrak{S}_{9,1}$ erhält man als Ordnung der Grundcurve

$$\nu - 3\mu(\gamma_1 - \gamma_9 - \mu)$$

und offenbar wird diese Ordnung immer kleiner werden, so lange $\mu < \lambda$ ist. Wir erhalten daher nach λ-maliger Anwendung derselben Transformation $\mathfrak{S}_{9,1}$ auf die Transformation T, eine

Transformation $T_{\nu'}$ für die $\nu' = \nu - 3\lambda(\gamma_1 - \gamma_9 - \lambda)$, wobei ν' durch nochmaliges Anwenden derselben $\mathfrak{S}_{9,1}$ nicht mehr erniedrigt wird.

Daher ist

$$T_{\nu'} = T_\nu \cdot \mathfrak{S}^{\lambda}_{9,1}$$

Dasselbe Verfahren können wir nun auf $T_{\nu'}$ anwenden. Es seien α_9 und α_1 der niedrigste und höchst vielfache Punkt von Γ'', dann wird wenn $\gamma_{\alpha_1} - \gamma_{\alpha_9} = 2\lambda_\alpha + \rho$ analog

$$T_{\nu''} = T_{\nu'} \cdot \mathfrak{S}^{\lambda\alpha}_{\alpha_9, \alpha_1}$$

also

$$T_{\nu''} = T_\nu \cdot \mathfrak{S}^{\lambda}_{9,1} \cdot \mathfrak{S}^{\lambda\alpha}_{\alpha_9, \alpha_1}.$$

Offenbar kann man so fortfahren, bis man auf die Transformationen 5ter, 8ter oder 11ter Ordnung gelangt, für welche die Grundcurve von der 0ten, 1ten, 2ten Ordnung ist. Ist also $\nu \equiv \varepsilon \pmod 3$ und $\varepsilon = 0, 1, 2$, so wird

$$T_\varepsilon = T_\nu \cdot \mathfrak{S}^{\lambda}_{9,1} \cdot \mathfrak{S}^{\lambda\alpha}_{\alpha_9, \alpha_1} \cdots \mathfrak{S}^{\lambda\mu}_{\mu_9, \mu_1}$$

und daher

$$T_\nu = T_\varepsilon \cdot \mathfrak{S}^{\lambda\mu}_{\mu_1, \mu_9} \cdots \mathfrak{S}^{\lambda\alpha}_{\alpha_1, \alpha_9} \cdot \mathfrak{S}^{\lambda}_{1,9}$$

da $\mathfrak{S}_{\mu_9, \mu_1} \cdot \mathfrak{S}_{\mu_1, \mu_9} = 1$, die Identität gibt.

Man kann daher durch passend angewendete Transformationen S der 10ten Ordnung auf eine Transformation der 5ten, 8ten oder 11ten Ordnung jede Transformation T_ν beliebig hoher Ordnung erzeugen.

Nun kann man aber auch T_2 durch T_0 und T_1 erzeugen. Setzt man nämlich in Formel 7)

$$T_0^{(\cdots)} \ldots \nu = 0 \quad \gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = 0 \quad \gamma_4 = 0 \quad \gamma_5 = 0 \quad \gamma_6 = 0 \quad \gamma_7 = 0 \quad \gamma_8 = 0 \quad \gamma_9 = -1$$

$$T_1^{(8,7)} \quad \nu' = 1 \quad \gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = 0 \quad \gamma_4 = 0 \quad \gamma_5 = 0 \quad \gamma_6 = 0 \quad \gamma_7 = 1 \quad \gamma_8 = 1 \quad \gamma_9 = 0$$

$$T_0^{(6)} \ldots \nu'' = 0 \quad \gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = 0 \quad \gamma_4 = 0 \quad \gamma_5 = 0 \quad \gamma_6 = -1 \quad \gamma_7 = 0 \quad \gamma_8 = 0 \quad \gamma_9 = 0$$

so wird

$$T_0^{(\cdots)} \cdot T_1^{(8,7)} \cdot T_0^{(6)} = T_2$$

Da sich aus 7) $\nu''' = 2$ ergibt und zwar geht der Kegelschnitt durch die Punkte 1 bis 5, da

$$\gamma_1''' = \gamma_2''' = \gamma_3''' = \gamma_4''' = \gamma_5''' = 1 \quad \gamma_6''' = \gamma_7''' = \gamma_8''' = \gamma_9''' = 0$$

folgt.

Wir können daher als eigentlich erzeugende Operationen unserer Reihe von Transformationen die Transformation 5ter und 8ter Ordnung ansehen. Eine ungerade Anzahl dieser hintereinander ausgeführt, gibt stets eine Transformation unserer Reihe, und man erhält dieselben auf diese Art auch alle.

III. Die sich selbst entsprechenden Curven der Verwandtschaft.

23. Wir haben gesehen, dass in der Verwandtschaft $(3\nu+5)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Grundcurve $\Gamma^{\nu}_{\gamma_i}$ der ν^{ten} Ordnung mit γ_i-fachen Punkten in den Fundamentalpunkten, festgelegt ist, einer Curve $C^m_{m_i}$ der m^{ten} Ordnung mit m_i-fachen Punkten in den Fundamentalpunkten eine Curve $C^{m'}_{m'_i}$ der m'^{ten} Ordnung mit m'_i-fachen Punkten entspricht, und zwar ist

$$m' = (3\nu+5)m - \sum_1^9 m_i(2\nu - 3\gamma_i + 1)$$

und

$$m'_i = (2\nu - 3\gamma_i + 1)m - m_i - \sum_1^9 m_x(\nu - \gamma_i - \gamma_x)$$

da m'_i die Anzahl Schnittpunkte von $C^m_{m_i}$ mit der Fundamentalcurve $\Delta^{\gamma_i}_i$ ist, die ausserhalb der Fundamentalpunkte liegen. Hat $C^m_{m_i}$ noch ausserhalb der Fundamentalpunkte in a einen vielfachen Punkt, so hat $C^{m'}_{m'_i}$ in α einen genau so vielfachen Punkt.

Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^9 m_i &= 3m - r \\ \Sigma m_i\gamma_i &= \nu m - d \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Dann ist also r die Anzahl Schnittpunkte einer Curve C^a des Büschels mit $C^m_{m_i}$ und d die Anzahl Schnittpunkte der $C^m_{m_i}$ mit $\Gamma^{\nu}_{\gamma_i}$

Beide Zahlen d und r sind daher ihrer Natur nach positiv. Die obigen Gleichungen für m' und m_i' nehmen dann die Form an:

$$\left.\begin{aligned} m' &= 2m-3d+(2\nu+1)r \\ m_i+m_i' &= m-d+r(\nu-\gamma_i) \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Bezeichnen wir mit p das Geschlecht der Curve $C^m_{m_\varrho}$ so wird

$$p=\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)-\tfrac{1}{2}\sum_1^9 m_i(m_i-1)$$

und zufolge 1) ergibt sich

$$2p-2+r=m^2-\sum_1^9 m_i'=m'^2-\sum_1^9 m_i'^2 \qquad 3)$$

Die Curve $C^{m'}_{m_i'}$ schneidet eine Curve C^3 des Büschels natürlich auch nur in r Punkten, die den r Schnittpunkten von $C^m_{m_i}$ mit C^3 entsprechen. Hingegen ergibt sich

$$d'=\nu m'-\Sigma m_i'\gamma_i$$

und mit Rücksicht auf 2) und 1)

$$d'=m-2d+(2\nu+1)r \qquad 4)$$

oder da

$$m'=2m-3d+(2\nu+1)r$$

ist, folgt

$$m'-d'=m-d. \qquad 5)$$

Die Curve $C^m_{m_i}$ schneidet die ihr entsprechende Curve $C^{m'}_{m_i'}$ auf der Coïncidenzcurve $J^{\nu+5}$ der Verwandtschaft und in einer Anzahl π von Punktepaaren der Verwandtschaft.

Die j Schnittpunkte von $C^m_{m_i}$ mit $J^{\nu+5}$ ergeben sich

$$j=(\nu+5)m-\sum_1^9 m_i(\nu-2\gamma_i+1)=2m-2d+r(\nu+1) \qquad 6)$$

und $C^{m'}_{m_i'}$ kann ausser in diesen die $J^{\nu+5}$ nicht mehr begegnen. Da letztere nun in $j'=2m'-2d'+r(\nu+1)$ Punkten schneidet, so folgt $j-j'=2(m-m'+d'-d)=0$ nach 5) also $j=j'$ wie es sein muss.

Die 2π übrigen Schnittpunkte von $C^m_{m_i}$ und $C^{m'}_{m'_i}$ geben die π auf $C^m_{m_i}$ liegenden Paare der Verwandtschaft.

Es wird

$$2\pi = mm' - j - \Sigma m_i m'_i$$

folgen, und aus 2), 3) und 6) ergibt sich

$$\pi = \tfrac{1}{2}(r-1)(2m-2d+r\nu) - p - r + 1. \qquad 7)$$

Die Geraden, welche die Punkte a der Curve $C^m_{m_i}$ mit den entsprechenden α von $C^{m'}_{m'_i}$ verbinden, hüllen eine Curve $\mathfrak{C}$ der Classe c ein. Da die Paare a, α, welche auf den Geraden durch einen Punkt k der Ebene liegen, sich auf einer Curve $k^{2\nu+1}$ befinden (I, 6), so ergibt sich die Zahl c als Anzahl Schnittpunkte der $C^m_{m_i}$ mit $k^{2\nu+1}$, so dass also

$$c = m(2\nu+1) - \Sigma m_i(\nu - \gamma_i)$$

wird, oder mit Rücksicht auf 1)

$$c = m - d + \nu r. \qquad 8)$$

24. Soll nun eine Curve $C^m_{m_i}$ mit ihrer entsprechenden zusammenfallen können, so muss r eine gerade Zahl sein, da die Schnittpunkte jeder Curve C^3 des Büschels sich paarweise entsprechen müssen. Setzen wir also $r = 2\rho$, so folgt aus den Gleichungen 2), wenn $m = m'$ und $m_i = m'_i$ ist:

$$\left.\begin{aligned} 3d &= m + 2(2\nu+1)\rho \\ m_i &= d - \rho(\nu + 1 + \gamma_i), \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

wenn man die zweite durch Benützung der ersten umformt.

Sind nun d, ρ und m irgend welche ganze Zahlen, welche den Gleichungen 9) genügen, so wird, da aus ihnen

$$\sum_1^9 m_i = 2m - 2\rho$$

$$\sum_1^9 m_i\gamma_i = \nu m - d$$

folgen, welches die Gleichungen 1) sind, der Curve $C^m_{m_i}$ eine Curve

$C'^{m}_{m_i}$ entsprechen, die dasselbe m und dieselben m_i besitzt, wie die Gleichungen 2) ergeben, mit Rücksicht auf 9).

Soll nun die Curve $C'^{m}_{m_i}$ mit $C^{m}_{m_i}$ zusammenfallen, so muss sich offenbar die Classe c der Enveloppe $\mathfrak{E}$ auf die Hälfte reduciren, d. h. also wenn $c=2\varkappa$ gesetzt wird, muss 8) die doppelte Classe der $\mathfrak{E}$ liefern. Mit Rücksicht auf 9) folgt dann

$$\varkappa = d-\rho(\nu+1). \qquad 10)$$

Es folgt nun umgekehrt, wenn für eine Curve $C^{m}_{m_i}$ die Gleichungen 9) und 10) gelten, so entspricht sie sich selbst. Denn zufolge 9) wird die ihr entsprechende Curve dieselbe Ordnung und dieselbe Vielfachheit der Punkte besitzen. Würde sie nun mit der ursprünglichen Curve nicht zusammenfallen, so würde die Classe c der Enveloppe $\mathfrak{E}$ nach 8) sich als $2\varkappa$ ergeben, ist diese also $\varkappa$, so müssen beide Curven zusammenfallen.

25. Es frägt sich nun, durch wie viel Paare der Verwandtschaft muss man eine $C^{m}_{m_i}$ legen, damit sie sich selbst entspricht, wenn m und m_i den Gleichungen 9) allein genügen.

Führt man in 3) die Werthe aus 9) ein, so ergibt sich für das Geschlecht der Curve $C^{m}_{m_i}$

$$2p-2+2\rho = 2\rho(m-d+\nu\rho)$$

oder

$$p+\rho-1 = \rho(m-d+\nu\rho), \qquad 11)$$

und dieselbe ist bestimmt durch $p+2\rho-1$ weitere einfache Punkte.

Die Curve $C^{m}_{m_i}$ enthält dann, wenn sie mit ihrer entsprechenden nicht zusammenfällt nach 7)

$$\pi = (2\rho-1)(m-d+\nu\rho)-p-2\rho+1$$

oder zufolge 11)

$$\pi = (\rho-1)(m-d+\nu\rho)-\rho \qquad 12)$$

Punktepaare der Verwandtschaft. Die 2π Punkte bilden mit den $j=2m-2d+2\rho(\nu+1)$ Schnittpunkten von $J^{\nu+5}$ mit $C^{m}_{m_i}$ die Basispunkte eines Büschels von Curven $C^{m}_{m_i'}$ die nicht in die Fundamentalpunkte fallen, da

$$2\pi+j = m^2-\sum_{1}^{9} m_i^2$$

ist. Jeder Curve $C^m_{m_i}$ des Büschels durch diese $2\pi+j$ Punkte wird nun eine $C'^m_{m_i}$ desselben Büschels projectivisch entsprechen, und in der Involution entsprechenden Curven dieses Büschels gibt es daher, wenn nicht alle Curven mit ihren entsprechenden zusammenfallen, höchstens zwei sich selbst entsprechende Curven.

Können wir daher Büschel von Curven $C^m_{m_i}$ construiren, in welchen wir drei sich selbst entsprechende Curven nachweisen, so müssen sich alle Curven derselben selbst entsprechen. Solche Büschel kann man aber leicht angeben. Die hiezu dienenden Sätze mögen vorangeschickt werden.

26. *a)* Wenn eine $C^m_{m_i}$, für welche die Gleichungen 9) gelten, durch $\rho-1$ Paare geht, die auf einer Curve C^3_1 des Büschels 3ter Ordnung liegen, so geht sie auch noch stets durch ein weiteres Paar. Es schneide C^3_1 die Γ'_{γ_i} in dem Punkte γ, dann gehen die Verbindungslinien der $\rho-1$ Paare $(a\ \alpha_\varepsilon)$ $\varepsilon=1, 2\ldots\rho-1$ durch γ. Aus 9) folgt nun

$$m+\rho\nu=3[d-(\nu+1)\rho]+\rho=3\varkappa+\rho$$

d. h. die Curve $C^m_{m_i}$ mit der ρmal gezählten Curve $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ gibt eine Curve derselben Ordnung, wie $\varkappa$ Curven C^3 des Büschels und ρ Gerade zusammengenommen. Beide haben überdies in den Fundamentalpunkten gleich vielfache Punkte, denn $C^m_{m_i}+(\Gamma^\nu_{\gamma_i})^\rho$ hat in i einen $(m_i+\rho\gamma_i)$-fachen Punkt und $\varkappa$ Curven C^3 haben daselbst einen $\varkappa=d-(\nu+1)\rho$-fachen Punkt und zufolge 9) ist $\varkappa=m_i+\rho\gamma_i$. Die ρ Geraden brauchen nicht mehr durch die Fundamentalpunkte zu gehen. Nehmen wir nun als diese ρ Geraden die $\rho-1$ Verbindungsgeraden $(a_\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, welche durch γ gehen, und eine weitere beliebige Gerade durch γ, welche C^3_1 in dem Paare (x, ξ) treffen soll und legen wir die $C^m_{m_i}$ durch die $2(\rho-1)$ Punkte $a_\varepsilon, \alpha_\varepsilon$ und x, so muss diese Curve auch durch ξ gehen. Denn die ρ Geraden bilden mit $\varkappa$ beliebigen Curven C^3 eine Curve der $(m+\rho\nu)$ten Ordnung, welche die C^3_1 in den Fundamentalpunkten in $(a_\varepsilon, \alpha_\varepsilon)(x, \xi)$ und γ schneidet, und zwar fallen in letzteren ρ Schnittpunkte hinein, während in den Fundamentalpunkt i je $\varkappa$ Punkte fallen. Da nun die ρmal gezählte $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ und die $C^m_{m_i}$ ebenfalls die C^3_1 in den Fundamentalpunkten i je $\varkappa$mal in γ aber

ρ mal schneidet und durch $(a_\varepsilon \alpha_\varepsilon)$ und x geht, so muss sie auch durch den letzten Schnittpunkt ξ gehen. Daher folgt: Alle Curven $C^m_{m_i\rho}$ für welche die Gleichungen 9) gelten und die durch $(\rho-1)$ Paare der Verwandtschaft gehen, die auf einer Curve 3ter Ordnung des Büschels liegen, schneiden diese immer noch in einem weitern Punktepaare.

b) Ist λ eine ganze Zahl, so folgt aus

$$\sum_1^9{}_i (m_i-\lambda) = 3(m-3\lambda)-2\rho$$

$$\sum_1^9{}_i (m_i-\lambda)\gamma_i = \nu(m-3\lambda)-(d-\lambda),$$

wenn man mit $2\rho'$ und d' die Anzahl Schnittpunkte einer $C^{m-3\lambda}_{m_i-\lambda}$ mit C^3 respective $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ bezeichnet

$$\rho' = \rho, \quad d' = d-\lambda, \tag{13}$$

und daher aus 9)

$$3(d-\lambda) = (m-3\lambda)+2(2\nu+1)\rho$$
$$m_i-\lambda = (d-\lambda)-\rho(\nu+1+\gamma_i),$$

d. h. einer $C^{m-3\lambda}_{m_i-\lambda}$ entspricht wieder eine solche Curve. Für das Geschlecht p' folgt dann aus 11)

$$p'+\rho-1 = \rho(m-d+\nu\rho-2\lambda)$$

oder

$$p' = p-2\lambda\rho \tag{14}$$

und die Anzahl Paare π', die auf dieser Curve liegen, ergibt sich aus 12)

$$\pi' = (\rho-1)(m-d+\nu\rho-2\lambda)-\rho$$

oder

$$\pi' = \pi-2\lambda(\rho-1) \tag{15}$$

während

$$j' = j-4\lambda$$

wird.

27. Nimmt man nun auf einer festen C^3 des Büschels $(\rho-1)$ Punktepaare $(a_1\alpha_2)$, $(a_1\alpha_2)\ldots(a_{\rho-1}\alpha_{\rho-1})$ der Verwandtschaft an und legt durch dieselben eine beliebige $C^m_{m_i\rho}$ für die die Gleichungen

9) gelten, so wird dieselbe, wie wir sahen, noch ein Paar a_i, α_i der Verwandtschaft ausschneiden. Hieraus folgt, dass die der $C^m_{m_i}$ entsprechende Curve $C'^m_{m_i}$ auch durch die ρ Paare auf C^3 geht. Es schneiden sich beide Curven überdies in $\pi-\rho$ Paaren und in j Punkten auf $J^{\nu+5}$.

In dem durch $C^m_{m_i}$ und $C'^m_{m_i}$ gebildeten Büschel tritt nun eine in die C^3 und $C^{m-3}_{m_i-1}$ zerfallende Curve auf, welche sich selbst entsprechen muss, da C^3 sich selbst entspricht. In der That geht $C^{m-3}_{m_i-1}$ durch die $\pi-\rho$ übrigen Paare und durch die $j-4$ Punkte auf $J^{\nu+5}$, in denen $C^{m-3}_{m_i-1}$ diese schneidet. Es muss also die $C'^{m-3}_{m_i-1}$, welche der $C^{m-3}_{m_i-1}$ entspricht, diese in $2(\pi-\rho)+j-4=2\pi'+j'+2(\rho-1)$ Punkten schneiden, also mit ihr identisch sein, da sich die Curven $C^{m-3}_{m_i-1}$ und $C'^{m-3}_{m_i-1}$ nur höchstens in $2\pi'+j'$ Punkte ausserhalb der Fundamentalpunkte schneiden können. (Für $\rho=1$ vgl. 28.)

Es folgt nun: Sind auf drei beliebigen Curven 3ter Ordnung C^3_1, C^3_2, C^3_3 des Büschels je $(\rho-1)$ Paare der Verwandtschaft angenommen, dann ist jede $C^m_{m_i}$, welche durch diese Paare geht, eine sich selbst entsprechende, sobald für sie die Gleichungen 9) stattfinden.

Es sei $C^m_{m_i}$ irgend eine durch diese drei Systeme von $(\rho-1)$ Paaren gehende Curve und $C'^m_{m_i}$ ihre entsprechende. Fiele diese mit $C^m_{m_i}$ nicht zusammen, so würden in dem aus $C^m_{m_i}$ und $C'^m_{m_i}$ gebildeten Büschel drei Curven auftreten, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen, nämlich die drei, welche in C^3_1, C^3_2, C^3_3 und je eine sich selbst entsprechende $C^{m-3}_{m_i-1}$ zerfallen; es müssten daher alle Curven des Büschels sich selbst entsprechen, also auch die beliebige Curve $C^m_{m_i}$, welche zu Grunde gelegt wurde.

Es sind nun von einer $C^m_{m_i}$ noch $q=p+2\rho-1$ Punkte beliebig was nach 11)

$$q=\rho(m-d+\nu\rho+1) \qquad 16)$$

ergibt. Legt man daher die Curven $C^m_{m_i}$ durch $3(\rho-1)$ Paare, so wird die Mannigfaltigkeit

$$\mathfrak{q}=q-6(\rho-1)=\rho(m-d+\nu\rho-5)+6 \qquad 17)$$

sein, der durch diese Punktepaare gehenden Curven $C^m_{m_i}$, die alle selbst entsprechende Curven sind.

28. Für $\rho = 1$ wird überhaupt jede Curve $C^n_{n,\rho}$ für welche

$$\left.\begin{aligned} n &= 3d - 2(2\nu+1) \\ n_i &= d - (\nu+1+\gamma_i) \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

und $n_i > 0$ ist, sich selbst entsprechen. Diese Curven sind überdies **hyperelliptisch**. Denn, da auch jede $C^{n-3}_{n_i-1}$ sich selbst in der Verwandtschaft entspricht, so wird, wenn $C^{n-3}_{n_i-1}$ durch den Punkt a von $C^n_{n_i}$ geht, sie auch durch den Punkt α auf $C^n_{n_i}$ gehen, d. h. jede adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der $C^n_{n_i}$, welche durch einen Punkt der Curve geht, geht noch durch einen zweiten mit Annahme des ersten bestimmten Punkt derselben. Hieraus folgt aber deutlich der hyperelliptische Charakter der $C^n_{n,\rho}$.[1]

Für diese Curven folgt aus 11)

$$p = n - d + \nu \qquad (19)$$

und aus 16)

$$q = p + 1$$

Die $j = 2p+2$ Schnittpunkte der $C^n_{n_i}$ mit der Coïncidenzcurve $J^{\nu+5}$ sind die zusammenfallenden Punkte der hyperelliptischen Beziehung auf $C^n_{n,\rho}$, in ihnen wird $C^n_{n_i}$ von allen adjungirten $C^{n-3}_{n_i-1}$ berührt, ebenso auch von den Curven 3ter Ordnung, welche durch diese Punkte gehen. Die $j-3 = 2p-1$ Doppelverhältnisse der Curven 3ter Ordnung des Büschels, welche nach diesen Punkten gehen, können als die Moduln der $C^n_{n_i}$ aufgefasst werden, da der Büschel der C^3 projectivisch ist einem beliebigen Büschel der $C^{n-3}_{n_i-1}$, welcher durch $p-2$ Punkte der $C^n_{n_i}$ festgelegt ist, in Anbetracht der ausgeschnittenen Paare $(a\,\alpha)$ auf $C^n_{n,\rho}$.[2] Da man von der $C^n_{n_i}$ nur $p+1$ Punkte etwa auf $J^{\nu+5}$ annehmen kann, wodurch sie bestimmt wird, so hängen die $j-3 = 2p-1$ Moduln dieser Curven nur von $p+1$ Constanten ab, und da $2p-1 > p+1$ sobald $p > 2$ ist, so sind diese hyperelliptischen Curven, wenn $p > 2$ ist, nicht die allgemeinsten ihres Geschlechtes. Eine Ausnahme tritt für $\nu = 1$ auf, indem auch noch jede C^6, welche in sieben Punkten

---

[1] Cf. Klebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie, pag. 711.

[2] Klebsch-Lindemann, l. c. pag. 717.

Doppelpunkte hat und ein Paar $(a\alpha)$ der Verwandtschaft enthält, sich selbst entspricht und die allgemeinste hyperelliptische Curve vom Geschlechte 3 wird, da man als Γ^ν eine beliebige Gerade der Ebene wählen kann, an Stelle der ursprünglich angenommenen Geraden.

Dass jede C^6, welche sieben Doppelpunkte hat und auf der zwei Punkte $(a\alpha)$ liegen, die mit den sieben Punkten die Basis eines Büschels von Curven 3ter Ordnung bilden, hyperelliptisch ist, folgt ohne weiters daraus, dass dieser Büschel 3ter Ordnung von adjungirten Curven die einfach lineare Schaar von zwei Punkten auf C^6 ausschneidet.

29. Die Classe der Enveloppe $\mathfrak{E}$ der Verbindungsgeraden entsprechenden Punkte der $C^n_{n_i}$ ergibt sich aus 10)

$$\varkappa = d-\nu-1 = n-p-1.$$

Die Envelope ist rational, da ihre Tangenten eindeutig den Curven C^3 des Büschels entsprechen, welcher die Punktepaare auf $C^n_{n_i}$ ausschneidet. In der That ergibt sich die Ordnung einfach daraus, dass einem Punkte k von $\mathfrak{E}$ eine Curve $k^{2\nu+1}$ entsprechen muss, welche $C^n_{n_i}$ in einem Punkte a, daher auch in dem entsprechenden α, berühren muss. Nun bilden die $k^{2\nu+1}$ deren Punkte k auf einer Geraden g liegen einen Büschel und jede Curve $k^{2\nu+1}$ schneidet die $C^n_{n_i}$ in $2\varkappa$ Punkten, welche $\varkappa$ Paare bilden. Die diese Paare projicirenden Curven C^3 des Büschels bilden daher eine Involution $\varkappa$ter Ordnung, in der es $2(\varkappa-1)$ Doppelelemente gibt. Die $2(\varkappa-1)$ Curven C^3 schneiden dann $C^n_{n_i}$ je in einem Paare, so dass die $k^{2\nu+1}$, welche durch dasselbe hindurchgeht, die $C^n_{n_i}$ in diesem berührt, also liegen auf g $2(\varkappa-1)$ Punkte k, deren Curven $k^{2\nu+1}$ die $C^n_{n_i}$ doppelt berühren, in a und α, und die also Punkte der Enveloppe sind.

Man findet auch die $\frac{1}{2}(\varkappa-1)(\varkappa-2)$ Doppeltangenten von $\mathfrak{E}$ folgendermassen. Auf den Tangenten von $\mathfrak{E}$ liegen nämlich noch je $(\nu-1)$ Paare der Verwandtschaft, deren Ort nach (I, 12) eine Curve K der $[\varkappa(2\nu+1)-n] = (\nu-1)(2\varkappa+1)$ten Ordnung ist, welche in i einen $\varkappa(\nu-\gamma_i)-n_i = \varkappa(\nu-1)-(\varkappa-1)\gamma_i$-fachen Punkt hat. Diese Curve K schneidet die $C^n_{n_i}$ auf der Curve $H^{5(\nu-1)}$ (I, 9), welche die coïncidirenden Paare der Verwandtschaft enthält und überdies in je Punktgruppen zu vier, welche auf einer Geraden

liegen, die die $\frac{1}{2}(\varkappa-1)(\varkappa-2)$ Doppeltangenten der $\mathfrak{E}$ bilden. Die Rechnung verificirt leicht dies Resultat.

30. Es möge noch gezeigt werden, dass jede Curve $C^n_{n_i}$ der n^{ten} Ordnung, welche in den neun Basispunkten eines Büschels von Curven 3ter Ordnung n_i-fache Punkte hat, so zwar, dass

$$\sum_1^9 n_i = 3n-2 \qquad 20)$$

ist, **hyperelliptisch** ist, sobald sie nicht zerfällt.

Ein Zerfallen kann aber nur in zwei rationale Curven der Ordnung n' und n'' stattfinden, so dass $n=n'+n''$ ist, und die Vielfachheit n'_i, n''_i die Fundamentalpunkte $n'_i+n''_i=n_i$ liefert, oder in eine $C^{n-3\lambda}_{n_i-\lambda}$ und λ Curven 3ter Ordnung des Büschels, so dass $C^{n-3\lambda}_{n_i-\lambda}$ wieder eine hyperelliptische Curve wird, die nun auch ihrerseits in zwei rationale Curven zerfallen kann, sobald $n_i-\lambda>0$ ist.

Wir setzen vor der Hand voraus, dass kein n_i Null ist. Es folgt aus 20), dass die $C^n_{n_i}$ vom Geschlechte

$$p=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}\sum_1^9 (n_i-1)n_i=\tfrac{1}{2}[n^2-\sum_1^9 n_i^2] \qquad 21)$$

wird, und durch

$$\tfrac{1}{2}(n+3)n-\tfrac{1}{2}\Sigma n_i(n_i+1)=p+1 \qquad 22)$$

Punkte bestimmt ist. Wir setzen $p>2$ voraus, da Curven vom Geschlechte 2 stets hyperelliptisch sind. Dann folgt für eine $C^{n-3\lambda}_{n_i-\lambda}$ für das Geschlecht

$$p'=p-2\lambda, \qquad 23)$$

und dass sie durch $p'+1=p-2\lambda+1$ Punkte bestimmt wird.

Da wir n_i für alle i grösser als Null voraussetzen, so werden Curven $C^{n-3}_{n_i-1}$ existiren, welche noch eine $(p-1)$-fache Mannigfaltigkeit bilden. Es schneide nun $C^n_{n_i}$ eine Curve C^3_1 des Büschels 3ter Ordnung in a, α; dann werden alle $C^n_{n_i}$, welche durch a gehen, auch durch α gehen müssen, da nun eine beliebige C^3 mit einer durch a gehenden $C^{n-3}_{n_i-1}$ zusammen, auch eine $C^n_{n_i}$ bildet, so geht

$C^{n-3}_{n_i-1}$ durch α oder jede adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der Curve $C^n_{n_i}$ welche durch einen Punkt a von $C^n_{n_i}$ geht, geht noch durch einen weiteren Punkt α der Curve $C^n_{n_i}$ diese ist also **hyperelliptisch.**

Sei nun $\varkappa$ die Classe der Enveloppe der Geraden, welche die Punktepaare der hyperelliptischen Beziehung verbinden, so ergibt das Correspondenzprincip, dass durch einen beliebigen Punkt $n-p-1$ dieser Geraden gehen, wenn man beachtet, dass auf der $C^n_{n_i}$ vom Geschlechte p stets $2p+2$ Punkte existiren, in denen zwei Punkte der hyperelliptischen Beziehung zusammenfallen. Es ist mithin $\varkappa = n-p-1$.

Die Tangenten der Enveloppe $\mathfrak{E}$ sind nun projectivisch auf die Curven 3ter Ordnung des Büschels bezogen, welcher die Paare ausschneidet, die auf ihnen liegen. Jede Tangente trifft die betreffende C^3 noch in einem Punkte γ, dessen Ort eine rationale Curve Γ^ν ist. Ihre Ordnung ν folgt:

$$\nu = 2n-3p-2 \tag{24}$$

Da das Erzeugniss des Büschels und der Enveloppe $(3\varkappa+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist und $C^n_{n_i}$ dazu gehört. Hiebei ergibt sich die Vielfachheit γ_i des Punktes i für die Curve Γ^ν

$$\gamma_i = \varkappa - n_i = n-p-n_i-1. \tag{25}$$

Es folgt nun leicht, dass

$$\Sigma\gamma_i = 3\nu-1 \qquad \Sigma\gamma_i^2 = \nu^2+1 \tag{26}$$

ist, und dass also $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ zur Festlegung einer Verwandtschaft, wie wir sie betrachtet haben, benutzt werden kann, in der sich dann $C^n_{n_i}$ offenbar selbst entspricht.

Würden nun einzelne n_i Null sein, so kann man statt $C^n_{n_i}$ der Betrachtung eine $C^{n+3\lambda}_{n_i+\lambda}$ zu Grunde legen, wo es offenbar $\lambda=1$ zu nehmen genügt, um auf die vorgegebene Art den hyperelliptischen Charakter der $C^{n+3\lambda}_{n_i+\lambda}$ zu erweisen, da die $C^n_{n_i}$ durch die n -fachen Punkte nicht bestimmt ist und aus der Annahme

$$\Sigma n_i = 3n-2$$

auch

$$\sum_1^9 (n_i+\lambda) = 3(n+3\lambda)-2$$

folgt. Ist nun $C_{n_i+\lambda}^{n+3\lambda}$ bestimmt, so wird auch $\Gamma_{\gamma_i}^{\nu}$ bestimmt sein, und in dieser Verwandtschaft sind dann offenbar alle Curven, die eine Curve C^3 des Büschels in zwei Punkten schneiden, hyperelliptisch, und entsprechen sich in der Verwandtschaft selbst. Folglich finden die Gleichungen 9) statt

$$n+3\lambda = 3(d+\lambda)-2(2\nu+1)$$
$$n_i+\lambda = d+\lambda-(\nu+1+\gamma_i)$$

aus ihnen folgt

$$n = 3d-2(2\nu+1)$$
$$n_i = d-(\nu+1+\gamma_i)$$

Setzen wir nun $0 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq n_3 \ldots \leqq n_9$ voraus, so wird nach 25) $\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_3 \ldots \geqq \gamma_9$ sein. Ist nun z. B. $n_1 = 0$, so wird

$$n = 3\gamma_1+1-\nu$$
$$n_i = \gamma_1-\gamma_i$$

und daher

$$p = 2\gamma_1-\nu$$

sein.

Nun wurde in (I, 3) gezeigt, dass, einen Fall ausgenommen, (für $\nu=4$) stets $\gamma_1 \leqq \frac{\nu+1}{2}$ ist, also $p \leqq 1$ sich ergibt, d. h. in diesem Falle ist die Curve $C_{n_i}^n$ vom Geschlechte 1, 0 oder sie zerfällt. Für $\nu=4$ und $\gamma_1=3$ ergibt sich $p=2$ und es sind dies die Curven 6ter Ordnung, welche in den Punkten 2, 3 . . . 9 Doppelpunkte haben, ein Netz bilden, und nach (I, 13) zur Bestimmung der Verwandtschaft benutzt werden können.

Zerfällt die $C_{n_i}^n$ nicht, ist also $p=0$ oder 1, so ergibt 24)

$$\nu = 2(n-2\varepsilon-1)+\varepsilon = 2\nu'+\varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1)$$

und

$$\nu' = n-2\varepsilon-1$$

oder

$$n = \nu'+2\varepsilon+1$$

und

$$n_i = \nu'+\varepsilon-\gamma_i$$

d. h. die Curve $C_{n_i}^n$ ist von der Art, wie wir sie in (I, 13) zur Bestimmung der Verwandtschaft durch ein Netz betrachtet haben.

Aus unseren früheren Betrachtungen folgt ohne weiters, dass eine $C^n_{n_i}$ für welche

$$\sum_1^9 n_i = 3n-2$$

ist, und die neun Punkte i Basispunkte eines Büschels von Curven 3ter Ordnung sind, in einem beliebigen Punkte der Ebene, ohne zu zerfallen, einen Doppelpunkt **nicht** besitzen kann, dass vielmehr der Ort der Doppelpunkte nicht zerfallender Curven eine bestimmte Curve wird, die, wenn ν aus 24) genommen ist, die Ordnung $\nu+5$ hat, und in dem Punkte i einen $(\nu-2\gamma_i+1)$-fachen Punkt besitzt, wobei γ_i der aus 25) sich ergebende Werth ist. Es ist dieser Ort die Coïncidenzcurve der durch $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ festgelegten Verwandtschaft.

Der eben erwähnte Fall $n=6$, $n_i=3$, $n_9=0$ wurde bereits von Herrn Halphen in dem Bulletin de la société mathématique 1882, tom. X, page 163 betrachtet und die Coïncidenzcurve 9ter Ordnung angegeben.

Die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraëders zweier Flächen II. Ordnung schneidenden Geraden besteht.

Von F. Mertens.

Es seien

$$(1)\quad f_x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

$$(2)\quad f'_x = a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + a'_{44}x_4^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{13}x_1x_3 + \ldots = 0$$

die Gleichungen zweier Flächen II. Ordnung, $\Delta(s,t)$, $\Phi_u(s,t)$ die Determinante und adjungirte Form der quadratischen Form $sf_x + tf'_x$, so dass also

$$\Delta(s,t) = \begin{vmatrix} sa_{11}+ta'_{11}, & sa_{12}+ta'_{12}, & sa_{13}+ta'_{13}, & sa_{14}+ta'_{14} \\ sa_{21}+ta'_{21}, & sa_{22}+ta'_{22}, & sa_{23}+ta'_{23}, & sa_{24}+ta'_{24} \\ sa_{31}+ta'_{31}, & sa_{32}+ta'_{32}, & sa_{33}+ta'_{33}, & sa_{34}+ta'_{34} \\ sa_{41}+ta'_{41}, & sa_{42}+ta'_{42}, & sa_{43}+ta'_{43}, & sa_{44}+ta'_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Phi_u(s,t) = -\begin{vmatrix} sa_{11}+ta'_{11}, & sa_{12}+ta'_{12}, & sa_{13}+ta'_{13}, & sa_{14}+ta'_{14}, & u_1 \\ sa_{21}+ta'_{21}, & sa_{22}+ta'_{22}, & sa_{23}+ta'_{23}, & sa_{24}+ta'_{24}, & u_2 \\ sa_{31}+ta'_{31}, & sa_{32}+ta'_{32}, & sa_{33}+ta'_{33}, & sa_{34}+ta'_{34}, & u_3 \\ sa_{41}+ta'_{41}, & sa_{42}+ta'_{42}, & sa_{43}+ta'_{43}, & sa_{44}+ta'_{44}, & u_4 \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0 \end{vmatrix}$$

und es sei nach den Elementen s, t entwickelt

$$\Delta(s,t) = As^4 + A_1s^3t + A_2s^2t^2 + A_3st^3 + A_4t^4$$
$$\Phi_u(s,t) = F_u.s^3 + G_u.s^2t + G'_u.st^2 + F'_u.t^3,$$

wo

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$
$$F_u,\ G_u,\ G'_u,\ F'_u$$

die bekannten Grundinvarianten und zugehörigen Formen der quadratischen Formen f_x, f'_x bezeichnen. Sind dann

$$p_1, q_1;\ p_2, q_2;\ p_3, q_3;\ p_4, q_4$$

die vier Lösungen der Gleichung

$$\Delta(s, t) = 0,$$

so sind, weil die Determinante jeder der Formen

$$p_1 f_x + q_1 f'_x,\ p_2 f_x + q_2 f'_x,\ p_3 f_x + q_3 f'_x,\ p_4 f_x + q_4 f'_x$$

verschwindet, die quadratischen Formen von u_1, u_2, u_3, u_4:

$$\Phi_u(p_1, q_1),\ \Phi_u(p_2, q_2),\ \Phi_u(p_3, q_3),\ \Phi_u(p_4, q_4) \tag{3}$$

vollständige Quadrate und wenn demgemäss

$$\begin{aligned}
\Phi_u(p_1, q_1) &= (\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4)^2 \\
\Phi_u(p_2, q_2) &= (\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 + \eta_4 u_4)^2 \\
\Phi_u(p_3, q_3) &= (\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3 + \zeta_4 u_4)^2 \\
\Phi_u(p_4, q_4) &= (\vartheta_1 u_1 + \vartheta_2 u_2 + \vartheta_3 u_3 + \vartheta_4 u_4)^2
\end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt wird, so sind

$$\begin{matrix}
\xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\
\eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\
\zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\
\vartheta_1, & \vartheta_2, & \vartheta_3, & \vartheta_4
\end{matrix}$$

die homogenen Coordinaten je eines der vier Eckpunkte des gemeinschaftlichen Poltetraëders der Flächen (1), (2).

Um die Verbindungslinien der Punkte ξ, η, ζ, ϑ durch Gleichungen darzustellen, sollen linear-homogene Ausdrücke von der Form

$$\begin{aligned}
&u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + u_4 z_4 \\
&v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + v_4 z_4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

in üblicher Weise durch u_s, v_s, ..., die (Plücker'schen) Coordinaten eines Strahles mit

$$s_{14}, s_{24}, s_{34}, s_{23}, s_{31}, s_{12}$$

und der Ausdruck

$$s_{14}(x_2x'_3-x_2x'_3)+s_{24}(x_3x'_1-x_1x'_3)+s_{34}(x_1x'_2-x_2x'_1)$$
$$+s_{23}(x_1x'_4-x_4x'_1)+s_{31}(x_2x'_4-x_4x'_2)+s_{12}(x_3x'_4-x_4x'_3)$$

mit $(\overline{xx'}, s)$ bezeichnet werden; die Reihenfolge der Strahlencoordinaten ist so gewählt, dass, wenn der Strahl durch zwei Punkte y, z bestimmt gedacht wird, allgemein für jedes Zahlenpaar $\alpha\beta$

$$s_{\alpha\beta}=\varepsilon(y_\alpha z_\beta-y_\beta z_\alpha)$$

ist. Die Gleichungen der Verbindungslinien der Punkte ξ, η, ζ, ϑ oder der Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraëders in Strahlencoordinaten lauten dann:

$$\begin{array}{lll}(\overline{\eta\zeta}, s)=0 & (\overline{\zeta\xi}, s)=0 & (\overline{\xi\eta}, s)=0\\ (\overline{\xi\vartheta}, s)=0 & (\overline{\eta\vartheta}, s)=0 & (\overline{\zeta\vartheta}, s)=0\end{array}\tag{5}$$

und es handelt sich darum, das Product

$$P=(\overline{\eta\zeta}, s)(\overline{\zeta\xi}, s)(\overline{\xi\eta}, s)(\overline{\xi\vartheta}, s)(\overline{\eta\vartheta}, s)(\overline{\zeta\vartheta}, s)$$

in rationaler Gestalt darzustellen.

Da, über alle Zahlenpaare $\alpha\beta=14, 24, 34, 23, 31, 12$ erstreckt,

$$u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi=\Sigma(u_\alpha v_\beta-u_\beta v_\alpha)(\xi_\alpha\eta_\beta-\xi_\beta\eta_\alpha)$$

ist, so lassen sich die Gleichungen (5) auch in der Form

$$\begin{array}{lll}u_\eta v_\zeta-u_\zeta v_\eta=0 & u_\zeta v_\xi-u_\xi v_\zeta=0 & u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi=0\\ u_\xi v_\vartheta-u_\vartheta v_\xi=0 & u_\eta v_\vartheta-u_\vartheta v_\eta=0 & u_\zeta v_\vartheta-u_\vartheta v_\zeta=0\end{array}$$

darstellen, wenn man sich den (laufenden) Strahl als Schnittlinie zweier Ebenen u, v denkt, d. h.

$$\begin{array}{llll}s_{14}=u_2v_3-u_3v_2 & s_{24}=u_3v_1-u_1v_3 & s_{34}=u_1v_2-u_2v_1\\ s_{23}=u_1v_4-u_4v_1 & s_{31}=u_2v_4-u_4v_2 & s_{12}=u_3v_4-u_4v_3\end{array}$$

setzt. Ein Product von der Form $(u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta-u'_\eta v'_\xi)$ lässt sich nun durch die Coëfficienten der Formen (3) ausdrücken. Es ist nämlich

$$(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)\,(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi) = u_\xi u'_\xi v_\eta v'_\eta + u_\eta u'_\eta v_\xi v'_\xi - u_\xi v'_\xi u'_\eta v_\eta - u'_\xi v_\xi u_\eta v'_\eta$$

und wenn der in u_1, u_2, u_3, u_4 und v_1, v_2, v_3, v_4 symmetrische Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left(v_1\frac{\partial\Phi_u(s,t)}{\partial u_1} + v_2\frac{\partial\Phi_u(s,t)}{\partial u_2} + v_3\frac{\partial\Phi_u(s,t)}{\partial u_3} + v_4\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial u_4}\right)$$

mit $\Phi_{uv}(s,t)$ bezeichnet wird, so ergibt sich durch Differentiation der Identitäten (4)

$$\begin{aligned} u_\xi u'_\xi &= \Phi_{uu'}(p_1, q_1) & u_\eta u'_\eta &= \Phi_{uu'}(p_2, q_2)\\ v_\xi v'_\xi &= \Phi_{vv'}(p_1, q_1) & v_\eta v'_\eta &= \Phi_{vv'}(p_2, q_2)\\ u_\xi v'_\xi &= \Phi_{uv'}(p_1, q_1) & u_\eta v'_\eta &= \Phi_{uv'}(p_2, q_2)\\ u'_\xi v_\xi &= \Phi_{u'v}(p_1, q_1) & u'_\eta v_\eta &= \Phi_{u'v}(p_2, q_2), \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi) &= \Phi_{uu'}(p_1, q_1)\Phi_{vv'}(p_2, q_2)\\ &+ \Phi_{vv'}(p_1, q_1)\Phi_{uu'}(p_2, q_2) - \Phi_{uv'}(p_1, q_1)\Phi_{u'v}(p_2, q_2)\\ &- \Phi_{u'v}(p_1, q_1)\Phi_{uv'}(p_2, q_2)\end{aligned}$$

folgt. Entwickelt man diesen Ausdruck, so lautet derselbe

$$\begin{aligned}(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi) &= 2p_1^3p_2^3(F_{uu'}F_{vv'} - F_{uv'}F_{u'v})\\ &+ p_1^2p_2^2(p_1q_2 + p_2q_1)(F_{uu'}G_{vv'} + F_{vv'}G_{uu'} - F_{uv'}G_{u'v} - F_{u'v}G_{uv'})\\ &+ p_1p_2(p_1^2q_2^2 + p_2^2q_1^2)(F_{uu'}G'_{vv'} + F_{vv'}G'_{uu'} - F_{uv'}G'_{u'v} - F_{u'v}G_{uv'})\\ &+ (p_1^3q_2^3 + p_2^3q_1^3)(F_{uu'}F'_{vv'} + F_{vv'}F'_{uu'} - F_{uv'}F'_{u'v} - F_{u'v}F'_{uv'})\\ &+ 2p_1^2p_2^2q_1q_2(G_{uu'}G_{vv'} - G_{uv'}G_{u'v})\\ &+ p_1p_2q_1q_2(p_1q_2 + p_2q_1)(G_{uu'}G'_{vv'} + G_{vv'}G'_{uu'} - G_{uv'}G'_{u'v} - G_{u'v}G'_{uv'})\\ &+ q_1q_2(p_1^2q_2^2 + p_2^2q_1^2)(G_{uu'}F'_{vv'} + G_{vv'}F'_{uu'} - G_{uv'}F'_{u'v} - G_{u'v}F'_{uv'})\\ &+ 2p_1p_2q_1^2q_2^2(G'_{uu'}G'_{vv'} - G'_{uv'}G'_{u'v})\\ &+ q_1^2q_2^2(p_1q_2 + p_2q_1)(G'_{uu'}F'_{vv'} + G'_{vv'}F'_{uu'} - G'_{uv'}F'_{u'v} - G'_{u'v}F'_{uv'})\\ &+ 2q_1^3q_2^3(F'_{uu'}F'_{vv'} - F'_{uv'}F'_{u'v}).\end{aligned}$$

Die hier auftretenden zehn Ausdrücke

$$F_{uu'}F_{vv'} - F_{uv'}F_{u'v},\ F_{uu'}G_{vv'} + F_{vv'}G_{uu'} - F_{uv'}G_{u'v} - F_{u'v}G_{uv'},\ \cdots$$

lassen sich alle in linear-homogener Weise auf sechs einfache invariante Gebilde II. Ordnung in Strahlencoordinaten zurückführen.

Es werde, über alle Zahlenpaare

$$\alpha\beta = 14,\ 24,\ 34,\ 23,\ 31,\ 12$$

und alle Zahlenpaare

$$\alpha'\beta' = 14,\ 24,\ 34,\ 23,\ 31,\ 12$$

erstreckt,

$$\Sigma(a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'} - a_{\alpha\beta'}a_{\beta\alpha'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \varphi(s_{14}, s_{24}, s_{34}, s_{23}, s_{31}, s_{12}) = \varphi_s$$
$$\Sigma(a_{\alpha\alpha'}a'_{\beta\beta'} + a_{\beta\beta'}a'_{\alpha\alpha'} - a_{\alpha\beta'}a'_{\beta\alpha'} - a_{\beta\alpha'}a'_{\alpha\beta'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \psi_s$$
$$\Sigma(a'_{\alpha\alpha'}a'_{\beta\beta'} - a'_{\alpha\beta'}a'_{\beta\alpha'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \varphi'(s_{14}, s_{24}, s_{34}, s_{23}, s_{31}, s_{12}) = \varphi'_s$$

gesetzt und es sei

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \varphi_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\psi_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \psi_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi'_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \varphi'_{\alpha\beta}.$$

Ferner sei

$$\Sigma(a_{\gamma\gamma'}a_{\delta\delta'} - a_{\gamma\delta'}a_{\delta\gamma'})\varphi'_{\alpha\beta}\varphi'_{\alpha'\beta'} = \varphi(\varphi'_{23}, \varphi'_{31}, \varphi'_{12}, \varphi'_{14}, \varphi'_{24}, \varphi'_{34}) = \omega_s$$
$$\Sigma(a'_{\gamma\gamma'}a'_{\delta\delta'} - a'_{\gamma\delta'}a'_{\delta\gamma'})\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha'\beta'} = \varphi'(\varphi_{23}, \varphi_{31}, \varphi_{12}, \varphi_{14}, \varphi_{24}, \varphi_{34}) = \omega'_s$$
$$\Sigma(A_{\gamma\gamma'}A'_{\delta\delta'} - A_{\gamma\delta'}A'_{\delta\gamma'})s_{\alpha\beta}s_{\alpha'\beta'} = \chi_s$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \omega_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\omega'_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \omega'_{\alpha\beta} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\chi_s}{\partial s_{\alpha\beta}} = \chi_{\alpha\beta};$$

die Summenzeichen beziehen sich auf alle Zahlenpaare $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$, während $\gamma\delta$ und $\gamma'\delta'$ beziehungweise die Ergänzungspaare 23, 31, 12, 14, 24, 34 zu durchlaufen haben; $A_{\alpha\beta}$, $A'_{\alpha\beta}$ sind die den Elementen $a_{\alpha\beta}$, $a'_{\alpha\beta}$ zugehörigen Unterdeterminanten dritten Grades der Determinanten A, A_k, oder die Coëfficienten der Formen F_u, F'_u; die partiellen Ableitungen sind ohne Rücksicht auf die Gleichung

$$s_{14}s_{23} + s_{24}s_{31} + s_{34}s_{12} = 0$$

zu nehmen. Die erwähnten invarianten Gebilde sind dann

$$\varphi_s,\ \psi_s,\ \varphi'_s,\ \omega_s,\ \omega'_s,\ \chi_s.$$

Setzt man

$$\Sigma\varphi_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \varphi_{ss'} \quad \Sigma\psi_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \psi_{ss'} \quad \Sigma\varphi'_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \varphi'_{ss'}$$
$$\Sigma\omega_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \omega_{ss'} \quad \Sigma\omega'_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \omega'_{ss'} \quad \Sigma\chi_{\alpha\beta}s'_{\alpha\beta} = \chi_{ss'},$$

so findet man, indem man der Rechnung die Formen

$$f_x = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 \quad f'_x = [a'_1] x_1^2 + a'_2 x_2^2 + a'_3 x_3^2 + a'_4 x_4^2$$

zu Grunde legt und

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} u_2 v_3 - u_3 v_2 = s_{14} & u_3 v_1 - u_1 v_3 = s_{24} \dots \\ u'_2 v'_3 - u'_3 v'_2 = s'_{14} & u'_3 v'_1 - u'_1 v'_3 = s'_{24} \dots \end{array}$$

setzt:

$$\begin{aligned}
&F_{uu'} F_{vv'} - F_{uv'} F_{u'v} = A \varphi_{ss'} \\
&G_{uu'} G_{vv'} - G_{uv'} G_{u'v} = A_1 \psi_{ss'} + \omega'_{ss'} \\
&G'_{uu'} G'_{vv'} - G'_{uv'} G'_{u'v} = A_3 \psi_{ss'} + \omega_{ss'} \\
&F'_{uu'} F'_{vv'} - F'_{uv'} F'_{u'v} = A_4 \varphi'_{ss'} \\
&F_{uu'} G_{vv'} + F_{vv'} G_{uu'} - F_{uv'} G_{u'v} - F_{u'v} G_{uv'} = A_1 \varphi_{ss'} + A \psi_{ss'} \\
&F_{uu'} G'_{vv'} + F_{vv'} G'_{uu'} - F_{uv'} G'_{u'v} - F_{u'v} G'_{uv'} = A_2 \varphi_{ss'} + A \varphi'_{ss'} - \omega'_{ss'} \\
&F_{uu'} F'_{vv'} + F_{vv'} F'_{uu'} - F_{uv'} F'_{u'v} - F_{u'v} F'_{uv'} = \chi_{ss'} \\
&G_{uu'} G'_{vv'} + G_{vv'} G'_{uu'} - G_{uv'} G'_{u'v} - G_{u'v} G'_{uv'} = A_3 \varphi_{ss'} + A_2 \psi_{ss'} \\
&\qquad + A_1 \varphi'_{ss'} - \chi_{ss'} \\
&G_{uu'} F'_{vv'} + G_{vv'} F'_{uu'} - G_{uv'} F'_{u'v} - G_{u'v} F'_{uv'} = A_4 \varphi_{ss'} + A_2 \varphi'_{ss'} - \omega_{ss'} \\
&G'_{uu'} F'_{vv'} + G'_{vv'} F'_{uu'} - G'_{uv'} F'_{u'v} - G'_{u'v} F'_{uv'} = A_4 \psi_{ss'} + A_3 \varphi'_{ss'}.
\end{aligned}$$

Hiernach wird also, da $(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)(u'_\xi v'_\eta - u'_\eta v'_\xi)$ durch die Substitution (6) in $(\overline{\xi\eta}, s)$ $(\overline{\xi\eta}, s')$ übergeht:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l}
(\overline{\eta\zeta}, s)(\overline{\eta\zeta}, s') = \mathfrak{a}_{23} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{23} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{23} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{23} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{23} \omega'_{ss'} \\
\qquad + \mathfrak{f}_{23} \chi_{ss'} \\
(\overline{\zeta\xi}, s)(\overline{\zeta\xi}, s') = \mathfrak{a}_{31} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{31} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{31} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{31} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{31} \omega'_{ss'} \\
\qquad + \mathfrak{f}_{31} \chi_{ss'} \\
(\overline{\xi\eta}, s)(\overline{\xi\eta}, s') = \mathfrak{a}_{12} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{12} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{12} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{12} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{12} \omega'_{ss'} \\
\qquad + \mathfrak{f}_{12} \chi_{ss'} \\
(\overline{\xi\vartheta}, s)(\overline{\xi\vartheta}, s') = \mathfrak{a}_{14} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{14} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{14} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{14} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{14} \omega'_{ss'} \\
\qquad + \mathfrak{f}_{14} \chi_{ss'} \\
(\overline{\eta\vartheta}, s)(\overline{\eta\vartheta}, s') = \mathfrak{a}_{24} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{24} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{24} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{24} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{24} \omega'_{ss'} \\
\qquad + \mathfrak{f}_{24} \chi_{ss'} \\
(\overline{\zeta\vartheta}, s)(\overline{\zeta\vartheta}, s') = \mathfrak{a}_{34} \varphi_{ss'} + \mathfrak{b}_{34} \psi_{ss'} + \mathfrak{c}_{34} \varphi'_{ss'} + \mathfrak{d}_{34} \omega_{ss'} + \mathfrak{e}_{34} \omega'_{ss'} \\
\qquad + \mathfrak{f}_{34} \chi_{ss'}
\end{array} \right.$$

wo allgemein

$$a_{23} = 2Ap_\alpha^3 p_\beta^3 + A_1 p_\alpha^2 p_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + A_2 p_\alpha p_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) + A_3 p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + A_4 q_\alpha q_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2)$$

$$b_{23} = Ap_\alpha^2 p_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + 2A_1 p_\alpha^2 p_\beta^2 q_\alpha q_\beta + A_2 p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + 2A_3 p_\alpha p_\beta q_\alpha^2 q_\beta^2 + A_4 q_\alpha^2 q_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha)$$

$$c_{23} = Ap_\alpha p_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) + A_1 p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + A_2 q_\alpha q_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2) + A_3 q_\alpha^2 q_\beta^2 (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) + 2A_4 q_\alpha^2 q_\beta^2$$

$$d_{23} = 2p_\alpha p_\beta q_\alpha^2 q_\beta^2 - q_\alpha q_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2)$$

$$e_{23} = 2p_\alpha^2 p_\beta^2 q_\alpha q_\beta - p_\alpha p_\beta (p_\alpha^2 q_\beta^2 + p_\beta^2 q_\alpha^2)$$

$$f_{23} = p_\alpha^3 q_\beta^3 + p_\beta^3 q_\alpha^3 - p_\alpha p_\beta q_\alpha q_\beta (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha).$$

Fasst man daher die sechs Ausdrücke (7) als lineare Formen von

$$s'_{14},\ s'_{24},\ s'_{34},\ s'_{23},\ s'_{31},\ s'_{12}$$

auf und bildet ihre Determinante, so ist dieselbe einerseits $= LP$ und anderseits $= MS$, wenn mit L, M, S die drei Determinanten

$$L = \begin{vmatrix} \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2,\ \eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3,\ \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1,\ \eta_1\zeta_4 - \eta_4\zeta_1,\ \eta_2\zeta_4 - \eta_4\zeta_2,\ \eta_3\zeta_4 - \eta_4\zeta_3 \\ \zeta_2\xi_3 - \zeta_3\xi_2, \ldots \\ \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \ldots \\ \xi_2\vartheta_3 - \xi_3\vartheta_2, \ldots \\ \eta_2\vartheta_3 - \eta_3\vartheta_2, \ldots \\ \zeta_2\vartheta_3 - \zeta_3\vartheta_2, \ldots \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{23},\ b_{23},\ c_{23},\ d_{23},\ e_{23},\ f_{23} \\ a_{31},\ b_{31},\ c_{31},\ d_{31},\ e_{31},\ f_{31} \\ a_{12},\ b_{12},\ c_{12},\ d_{12},\ e_{12},\ f_{12} \\ a_{14},\ b_{14},\ c_{14},\ d_{14},\ e_{14},\ f_{14} \\ a_{24},\ b_{24},\ c_{24},\ d_{24},\ e_{24},\ f_{24} \\ a_{34},\ b_{34},\ c_{34},\ d_{34},\ e_{34},\ f_{34} \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{vmatrix} \varphi_{14}, & \varphi_{24}, & \varphi_{34}, & \varphi_{23}, & \varphi_{31}, & \varphi_{12} \\ \psi_{14}, & \psi_{24}, & \psi_{34}, & \psi_{23}, & \psi_{31}, & \psi_{12} \\ \varphi'_{14}, & \varphi'_{24}, & \varphi'_{34}, & \varphi'_{23}, & \varphi'_{31}, & \varphi'_{12} \\ \omega_{14}, & \omega_{24}, & \omega_{34}, & \omega_{23}, & \omega_{31}, & \omega_{12} \\ \omega'_{14}, & \omega'_{24}, & \omega'_{34}, & \omega'_{23}, & \omega'_{31}, & \omega'_{12} \\ \chi_{14}, & \chi_{24}, & \chi_{34}, & \chi_{23}, & \chi_{31}, & \chi_{12} \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden. Da überdies nach bekannten Determinantenformeln

$$L = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \vartheta_1, & \vartheta_2, & \vartheta_3, & \vartheta_4 \end{vmatrix}^3$$

und sonach nicht $=0$ ist, so schliesst man aus der Identität

$$LP = MS,$$

dass

$$S = 0$$

die Gleichung der sechs Kanten des gemeinschaftlichen Polteträeders der Flächen (1), (2) in Strahlencoordinaten ist.

Über die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle.

(Mit 1 Tafel.)

Von **Hans Pitsch**,
Assistent an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Februar 1885.)

Trotzdem die Erscheinungen, welche Krystallplättchen im convergenten, polarisirten Lichte zeigen, je nach der Orientirung des Plättchens in Bezug auf die Elasticitätsachsen des Krystalls eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit darbieten, lassen sie sich doch unter sehr allgemeine Gesichtspunkte zusammenfassen.

So construirte Bertin[1] eine Fläche, deren Durchschnitt mit einer zur Oberfläche des Krystalls parallelen Ebene die sogenannten isochromatischen Curven liefert, also jene Linien, welche Punkte gleichen Gangunterschiedes der beiden austretenden Strahlen verbinden. Diese Fläche bildet somit das Bindeglied für alle jene Fälle, die vorher einzeln behandelt werden mussten.

Einen ebenso wichtigen Schritt für die Theorie dieser Erscheinungen wie Bertin that Lommel[2] durch die Aufstellung der sogenannten Isogyrenfläche, deren Schnitt mit einer zur Krystalloberfläche parallelen Ebene, welche in ihrer Lage allerdings noch einer beschränkenden Bedingung unterliegt, die Linien gleicher Schwingungsrichtung der austretenden Strahlen liefert, also jene Linien, welche sich als sogenannte achromatische Curven dem Auge darbieten. Lommel unterzog die von ihm aufgestellte, allgemeine Gleichung der Fläche keiner weiteren Discussion, sondern verwendete sie unmittelbar zur

[1] Compt. rend. 52, 1861.

[2] Wied. Ann. 18, 1883.

Ermittlung der Isogyren für die praktisch besonders wichtigen Fälle von Krystallplättchen, welche entweder senkrecht zu einer der Elasticitätsachsen oder senkrecht zu einer der optischen Achsen geschnitten sind.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die Isogyrenfläche selbst einer Discussion zu unterwerfen, eine Construction für sie und ihre ebenen Schnitte anzugeben und auf einige sonstige physikalische und mathematische Eigenthümlichkeiten, die sie im reichen Masse bietet, hinzuweisen.

Lommel gelangt zur Gleichung der Isogyrenfläche, indem er zwei Ebenen, deren jede parallel zu einer der optischen Achsen liegt, annimmt, die Schnittlinie derselben als Normale einer im Krystall sich fortpflanzenden Wellenebene ansieht und die zugehörigen Schwingungsebenen bestimmt, von deren Schnitten mit einer zur Krystalloberfläche parallelen Ebene einer parallel mit der in dieser Ebene angenommenen Schwingungsrichtung von den Richtungscosinussen ξ, η, ζ sein soll.

Diese Richtungscosinusse müssen also, wenn man sie an die Stelle der Coordinaten in die Gleichung einer der Schwingungsebenen einführt, dieselbe erfüllen. Eliminirt man aus der so gewonnenen Gleichung und den Gleichungen der beiden ursprünglich angenommenen Ebenen alle auf die specielle Lage dieser letzteren bezüglichen Grössen, so gelangt man nach einigen Reductionen zu der Gleichung der Isogyrenfläche:

$$\frac{(b^2-c^2)x}{\zeta y-\eta z}+\frac{(c^2-a^2)y}{\xi z-\zeta x}+\frac{(a^2-b^2)z}{\eta x-\xi y}=0 \qquad K)$$

in welcher allerdings die Grössen ξ, η, ζ nicht völlig von einander unabhängig sind, sondern der Gleichung:

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$

genügen müssen, da die angenommene Schwingungsrichtung der Krystalloberfläche mit den Richtungscosinussen α, β, γ parallel sein muss. a, b, c sind die üblichen Bezeichnungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung der Normale von Wellenebenen, deren Schwingungsrichtung im Krystall beziehungsweise mit einer der Elasticitätsachsen desselben parallel ist.

In etwas einfacherer Weise gelangt man zur Gleichung dieser Fläche durch folgende Überlegung, die zugleich eine neue, nicht sofort in die Augen springende, physikalische Eigenschaft derselben aufdeckt, von welcher im Folgenden noch manche Anwendung gemacht werden soll.

Die Schwingungsebenen, deren Schnitte mit einer gegebenen Ebene eine vorgeschriebene Richtung haben sollen, müssen parallel zu dieser Richtung liegen; die Perpendikel aller Ebenen, welche diese Bedingung erfüllen, stehen daher senkrecht zu der gegebenen Richtung. Da nun Perpendikel auf Schwingungsebenen Schwingungsrichtungen repräsentiren, so kann man die Isogyrenfläche auch als den geometrischen Ort aller Wellennormalen definiren, für welche wenigstens eine der zugehörigen Schwingungsrichtungen senkrecht zu der gegebenen Richtung steht.

Bezeichnet man mit u, v, w die Richtungscosinusse einer Wellennormale, mit h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2 die Richtungscosinusse der zugehörigen Schwingungsrichtungen, so bestehen bekanntlich die Gleichungen:[1]

$$h_1h_2 : k_1k_2 : l_1l_2 = b^2-c^2 : c^2-a^2 : a^2-b^2 \qquad 1)$$

$$h_1u+k_1v+l_1w = 0 \qquad 2)$$

$$h_2u+k_2v+l_2w = 0. \qquad 3)$$

Sind nun ξ, η, ζ die Richtungscosinusse der gegebenen Richtung, so besteht noch nach der Definition der Isogyrenfläche die Gleichung:

$$h_2\xi+k_2\eta+l_2\zeta = 0 \qquad 4)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 1) geht 2) über in:

$$(b^2-c^2)\frac{u}{h_2}+(c^2-a^2)\frac{v}{k_2}+(a^2-b^2)\frac{w}{l_2} = 0 \qquad 5)$$

Aus 3) und 4) folgt, dass die Grössen h_2, k_2, l_2 beziehungsweise proportional den Grössen:

$$\zeta v-\eta w, \quad \xi w-\zeta u, \quad \eta u-\xi v,$$

---

[1] V. v. Lang, Einl. i. d. theor. Phys., p. 340.

sind, so dass man die Gleichung 5) in der Form:

$$\frac{(b^2-c^2)u}{\zeta v-\eta w}+\frac{(c^2-a^2)v}{\xi w-\zeta u}+\frac{(a^2-b^2)w}{\eta u-\xi v}=0 \qquad 6)$$

schreiben kann, aus welcher die Gleichung der Isogyrenfläche folgt, wenn man die Richtungscosinusse u, v, w durch die ihnen proportionalen Coordinaten ersetzt.

Die Isogyrenfläche ist also, wie die Gleichung lehrt, im Allgemeinen eine Kegelfläche dritter Ordnung.

Interessant ist die Thatsache, dass die Schwingungsebenen, deren zugehörige Schwingungsrichtungen senkrecht zu einer gegebenen Richtung stehen, deren Wellennormalen also die Isogyrenfläche bilden, einen Kegel zweiter Ordnung berühren, dessen Gleichung in Ebenencoordinaten man leicht in folgender Weise erhält.

Die zu der Schwingungsrichtung h_2, k_2, l_2 gehörige Schwingungsebene besitzt die Richtungscosinusse h_1, k_1, l_1, die aber mit U, V, W bezeichnet werden sollen, um sie als Richtungscosinusse einer Ebene zu kennzeichnen. Der Abkürzung wegen setzen wir:

$$b^2-c^2=A, \quad c^2-a^2=B, \quad a^2-b^2=C,$$

wo dann zwischen den so bezeichneten Grössen die identische Relation:

$$A+B+C=0 \qquad 7)$$

besteht. Gemäss der Gleichung 1) sind die Grössen h_2, k_2, l_2, welche nach der gemachten Voraussetzung der Gleichung 4) genügen, beziehungsweise proportional zu:

$$\frac{A}{U}, \quad \frac{B}{V}, \quad \frac{C}{W},$$

so dass mit Rücksicht darauf Gleichung 4) sofort die verlangte Kegelgleichung:

$$\frac{A}{U}\xi+\frac{B}{V}\eta+\frac{C}{W}\zeta=0 \qquad 8)$$

liefert. Wir wollen nun die Gestalt dieses Kegels, der sich für die Construction der Isogyrenfläche von der grössten Wichtigkeit erweist, etwas eingehender discutiren.

Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$A\xi . VW + B\eta . UW + C\zeta . UV = 0 \qquad 9)$$

so ist ersichtlich, dass die drei Coordinatenebenen, also jene Ebenen, welche durch je zwei der Elasticitätsachsen gehen, Tangentenebenen des betreffenden Kegels sind, und dass ihn auch die Ebene $U = \xi$, $V = \eta$, $W = \zeta$ berührt. Geht man in der bekannten Weise[1] zur Gleichung in Punktcoordinaten über, so findet man sie in der Form:

$$A^2\xi^2x^2 + B^2\eta^2y^2 + C^2\zeta^2z^2 - 2AB\xi\eta xy - 2AC\xi\zeta xz - 2BC\eta\zeta yz = 0$$

oder kürzer:

$$\sqrt{A\xi x} + \sqrt{B\eta y} + \sqrt{C\zeta z} = 0. \qquad 10)$$

Eine Kegelfläche ist genügend charakterisirt, wenn man ausser der Lage der Spitze einen ebenen Schnitt völlig kennt. Als schneidende Ebene eignet sich im vorliegenden Fall besonders jene, welche man in irgend einem beliebigen Abstand p von der Spitze senkrecht zur Linie $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}$ legen kann, deren Gleichung also:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p \text{ ist.} \qquad 11)$$

Diese Ebene liegt parallel zu einer Tangentenebene des Kegels, ihr Schnitt mit demselben ist daher eine Parabel.

Zur Untersuchung desselben bedient man sich mit grossem Vortheil trimetrischer Coordinaten. Als Fundamentallinien des Systems wählt man die Schnitte der Ebene mit den drei Coordinatenebenen, welche Linien wir respective mit 1, 2, 3 bezeichnen, je nachdem sie die x-, y- oder z-Achse nicht treffen.

Fasst man irgend einen Punkt der Ebene A_1 A_2 A_3 (siehe Fig. 1) ins Auge, so erkennt man leicht, dass sich die neuen Coordinaten x_1, x_2, x_3, nämlich die senkrechten Abstände des Punktes von den respectiven Seiten des Fundamentaldreieckes in folgender Weise mit den ursprünglichen in Verbindung bringen lassen:

$$x = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}.x_1, \quad y = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}.x_2, \quad z = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.x_3. \qquad 12)$$

[1] Vergl. Hesse, Anal. G. d. R. p. 135.

In diesen Gleichungen drücken die Wurzelgrössen die Sinusse der Neigungswinkel der Ebene mit den betreffenden Coordinatenebenen aus. Die Grössen x_1, x_2, x_3 sind aber nicht unabhängig von einander, sondern durch die Relation:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 2\Delta \tag{13}$$

verbunden, in welcher s_1, s_2, s_3 die Seitenlängen des Fundamentaldreieckes, Δ den Flächeninhalt desselben bezeichnen.

Aus den Strecken:

$$OA_1 = \frac{p}{\xi}, \quad OA_2 = \frac{p}{\eta}, \quad OA_3 = \frac{p}{\zeta}$$

berechnen sich nach dem pythagoräischen Lehrsatz die Seiten des Fundamentaldreieckes:

$$s_1 = \frac{p}{\eta\zeta}\sqrt{\eta^2+\zeta^2}, \quad s_2 = \frac{p}{\xi\zeta}\sqrt{\xi^2+\zeta^2}, \quad s_3 = \frac{p}{\xi\eta}\sqrt{\xi^2+\eta^2} \tag{14}$$

und die Dreiecksfläche:

$$2\Delta = \frac{p^2}{\xi\eta\zeta}. \tag{15}$$

Für die Winkel des Dreieckes ergeben sich durch Anwendung bekannter Sätze die Gleichungssysteme:

$$\left.\begin{aligned} \cos A_1 &= \frac{p^2}{\xi^2 s_2 s_3} & \sin A_1 &= \frac{p^2}{\xi\eta\zeta s_2 s_3} & \operatorname{tg} A_1 &= \frac{\xi}{\eta\zeta} \\ \cos A_2 &= \frac{p^2}{\eta^2 s_1 s_3} & \sin A_2 &= \frac{p^2}{\xi\eta\zeta s_1 s_3} & \operatorname{tg} A_2 &= \frac{\eta}{\xi\zeta} \\ \cos A_3 &= \frac{p^2}{\zeta^2 s_1 s_2} & \sin A_3 &= \frac{p^2}{\xi\eta\zeta s_1 s_2} & \operatorname{tg} A_3 &= \frac{\zeta}{\xi\eta} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Parabelgleichung 10) lautet also, bezogen auf das neue Coordinatensystem:

$$\sqrt{A s_1 x_1} + \sqrt{B s_2 x_2} + \sqrt{C s_3 x_3} = 0. \tag{17}$$

Ist aber die Gleichung der Parabel in dieser Form gegeben, dann entspricht nach Salmon[1] ihrer Leitlinie die Gleichung:

[1] Salmon, Anal. Geom. d. Kegelschn. 1873, p. 506.

$$\frac{A s_1}{\operatorname{tg} A_1} x_1 + \frac{B s_2}{\operatorname{tg} A_2} x_2 + \frac{C s_3}{\operatorname{tg} A_3} x_3 = 0$$

oder mit Rücksicht auf das letzte System der Gleichungen 16):

$$A s_1 . \frac{\eta\zeta}{\xi} x_1 + B s_2 . \frac{\xi\zeta}{\eta} x_2 + C s_3 . \frac{\xi\eta}{\zeta} x_3 = 0. \qquad 18)$$

Die Coordinaten des Punktes D, in welchem das vom Ursprung des zuerst benützten Coordinatensystems auf die Ebene gefällte Perpendikel diese trifft, sind:

$$x = p.\xi, \quad y = p.\eta, \quad z = p.\zeta$$

die trimetrischen Coordinaten desselben also beziehungsweise proportional zu:

$$\frac{\xi}{s_1\eta\zeta}, \quad \frac{\eta}{s_2\xi\zeta}, \quad \frac{\zeta}{s_3\xi\eta},$$

welche der Gleichung 18) genügen. Der Punkt D, der Höhenpunkt des Fundamentaldreieckes, liegt also in der Leitlinie, übrigens eine nothwendige Folge des Satzes, dass der Höhendurchschnitt eines Tangentendreieckes einer Parabel immer ein Punkt der Leitlinie ist.

Die ursprünglichen Coordinaten jener Punkte R und S, in welchen die von O ausgehenden optischen Achsen, welche mit der z-Achse die Winkel $\pm\delta$ einschliessen und beide der Isogyrenfläche angehören, die in ihrer Ebene liegende Fundamentallinie treffen, sind:

$$x = \frac{p \sin\delta}{\xi \sin\delta \quad \zeta\cos\delta}, \; y = 0, \; z = \frac{p\cos\delta}{\zeta\cos\delta \pm \xi\sin\delta},$$

wobei bekanntlich:

$$\sin^2\delta = -\frac{C}{B}, \quad \cos^2\delta = -\frac{A}{B}.$$

Der auf derselben Fundamentallinie liegende Halbirungspunkt T von R und S hat demnach die Coordinaten:

$$x' = -\frac{p\xi\sin^2\delta}{\zeta^2\cos^2\delta - \xi^2\sin^2\delta} = -k.C\xi$$

$$y' = 0$$

$$z' = \frac{p\zeta\cos^2\delta}{\zeta^2\cos^2\delta - \xi^2\sin^2\delta} = k.A.\zeta.$$

Die trimetrischen Coordinaten dieses Punktes T sind daher den Grössen:

$$-\frac{C\xi}{\zeta\eta s_1},\ 0,\ \frac{A\zeta}{\xi\eta s_3}$$

proportional, woraus man ersieht, dass auch der Punkt T in der Leitlinie der Parabel liegt. Die Leitlinie kann also in der einfachsten Weise construirt werden, und es fehlt nur noch die Kenntniss der Lage des Brennpunktes, um beliebige Punkte der Parabel angeben zu können.

Zu dieser Kenntniss verhilft der Satz, dass die beiden Brennpunkte eines Kegelschnittes, der einem Dreieck eingeschrieben ist, in Bezug auf dieses Dreieck sogenannte inverse Punkte sind,[1] bei welchen die Coordinaten des einen durch die reciproken des anderen ausgedrückt werden. Auch constructiv lässt sich, sobald der eine Punkt gegeben ist, mit Leichtigkeit der andere finden, denn es schliessen die von beiden Punkten P und P' nach den Ecken des Fundamentaldreieckes gehenden Geraden, z. B. PA_1, $P'A_1$, mit den anstossenden Seiten, also A_1A_2 und A_1A_3, gleiche Winkel ein.

Im vorliegenden Falle liegt der eine der Brennpunkte in unendlicher Entfernung in der Richtung der Parabelachse. Die Verbindungslinien desselben mit den Ecken des Fundamentaldreieckes werden daher unter einander und mit der Parabelachse parallel, also senkrecht zur bekannten Leitlinie sein. Construirt man die ihnen entsprechenden Linien, so schneiden sie sich in einem Punkte, dem gesuchten Brennpunkt. Derselbe muss auch, einem sehr bekannten Satze zufolge, im Umkreis des Tangentendreieckes liegen; man braucht also nur eine einzige der inversen Linien zu ziehen, wenn dieser Kreis bereits construirt wurde. Die Construction zeigt Fig. 2.

Der Brennpunkt im Unendlichen ist der Pol der unendlich entfernten Geraden und seine Coordinaten lassen sich von diesem Gesichtspunkte aus leicht angeben.

Nach Salmon[2] sind die Coordinaten des Poles einer Geraden:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

---

[1] Salmon, Anal. Geom. d. höh. eb. Curv. 1873, pag. 316.

[2] Salmon, A. G. d. K. p. 397.

in Bezug auf einen Kegelschnitt:

$$\sqrt{b_1 x_1} + \sqrt{b_2 x_2} + \sqrt{b_3 x_3} = 0$$

proportional den Grössen:

$$a_2 b_3 + a_3 b_2,\ a_3 b_1 + a_1 b_3,\ a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Die Coordinaten des Poles der unendlich entfernten Geraden:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0$$

in Bezug auf den Kegelschnitt 17) ergeben sich mithin proportional zu:

$$s_2 s_3 (B+C),\ s_1 s_3 (A+C),\ s_1 s_2 (A+B)$$

oder mit Rücksicht auf die Identität 7) proportional zu:

$$\frac{A}{s_1},\ \frac{B}{s_2},\ \frac{C}{s_3}.$$

Die Coordinaten des endlichen Brennpunktes sind also den Grössen:

$$\frac{s_1}{A},\ \frac{s_2}{B},\ \frac{s_3}{C} \qquad 19)$$

proportional.

Mit Hilfe des so construirten Kegels ergibt sich eine einfache Construction für die Isogyrenfläche.

Legt man eine beliebige Tangentenebene an den Kegel und schneidet sie durch eine Ebene, welche man senkrecht zu ihr durch die Linie OD legt, so ist der Schnitt eine Erzeugende der Isogyrenfläche.

Aus 8) folgt nämlich, dass die eine der beiden zu derselben Wellennormale gehörigen Schwingungsebenen die Linie OD mit der Gleichung:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}$$

enthält, wenn die andere den betreffenden Kegel berührt. Nach Gleichung 1) sind die Richtungscosinusse der einen Schwingungsebene proportional zu:

$$\frac{A}{U},\ \frac{B}{V},\ \frac{C}{W}.$$

und Gleichung 8) drückt mithin aus, dass die Summe der Producte dieser Richtungscosinusse und der entsprechenden ξ, η, ζ Null ist. Beide Schwingungsebenen stehen aber bekanntlich auf einander senkrecht, und ihr Schnitt ist die betreffende Wellennormale, die unter den gemachten Voraussetzungen auf der Isogyrenfläche liegt.

Eine zur Linie $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}$ senkrechter ebener Schnitt der Isogyrenfläche kann nach diesem Ergebnisse wie folgt construirt werden. Man construirt in der früher angegebenen Weise den Parabelschnitt dieser Ebene mit dem Kegel zweiter Ordnung, zieht eine beliebige Tangente an diese Curve und fällt vom Höhenpunkte des Fundamentaldreieckes ein Perpendickel darauf. Der Durchschnitt beider ist ein Punkt des ebenen Schnittes der Isogyrenfläche.

Eine durch den Doppelpunkt gehende Gerade schneidet diese Curve dritter Ordnung nur noch in einem Punkt, für welchen sich im Anschluss an die letzten Erörterungen eine bequeme Construction ergibt. Der Fusspunkt des Perpendikels, welches man vom Brennpunkt einer Parabel auf eine ihrer Tangenten fällen kann, liegt immer in der Scheiteltangente derselben. Da der gesuchte, in der gegebenen Geraden liegende Curvenpunkt der Fusspunkt des Perpendikels ist, welches man vom Doppelpunkt der Curve auf die entsprechende Parabeltangente fällt, so muss das Brennpunktsperpendikel der letzteren mit dieser Geraden parallel laufen. Um also den, in einer durch den Doppelpunkt gehenden Geraden liegenden Curvenpunkt zu construiren, ziehe man eine Parallele zu ihr durch den Brennpunkt und errichte im Schnittpunkt derselben mit der Scheiteltangente eine Senkrechte. Der Schnitt derselben mit der gegebenen Geraden ist der verlangte Curvenpunkt.

Der Berührungspunkt einer Parabeltangente wird bekanntlich erhalten, indem man das zwischen Hauptachse und Scheiteltangente liegende Stück derselben vom Schnitt der letzteren aus in der Tangente aufträgt. Der Halbkreis, welcher durch den Doppelpunkt der Curve dritter Ordnung, durch den Berührungspunkt einer Parabeltangente und den in dieser liegenden Curvenpunkt hindurchgeht, berührt die Curve dritter Ordnung im letzt-

genannten Punkte. Die Richtigkeit der hieraus folgenden, bemerkenswerth einfachen Tangentenconstruction folgt unmittelbar aus Fig. 3.

Ist A der Punkt der Curve dritter Ordnung, welche in der Parabeltangente AB mit dem Berührungspunkt in B liegt, A' ein benachbarter Curvenpunkt in der Parabeltangente $A'B'$ mit dem Berührungspunkte in B', so geht die Sehne AA' in die Curventangente in A über, wenn die Punkte A und A' und in Folge dessen auch B und B' zusammenfallen. Unter dieser Voraussetzung geht aber auch die Linie AA' in die Kreistangente über.

Aus der analytischen Untersuchung des behandelten ebenen Schnittes der Isogyrenfläche, der ihre Gestalt hinlänglich characterisirt, ergibt sich eine für manche Fälle noch bequemere Construction desselben.

Zur Untersuchung der genannten Curve dritter Ordnung eignen sich wieder besonders trimetrische Coordinaten, für welche sich aber diesmal andere Fundamentallinien empfehlen. Zieht man in dem Dreiecke, welches die Durchschnitte der Elasticitätsachsen auf der Ebene bilden, die Höhen und verbindet die Schnittpunkte derselben mit den Seiten unter einander, so sollen die Seiten des so entstehenden Dreieckes I II III (siehe Fig. 1) die neuen Fundamentallinien sein, und die neuen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 proportional zu den senkrechten Abständen des betreffenden Punktes von diesen Linien genommen werden.

Die Gleichungen der Verbindungslinien der Eckpunkte des neuen Fundamentaldreieckes mit dem ursprünglichen Coordinatenanfang 0, welche Linien auf den entsprechenden Trassen der Ebene $A_1 A_2 A_3$ senkrecht stehen, sind:

$$0\,\mathrm{III} \qquad z = 0, \quad \frac{x}{\xi} - \frac{y}{\eta} = 0$$

$$0\,\mathrm{II} \qquad y = 0, \quad \frac{z}{\zeta} - \frac{x}{\xi} = 0$$

$$0\,\mathrm{I} \qquad x = 0, \quad \frac{y}{\eta} - \frac{z}{\zeta} = 0$$

und in Folge dessen die Gleichungen der Ebenen:

$$0\,\mathrm{II}\,\mathrm{III} \quad -\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0$$

$$0\;\mathrm{I}\,\mathrm{III} \quad \frac{x}{\xi}-\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0$$

$$0\;\mathrm{I}\;\mathrm{II} \quad \frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}-\frac{z}{\zeta}=0.$$

Um dieselben auf die Normalform zu bringen, hat man sie mit dem Factor:

$$\varkappa=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\zeta^2}}}$$

zu multipliciren.

Alle drei Ebenen sind gegen die Ebene 11) gleich geneigt, und zwar ist $\varkappa$ der Cosinus des Neigungswinkels. Die senkrechten Abstände δ_1, δ_2, δ_3 irgend eines Punktes von diesen Ebenen findet man durch Substitution seiner Coordinaten in die Normalform der betreffenden Gleichung, also z. B.:

$$\delta_1=\varkappa\left(-\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}\right).$$

Für alle Punkte der Ebene I II III bestehen die Relationen:

$$\delta_1=\xi_1\cos\varepsilon=\varkappa.\xi_1 \quad \delta_2=\varkappa.\xi_2,\ \delta_3=\varkappa.\xi_3.$$

Die Transformationsgleichungen der Coordinaten sind daher:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=-\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}\\ \xi_2&=\frac{x}{\xi}-\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}\\ \xi_3&=\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}-\frac{z}{\zeta}\end{aligned}\right\} \qquad 20a)$$

und deren Auflösungen:

$$\frac{x}{\xi}=\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3),\ \frac{y}{\eta}=\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_3),\ \frac{z}{\zeta}=\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2). \qquad 20b)$$

Zwischen den neuen Coordinaten muss in Folge der Gleichung 11) die identische Relation:

$$(\eta^2+\zeta^2)\xi_1+(\xi^2+\zeta^2)\xi_2+(\xi^2+\eta^2)\xi_3=2p \qquad 21)$$

bestehen, die sich nur durch einen Factor von der Gleichung:

$$\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3=2\delta \qquad 22)$$

unterscheidet, wobei σ_1, σ_2, σ_3 die Seitenlängen des neuen Fundamentaldreieckes, δ dessen Flächeninhalt bezeichnen.

Nachdem man den Nenner jedes Gliedes der Gleichung *K*) durch ξ, η, ζ dividirt, gewinnt sie die Form:

$$\frac{A\xi x}{\frac{y}{\eta}-\frac{z}{\zeta}}+\frac{B\eta y}{\frac{z}{\zeta}-\frac{x}{\xi}}+\frac{C\zeta z}{\frac{x}{\xi}-\frac{y}{\eta}}=0$$

aus welcher man durch Anwendung der Transformationsformeln die Gleichung des Schnittes mit der Ebene 11) in den neuen Coordinaten erhält:

$$A\xi^2\frac{\xi_2+\xi_3}{\xi_3-\xi_2}+B\eta^2\frac{\xi_1+\xi_3}{\xi_1-\xi_3}+C\zeta^2\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_2-\xi_1}=0. \qquad 23)$$

Bringt man die Brüche auf gleiche Nenner und ordnet nach den Unbekannten, so geht sie in die Form:

$$M(\xi_1\xi_2^2+\xi_1\xi_3^2)+N(\xi_2\xi_1^2+\xi_2\xi_3^2)+P(\xi_3\xi_1^2+\xi_3\xi_2^2)$$
$$-2\xi_1\xi_2\xi_3(A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2)=0$$

über, wenn man zur Abkürzung:

$-A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=M$, $A\xi^2-B\eta^2+C\zeta^2=N$, $A\xi^2+B\eta^2-C\zeta^2=P$

setzt. Mit Rücksicht auf die Identität $A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=M+N+P$ erlangt sie die noch einfachere Gestalt:

$$M\xi_1(\xi_2-\xi_3)^2+N\xi_2(\xi_3-\xi_1)^2+P\xi_3(\xi_1-\xi_2)^2=0 \qquad 24)$$

aus der sofort erhellt, dass die Eckpunkte des Fundamentaldreieckes der Curve angehören und dass diese im Punkte *D* mit den Coordinaten $\xi_1=\xi_2=\xi_3$ einen Doppelpunkt besitzt.

Die Seiten des Fundamentaldreieckes werden ausser in den Ecken in noch je einem Punkte von der Curve getroffen. Die Coordinaten dieser Punkte sind, wie unmittelbar ersichtlich:

$$\xi_1=0,\ \frac{\xi_2}{N}+\frac{\xi_3}{P}=0;\ \xi_2=0,\ \frac{\xi_1}{M}+\frac{\xi_3}{P}=0;$$

$$\xi_3=0,\ \frac{\xi_1}{M}+\frac{\xi_2}{N}=0.$$

Diese drei Schnittpunkte liegen auf der Geraden:

$$\frac{\xi_1}{M} + \frac{\xi_2}{N} + \frac{\xi_3}{P} = 0. \qquad 25)$$

Die Tangenten der Curve in den Eckpunkten des Fundamentaldreieckes sind, diese Schnittpunkte als bekannt vorausgesetzt, leicht zu finden. Aus der Curvengleichung $F = 0$ folgt die Gleichung der Tangente im Punkte ξ_1': [1]

$$\frac{dF'}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dF'}{d\xi_2}\xi_2 + \frac{dF'}{d\xi_3}\xi_3 = 0,$$

in welcher die Accente andeuten, dass in den betreffenden Differentialquotienten die Coordinaten des gegebenen Punktes einzusetzen sind. Für die Tangenten in den Eckpunkten des Dreieckes ergeben sich demnach die Gleichungen:

$$M\xi_1 + N\xi_2 = 0,\ M\xi_1 + P\xi_3 = 0,\ N\xi_2 + P\xi_3 = 0.$$

Diese Geraden sind invers zu jenen, welche die Ecken des Dreieckes mit den Curvenpunkten in den gegenüberliegenden Seiten verbinden.

Ist M_1 der Schnittpunkt in der Seite II III, so tangirt jene Gerade die Curve im Punkte I, welche mit I III denselben Winkel einschliesst wie IM_1 mit I II. Die Schnittpunkte dieser drei Tangenten mit den gegenüber liegenden Seiten liegen auf der Geraden:

$$M\xi_1 + N\xi_2 + P\xi_3 = 0.$$

Berücksichtigt man die aus 21) und 22) folgenden Relationen:

$$\sigma_1 = \varkappa(\eta^2+\zeta^2),\ \sigma_2 = \varkappa(\xi^2+\zeta^2),\ \sigma_3 = \varkappa(\xi^2+\eta^2)$$

$$\xi^2 = \frac{\varkappa}{2}(\sigma_2+\sigma_3-\sigma_1),\ \eta^2 = \frac{\varkappa}{2}(\sigma_1+\sigma_3-\sigma_2),\ \zeta_2 = \frac{\varkappa}{2}(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3)$$

und die mit ihrer Hilfe aus den Definitionsgleichungen für M, N und P folgenden:

$$M = \varkappa(\sigma_2 C+\sigma_3 B),\ N = \varkappa(\sigma_3 A+\sigma_1 C),\ P = \varkappa(\sigma_1 B+\sigma_2 A),$$

so kann man sich leicht durch Auflösen der Klammern und entsprechendes Zusammenfassen der Glieder überzeugen, dass die Curvengleichung auch identisch mit:

[1] Salmon, h. cb. C. p. 61.

$$(A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3)(\sigma_1\xi_2\xi_3+\sigma_2\xi_1\xi_3+\sigma_3\xi_1\xi_2)+$$
$$+(A\xi_2\xi_3+B\xi_1\xi_3+C\xi_1\xi_2)(\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3)=0 \qquad 26)$$

ist. Durch die Abkürzungen:

$$A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3=g=0$$
$$A\xi_2\xi_3+B\xi_1\xi_3+C\xi_1\xi_2=s=0$$
$$\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3=g_1=0$$
$$\sigma_1\xi_2\xi_3+\sigma_2\xi_1\xi_3+\sigma_3\xi_1\xi_2=s_1=0$$

gewinnt die Gleichung die durchsichtige Form:

$$gs_1+g_1s=0 \qquad 27)$$

welche die unmittelbare Untersuchung der unendlich entfernten Curvenpunkte gestattet.

$g=0$ ist die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $\xi_1=\xi_2=\xi_3$;

$s=0$ die Gleichung eines Kegelschnittes durch denselben Punkt;

$g_1=0$ gemäss der Gleichung 22) die Gleichung der unendlich entfernten Geraden;

$s_1=0$ die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kreises. [1]

Setzt man $g_1=0$, so gelangt man zur Einsicht, dass die unendlich entfernte Gerade die Curve im unendlich entfernten Punkt der Linie $g=0$ schneidet, und dass die Schnitte des Kreises $s_1=0$ mit der unendlich entfernten Geraden, also die imaginären Kreispunkte, gleichfalls der Curve angehören.

Die Curve ist also eine circulare Curve dritter Ordnung mit einer reellen, zur Geraden $g=0$ parallelen Asymptote.

Circulare Curven dritter Ordnung sind im Allgemeinen einfach zu construiren, wenn gewisse ausgezeichnete Punkte derselben bekannt sind. Am bequemsten gestaltet sich die Construction, wenn der reelle Durchschnitt (C) der beiden imaginären Asymptoten, die reelle Asymptote sammt ihrem Schnitt (α) mit der Curve, ferner zwei Curvenpunkte a und b bekannt sind, deren Verbindungslinie parallel zur reellen Asymptote liegt. Die zuletzt angegebenen Punkte können auch durch einen Doppelpunkt der

[1] Salmon, a. G. d. K. p. 191.

Curve vertreten sein. Liegt der Punkt C auf der Curve, dann braucht ausser ihm nur noch die Lage der reellen Asymptote bekannt zu sein, da ihr Schnitt mit der Curve bereits construirt werden kann. Die Construction einzelner Punkte ist nach Durège[1] die folgende: Man legt irgend einen Kreis durch die Punkte a und b, verbindet den Mittelpunkt desselben mit C und fällt vom Punkte α eine Senkrechte auf diese Verbindungslinie. Dieses Perpendikel schneidet den Kreis in zwei Curvenpunkten.

Ist an der Stelle von a und b der Doppelpunkt der Curve gegeben, so berühren alle Kreise die durch den Doppelpunkte parallel zur Asymptote gezogene Gerade, und die Kreismittelpunkte liegen auf der Senkrechten, die man durch denselben Punkt auf die Asymptote legen kann. Die Verbindungslinie des Punktes α mit C (s. Fig. 4) muss im letztgenannten Punkte zwei Punkte mit der Curve gemein haben, dieselbe also in C berühren. Sie ist nämlich die Begleiterin der unendlich fernen Geraden,[2] d. h. die Verbindungslinie der drei endlichen Schnittpunkte der Asymptoten mit der Curve, von welchen Schnittpunkten zwei in C zusammenfallen. Die Construction soll also für jenen Kreis, welcher durch C hindurchgeht, zwei zusammenfallende Punkte geben, d. h. die gesuchte Tangente in C muss auch diesen Kreis berühren; sie kann mithin construirt werden und gibt in ihrem Durchschnitt mit der reellen Asymptote den Punkt α.

Unsere Aufgabe ist demnach zunächst die Ermittlung des Punktes C und der reellen Asymptote. Die zur Asymptote parallele Gerade $g = 0$ ist identisch mit der Leitlinie der früher untersuchten Parabel, wie sofort ersichtlich wird, wenn man die Gleichung dieser Leitlinie aus dem früheren Coordinatensystem in das neue transformirt, was mit Hilfe der aus der Verbindung von 12) und 20) hervorgehenden Transformationsformeln:

$$x_1 = \frac{\xi}{2\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}(\xi_2+\xi_3),\ x_2 = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}(\xi_1+\xi_3),$$

$$x_3 = \frac{\zeta}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}(\xi_1+\xi_2) \qquad 28)$$

---

[1] Durège, eb. Curv. 3. Ord.

[2] Salmon, h. eb. C. p. 156.

geschieht, wobei man nur die Gleichungen 14) und 7) zu berücksichtigen braucht.

Nach der Gleichung 27) kann man die vorliegende Curve dritter Ordnung auch als Erzeugniss des Strahlenbüschels:

$$g+\lambda g_1 = 0 \qquad 29\,a)$$

dessen Mittelpunkt der unendlich entfernte Punkt der Geraden $g = 0$ ist, und des projectivischen Kegelschnittsbüschels:

$$s-\lambda s_1 = 0 \qquad 29\,b)$$

auffassen. Betrachtet man die, einem bestimmten Werthe von λ entsprechende Gerade:

$$g-\lambda g_1 = 0, \qquad 29\,c)$$

die sogenannte harmonisch conjugirte zu $29a)$, so findet man, dass ihre Gleichung aus $29b)$ hervorgeht, wenn man in ihr statt der Coordinaten die reciproken Werthe derselben einsetzt, d. h. $29c)$ ist die Inverse des demselben Werthe von λ entsprechenden Kegelschnittes $29b)$.

Die Geraden $g+\lambda g_1 = 0$ und $g-\lambda g_1 = 0$ liegen zu verschiedenen Seiten, aber in gleicher Distanz von der Geraden $g = 0$; kennt man also die zu einem Kegelschnitt des Büschels $29b)$ Inverse, so ist der dem Kegelschnitt entsprechende Strahl in gleicher Distanz wie diese auf der entgegengesetzten Seite von g zu ziehen. Da alle den Kegelschnitten des Büschels inversen Geraden zu $g = 0$ parallel laufen, bedarf es zur Construction einer derselben nur der Kenntniss eines einzigen Punktes, d. h. man braucht nur zu irgend einem Punkte des betreffenden Kegelschnittes den inversen aufzusuchen.

Diese Überlegungen führen zu einer Construction der reellen Asymptote, wenn man noch folgenden Satz aus der Theorie der Curven dritter Ordnung [1] zu Hilfe nimmt. Wenn eine Curve dritter Ordnung durch einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt m und einen Kegelschnittsbüschel erzeugt wird, so entspricht der Kegelschnitt, welcher durch m geht, jenem Strahl, welcher die Curve dritter Ordnung in m berührt. Da im vorliegenden Falle der Punkt m im Unendlichen liegt, so wird dem Kegelschnitt, welcher durch diesen Punkt geht, die reelle Asymptote entsprechen. Die Inverse zu diesem Kegelschnitt muss nach den

[1] Durège, C. 3. Ord. p. 139.

früher gemachten Bemerkungen durch den zu m inversen Punkt hindurchgehen. Man zieht also parallel zu $g=0$ durch die Ecken des Fundamentaldreieckes Gerade und sucht hiezu in der früher angegebenen Weise die entsprechenden, welche sich im verlangten Punkte C_1 schneiden. Auch hier braucht man nur eine dieser Geraden zu ziehen, da ja der gesuchte Punkt im Umkreis des Fundamentaldreieckes liegen muss, der alle inversen Punkte der unendlich fernen Geraden enthält. Zieht man also durch den so construirten Punkt die zu $g=0$ Parallele und auf der anderen Seite von g die dazu conjugirte, so ist die letztere der dem betreffenden Kegelschnitt entsprechende Strahl, d. h. die reelle Asymptote.

Die Coordinaten des Punktes C_1 sind die reciproken Werthe der Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Geraden $g=0$. Letztere sind, da sie den Gleichungen:

$$\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3=0$$
$$A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3=0$$

genügen müssen, proportional den Grössen:

$$C\sigma_2-B\sigma_3,\ A\sigma_3-C\sigma_1,\ B\sigma_1-A\sigma_2,$$

die Coordinaten des Punktes C_1 also proportional zu:

$$\frac{1}{C\sigma_2-B\sigma_3},\quad \frac{1}{A\sigma_3-C\sigma_1},\quad \frac{1}{B\sigma_1-A\sigma_2}. \tag{30}$$

Dieser Punkt C_1 ist zugleich der Durchschnittspunkt (C) der imaginären Asymptoten.

Die imaginären Asymptoten sind nämlich die Tangenten in den Curvenpunkten, für welche $s_1'=0$, $g_1'=0$ ist.

Aus Gleichung 27) folgt die für die Aufstellung der Tangentengleichung nothwendige Grösse:

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_i}=g\frac{\partial s_1}{\partial\xi_i}+s_1\frac{\partial g}{\partial\xi_i}+g_1\frac{\partial s}{\partial\xi_i}+s\frac{\partial g_1}{\partial\xi_i}$$

und für den vorliegenden Fall einfacher:

$$\frac{\partial F'}{\partial\xi_i'}=g'\frac{\partial s_1'}{\partial\xi_i'}+s_1'\frac{\partial g_1'}{\partial\xi_i'}.$$

Auf diese Art resultirt speciell der Ausdruck:

$$\frac{\partial F'}{\partial \xi_1'} = (A\xi_1' + B\xi_2' + C\xi_3')(\sigma_2\xi_3' + \sigma_3\xi_2') + (A\xi_2'\xi_3' + B\xi_1'\xi_3' + C\xi_1'\xi_2')\sigma_1 =$$
$$= A(\sigma_1\xi_2'\xi_3' + \sigma_2\xi_1'\xi_3' + \sigma_3\xi_1'\xi_2') + B[\sigma_3\xi_2'^2 + \xi_3'(\sigma_2\xi_2' + \sigma_1\xi_1')] +$$
$$+ C[\sigma_2\xi_3'^2 + \xi_2'(\sigma_3\xi_3' + \sigma_1\xi_1')]$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$s_1' = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial \xi_1'} = (\xi_2'^2 - \xi_3'^2)(B\sigma_3 - C\sigma_2).$$

Die Gleichung einer der imaginären Asymptoten ist also:

$$(\xi_2'^2 - \xi_3'^2)(B\sigma_3 - C\sigma_2)\xi_1 + (\xi_3'^2 - \xi_1'^2)(C\sigma_1 - A\sigma_3)\xi_2 +$$
$$+ (\xi_1'^2 - \xi_2'^2)(A\sigma_2 - B\sigma_1)\xi_3 = 0$$

eine Gleichung, welche durch die Ausdrücke 30) erfüllt wird, ob nun ξ_1' die Coordinaten des einen oder des anderen der imaginären Kreispunkte bezeichnen. Der Punkt C_1 ist daher der reelle Durchschnitt der imaginären Asymptoten. Er liegt, wie unmittelbar ersichtlich, gleichfalls auf der Curve.

Die Construction der Curve unterliegt nun keinem Anstand mehr. Wir wollen nur noch auf einige mehr oder weniger interessante Beziehungen derselben zu der früher untersuchten Parabel hinweisen, die in vortheilhafter Weise zur Vereinfachung der Construction benützt werden können.

Die neuen Coordinaten des Brennpunktes der genannten Parabel erhält man durch Anwendung der Transformationsformeln die wieder aus 12) und 20) folgen:

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}x_1 + \frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\eta}x_2 + \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta}x_3$$
$$\xi_2 = \frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}x_1 - \frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\eta}x_2 + \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta}x_3$$
$$\xi_3 = \frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}x_1 + \frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\eta}x_2 - \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta}x_3$$

und ergeben sich mit Rücksicht auf 14), 19), 21) und 22) proportional zu:

$$-\frac{\sigma_1}{A} + \frac{\sigma_2}{B} + \frac{\sigma_3}{C}, \quad \frac{\sigma_1}{A} - \frac{\sigma_2}{B} + \frac{\sigma_3}{C}, \quad \frac{\sigma_1}{A} + \frac{\sigma_2}{B} - \frac{\sigma_3}{C}.$$

Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Doppelpunkt, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ der Curve besitzt demnach die Gleichung:

$$\left(\frac{\sigma_3}{C} - \frac{\sigma_2}{B}\right)\xi_1 + \left(\frac{\sigma_1}{A} - \frac{\sigma_3}{C}\right)\xi_2 + \left(\frac{\sigma_2}{B} - \frac{\sigma_1}{A}\right)\xi_1 = 0$$

oder:

$$A(B\sigma_3 - C\sigma_2)\,\xi_1 + B(C\sigma_1 - A\sigma_3)\,\xi_2 + C(A\sigma_2 - B\sigma_1)\,\xi_3 = 0.$$

Aus der letzten Gleichungsform ist ersichtlich, dass der Punkt (C) in derselben Geraden liegt.

Die Verbindungslinie des Doppelpunktes mit irgend einem Punkt der Curve dritter Ordnung steht, wie nachgewiesen wurde, senkrecht auf einer Tangente der Parabel, welche durch denselben Punkt hindurchgeht. Die Verbindungslinie des Brennpunktes der Parabel mit dem Doppelpunkt muss daher senkrecht auf jener Tangente stehen, welche durch den Punkt C an die Parabel gezogen werden kann, der Punkt C ist also gleichzeitig der Fusspunkt des Perpendikels aus dem Brennpunkt auf eine Tangente. Dieser Fusspunkt liegt aber bekanntlich auf der Scheiteltangente, und da diese parallel zur Leitlinie verläuft, ist diese Tangente die durch den Punkt C gehende Parallele zur reellen Asymptote.

Da die Punkte C und α in zwei Parallelen liegen, die von $g = 0$ entgegengesetzt gleiche Abstände besitzen, muss diese Gerade die Strecke $C\alpha$ im Halbirungspunkte (0) treffen (s. Fig. 4). Mithin ist $OC = OD = O\alpha$, die Punkte C, D, α liegen auf einem Kreise mit dem Durchmesser $C\alpha$ und der Winkel $CD\alpha$ ist als Winkel im Halbkreis ein Rechter, ein Ergebniss, wodurch die Construction des Punktes α sich wesentlich vereinfacht.

Eine nähere Betrachtung der Gleichung 27) gibt über eine andere interessante Entstehungsart der Curve dritter Ordnung Aufschluss. Die Gleichung geht durch Inversion in sich selbst über. Hieraus folgt, dass für jeden Curvenpunkt auch der inverse in derselben Curve liegt. Er liegt aber auch in der conjugirten Geraden zu jener, welche parallel zu g durch den ursprünglich angenommenen Punkt geht, denn soll der zu einem Punkt der Geraden $g + \lambda\, g_1 = 0$ inverse Punkt in der conjugirten Geraden liegen, so müssen seine Coordinaten ξ_i' die Gleichung: $g' - \lambda\, g_1' = 0$ erfüllen. Da aber die ξ_i' proportional zu den Producten

ξ, ξ_1 sind, geht die letzte Gleichung durch diese Substitution in $s - \lambda s_1 = 0$ über, die im Vereine mit $g + \lambda g_1 = 0$ ausdrückt, dass alle Punkte der Curve dritter Ordnung dieser Bedingung genügen. Zwei inverse Punkte können aber als Brennpunkte eines Kegelschnittes aufgefasst werden, welcher die Seiten des Fundamentaldreieckes berührt. Der Halbirungspunkt der Verbindungslinie beider Brennpunkte liegt nach dem früher Gesagten auf der Geraden $g = 0$.

Die Curve dritter Ordnung ist mithin der geometrische Ort der Brennpunkte von Kegelschnitten, welche drei gegebene Gerade berühren und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Der Ort der Mittelpunkte von Kegelschnitten, welche vier feste Gerade berühren, ist die Gerade, welche die Mittelpunkte der Diagonalen ihres Vierseits verbindet. [1] Umgekehrt berühren alle Kegelschnitte, welche drei feste Gerade berühren und deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, noch eine vierte Gerade. Es ist nämlich leicht, eine vierte Gerade so zu bestimmen, dass die Mittelpunktsgerade die Halbirungspunkte der Diagonalen des so gebildeten Viereckes enthält. Ist (s. Fig. 5) I II III das Fundamentaldreieck, g die Gerade der Kegelschnittsmittelpunkte, so braucht man nur die Dreiecksseiten zu halbiren, diese Punkte zu einem neuen Dreieck zusammenzufassen und die Schnitte 1, 2, 3 der Seiten desselben mit der Geraden g mit den entsprechenden Eckpunkten I, II, III zu verbinden. Die Schnittpunkte M_1, M_2, M_3 der Seiten des Fundamentaldreieckes mit diesen Verbindungslinien liegen auf der gesuchten Geraden G. Es ist unmittelbar aus der Figur zu ersehen, dass die Diagonalen des Vierseits I II M_1 M_2 durch diese Gerade halbirt werden.

Die untersuchte Curve ist daher ein specieller Fall der Brennpunktscurve von Kegelschnitten, welche vier gegebene Gerade berühren, und diese letztgenannte Curve wurde bereits eingehend vom Standpunkte der neueren Geometrie untersucht. [2]

Wir benützen hievon nur das Ergebniss, welches bereits Salmon [3] anführt, nämlich dass die Eckpunkte des Viereckes

---

[1] Salmon, a. G. d. K. p. 265.

[2] H. Schrötter, Math. Ann. Bd. V, p. 50; Durège, p. 83; Salmon a. G. d. K. p. 369.

[3] Salmon, a. G. d. K. p. 369.

und die Schnittpunkte der Gegenseiten auf dieser Curve liegen. Die früher construirte Gerade G muss daher als Verbindungslinie jener Curvenpunkte, in welchen die Seiten des Fundamentaldreieckes getroffen werden, mit der Geraden 25) identisch sein, die man zur Construction der Curventangenten in den Eckpunkten des Fundamentaldreieckes benützen kann.

Ein ebener, zur Schwingungsrichtung senkrechter Schnitt der Isogyrenfläche kann nach den gegebenen Daten construirt werden, wenn die optischen Constanten des Krystallplättchens bekannt sind. Die Isogyren selbst erhält man durch Schnitte, die parallel zu dieser Richtung verlaufen. Aus einem Schnitt der ersten Art lässt sich aber durch lineare Construction ein Schnitt der zweiten Art ableiten.

Es sei O, (s. Fig. 6) der Mittelpunkt des Kegels dritter Ordnung, P ein Punkt seines Schnittes mit der Ebene E. Es handelt sich nun um die Construction des Punktes P', in welchem der Strahl OP die zu E senkrechte Ebene E' trifft. Der Inbegriff aller Punkte P' gibt dann die neue Schnittcurve. Um diese Curve in die angenommene Zeichenfläche E zu bringen, denkt man sich die Ebene E' um die Schnittlinie MN in die Ebene E umgelegt und zwar so, dass die Punkte D' und D, in welchen die von O auf E und E' gefällten Perpendikel diese Ebene treffen, auf verschiedene Seiten der Schnittlinie MN zu liegen kommen. D' und D stehen unter der Voraussetzung $OD = OD'$ nach der Umlegung gleich weit von dem Punkt L ab, in welchem das von D auf die Schnittlinie MN gefällte Perpendikel diese schneidet. Aus der Figur geht hervor, dass der umgelegte Punkt der Senkrechten angehört, die man in Q' auf MN in der Ebene E ziehen kann. Mit Rücksicht auf die Proportion:

$$OD : P'Q' = PD : PQ'$$

gelangt man zu der in Fig. 7 angegebenen Construction des Punktes P' aus P.

Um also eine beliebige Isogyre für eine gegebene Platte zu construiren, geht man in folgender Weise vor: Die Lage der Platte in Bezug auf den Krystall ist gegeben, wenn man die Trassen der drei durch die Elasticitätsachsen, die von irgend einem Punkt der einen Begrenzungsfläche ausgehen, gelegten

Ebenen auf der anderen Grenzfläche kennt. Es sei $A_1\ A_2\ A_3$ (s. Fig. 8) das von ihnen gebildete Dreieck,[1] R und S die Schnittpunkte der optischen Achsen, ferner JJ' die Richtung, für welche die Isogyre bestimmt werden soll. Zieht man im Abstand p, in diesem Fall der Plattendicke, von D eine Senkrechte auf JJ', so ist die neue Linie MN die Schnittlinie jener Ebene, deren Schnitt mit der betreffenden Fläche dritter Ordnung die zu übertragende Curve liefert. Zuerst construirt man die den Punkten A_1, A_2, A_3, R, S entsprechenden Punkte A_1', A_2', A_3', R', S' und für diese nach den gemachten Angaben die betreffende Curve. In Fig. 8 bedeutet P den Brennpunkt der Parabel, s die Scheiteltangente derselben und A die reelle Asymptote der Curve dritter Ordnung sammt ihrem Schnittpunkt α mit der Curve, C den reellen Durchschnitt der imaginären Asymptoten. Die Figur zeigt die Construction der Punkte E und F nach der einen, H und G nach der anderen Methode.

Es ist ersichtlich, dass die durch den Punkt D' parallel mit MN gezogene Gerade bei der Übertragung in die Ebene E zur unendlich entfernten Geraden wird. Die drei in dieser Geraden liegenden Curvenpunkte, also der Doppelpunkt D' und der Punkt F, werden die unendlich fernen Punkte der neuen Curve und die Tangenten in ihnen die Asymptoten. Alle Isogyren sind daher Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt im Unendlichen und dem entsprechend mit zwei parallelen Asymptoten. Je nachdem nun der dritte Schnittpunkt der durch D' parallel mit MN gezogenen Geraden die Curve in der Schlinge oder ausserhalb derselben trifft, liegt der Wendepunkt der übertragenen Curve entweder zwischen den parallelen Asymptoten oder ausserhalb derselben, so dass man entweder die eine oder die andere der typischen Formen der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt im Unendlichen erhält.[2]

---

[1] Falls das Schnittdreieck von vornherein gegeben ist, bekommt man den Abstand seiner Ebene vom Coordinatenursprung als zweite Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes (s. Fig. 1) mit der Hypothenuse OA_1 und einer Kathete A_1D. Die Länge OA_1 erhält man, indem man über A_1A_2 einen Halbkreis beschreibt und den Schnittpunkt desselben mit der Höhe A_3 III mit A_1 verbindet.

[2] Salmon, h. eb. C. p. 216.

Je zwei sich entsprechende Linien beider Ebenen schneiden sich in der Axe MN. Um daher die einer Geraden entsprechende zu ziehen, verbindet man ihren Schnittpunkt mit der Geraden $D'F$ mit dem Punkt L und zieht durch den Schnittpunkt der zu übertragenden Geraden mit MN die Parallele zu dieser Verbindungslinie. Auf diese Weise wurden die Asymptoten der neuen Curve K' (t_1, t_2, t_3) construirt, als Übertragungen der Tangenten in den Punkten D' (welche zugleich Parabeltangenten und als solche leicht zu construiren sind) und F. Der untere Zweig der Curve K besitzt in seinem weiteren Verlauf einen Wendepunkt; ein dritter Curvenzweig fällt nach links ausserhalb der Zeichenfläche.

Die angegebenen Constructionen versagen ihren Dienst, wenn die Isogyre für eine Schwingungsrichtung bestimmt werden soll, welche parallel zu einer der ursprünglichen Coordinatenebenen verläuft. In diesem Fall zerfällt aber die Fläche dritter Ordnung in eine Ebene und eine Fläche zweiter Ordnung, deren Schnitt mit der Krystallplatte unmittelbar ohne Schwierigkeit construirt werden kann.

Es sei z. B. $\xi = 0$. Die Gleichung der Isogyrenfläche wird demnach:

$$x\,[-A\eta\zeta x^2 + (B\eta y - C\zeta z)(\zeta y - \eta z)] = 0,$$

zerfällt also in die Gleichungen:

$$x = 0; \quad A\eta\zeta x^2 + (C\zeta z - B\eta y)(\zeta y - \eta z) = 0.$$

Zwischen den Richtungscosinussen ξ, η, ζ und den Richtungscosinussen α, β, γ der Begrenzungsflächen der Platte, besteht die Relation: $\beta\eta + \gamma\zeta = 0$, mit deren Hilfe die zweite Gleichung die Form:

$$(C\beta z + B\gamma y)(\beta y + \gamma z) = A\beta\gamma x^2$$

gewinnt. Die Isogyre ist der Schnitt dieser Fläche mit der Ebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p.$$

Die Gleichung dieser Curve in trimetrischen Coordinaten, bezogen auf die Trassen der Coordinatenebenen als Fundamentallinien, erhält man durch die Substitution der Werthe:

$$x = \frac{\alpha\beta\gamma}{p} \cdot \frac{s_1 x_1}{\alpha},\ y = \frac{\alpha\beta\gamma}{p} \cdot \frac{s_2 x_2}{\beta},\ z = \frac{\alpha\beta\gamma}{p} \cdot \frac{s_3 x_3}{\gamma}$$

in der Form:

$$(B\frac{\gamma}{\beta} s_2 x_2 + C\frac{\beta}{\gamma} s_3 x_3)(s_2 x_2 + s_3 x_3) = \frac{A}{\alpha^2} s_1^2 x_1^2$$

Für $s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0$ muss $x_1^2 = 0$ sein, das heisst, die Gerade $s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0$, welche parallel zu $x_1 = 0$ durch die Ecke $x_2 = x_3 = 0$ hindurchgeht, tangirt im Schnittpunkt mit der Geraden $x_1 = 0$, also im Unendlichen, die Curve, d. h. sie ist eine Asymptote derselben. Die Curve zweiter Ordnung ist mithin eine Hyperbel. Ebenso berührt die Gerade:

$$h = B\frac{\gamma}{\beta} s_2 x_2 + C\frac{\beta}{\gamma} s_3 x_3 = 0$$

die Curve dort, wo sie $x_1 = 0$ schneidet. Für $g_1 = 0$ als Gleichung der unendlich fernen Geraden wird:

$$s_2 x_2 + s_3 x_3 = g_1 - s_1 x_1,$$

durch welche Substitution die Curvengleichung übergeht in:

$$g_1 h = \frac{s_1 x_1}{\alpha}(A\frac{\beta\gamma}{\alpha} s_1 x_1 + B\frac{\alpha\gamma}{\beta} s_2 x_2 + C\frac{\alpha\beta}{\gamma} s_3 x_3)$$

oder:

$$g_1 h = \frac{s_1 x_1}{\alpha} g$$

und die Gerade $g = 0$ ist wieder jene, welche durch den Höhenpunkt des Fundamentaldreieckes und den Halbirungspunkt T von RS, in welchen Punkten die optischen Achsen die Ebene treffen, hindurchgeht. Für $g_1 = 0$ muss $g = 0$ sein, d. h. die zweite Asymptote der Hyperbel ist parallel zu dieser Geraden. Die Gerade h verbindet den Punkt $g = 0$, $x_1 = 0$ mit dem Eckpunkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Fundamentaldreieckes.

Der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente halbirt das zwischen den Asymptoten liegende Stück derselben, ein Satz, der zur Construction der zweiten Asymptote führt, deren Richtung ja bekannt ist. In Fig. 9 wurde die Isogyre 1 in dieser Weise construirt. Die eine der gestrichelten Linien ist die Gerade g,

die zweite die Tangente im Schnittpunkte derselben mit der Curve. $1'$ und $1''$ sind die Asymptoten der Hyperbel, welche, nachdem noch der Punkt *E* bekannt ist, construirt werden kann.

Fig. 9 zeigt sechs Isogyren, welche nach den angegebenen Regeln für ein Topasplättchen construirt wurden, dessen Begrenzungsflächen gleiche Neigung gegen die drei Elasticitätsachsen besitzen. Der Winkel der optischen Achsen wurde zu 56° 58' angenommen, wie er Strahlen von der Wellenlänge der Fraunhofer'schen Linie *D* entspricht. Ein Krystall mit grossem Achsenwinkel wurde gewählt, da sich für einen solchen die Constructionen selbst bei einem kleineren Massstab der Zeichnung mit genügender Genauigkeit durchführen lassen, was bei der Annahme eines kleinen Achsenwinkels nicht der Fall wäre. Die Schwingungsrichtungen, für welche die Isogyren gelten, sind parallel den Seiten und Höhen des Fundamentaldreieckes. Die ersteren lieferten als Isogyren die Hyperbeln 1, 2, 3 und die entsprechenden, ebenso bezeichneten Geraden, die anderen die Curven dritter Ordnung 4, 5, 6, von welchen bei keiner der dritte Curvenzweig dargestellt werden konnte. Die zu einer Curve gehörigen Asymptoten wurden mit der gleichen Zahl wie diese bezeichnet, nur wurden die Ziffern mit Accenten versehen, so dass z. B. die zur Curve 5 gehörigen Asymptoten die Geraden $5'$, $5''$, $5'''$ sind

Die genannten Curven stellen die Isogyren in der Gestalt dar, in welcher sie vor der Brechung erscheinen würden. Um über ihre Gestalt nach der Brechung ins Klare zu kommen, genügt es nach Lommel,[1] die Dimensionen der Curve um das μ-fache zu vergrössern, wenn man mit μ einen geeignet zu wählenden, mittleren Brechungscoëfficienten des Krystalls bezeichnet.

[1] Lommel, Wied. Ann. 18.

Über Camphoronsäure.

Von **J. Kachler** und **F. V. Spitzer.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

Wir haben in einer grösseren Reihe von Abhandlungen bereits die Resultate unserer Untersuchungen über nahezu sämmtliche der bis jetzt bekannten Campherderivate veröffentlicht und konnten durch diese Arbeiten frühere Angaben ergänzen und richtig stellen, sind aber auch andererseits durch geeignete Reactionen zu neuen Verbindungen gelangt.

Es ist uns gelungen, den dieser Körperclasse entsprechenden gesättigten und ungesättigten Kohlenwasserstoff das Hydrocamphen und das Camphen zu isoliren und es war möglich, den Zusammenhang dieser einfachen Verbindungen mit den complicirteren Derivaten des Camphers festzustellen.

Wir haben es bisher trotz des vorhandenen Materiales unterlassen, uns über die keineswegs so leicht zu lösende Frage der Constitution des Camphers auszusprechen, da derartige an und für sich interessante, theoretische Speculationen gerade für diese Verbindungen in grosser Anzahl veröffentlicht wurden, wovon die meisten sich nur auf den Verlauf einzelner Reactionen stützen, durch andere aber wieder unhaltbar gemacht werden.

Wir haben uns es jetzt zur Aufgabe gestellt, die bei der Oxydation des Camphers entstehenden Säuren, insbesondere diejenigen mit 9 Kohlenstoffatomen neuerdings zu untersuchen und mit der Camphoronsäure, welche als eines der Hauptproducte der Einwirkung von Salpetersäure auf Campher betrachtet werden muss, begonnen.

Die Camphoronsäure, welche der eine von uns bereits vor längerer Zeit[1] isolirt hat, wurde damals in ihrer Zusammensetzung der Formel $C_9H_{12}O_5 + H_2O$ entsprechend und als eine zweibasische dreiatomige Säure aufgefasst. Weiter wurde gefunden, dass sie beim Schmelzen mit Ätzkali in Buttersäure vom Siedepunkt 155 — 160° C. und in Kohlensäure zerfällt und dass mit Brom im geschlossenen Rohre auf 130° C. erhitzt, unter Abspaltung von Bromwasserstoff die Oxycamphoronsäure $C_9H_{12}O_6 + H_2O$ gebildet wird.

Seitdem hat zunächst Kissling[2] eine Abhandlung über die Constitution der Camphoronsäure geliefert und darauf hingewiesen, dass der eigentlichen Camphoronsäure nicht die Formel $C_9H_{12}O_5 + H_2O$, sondern $C_9H_{14}O_6$ zukomme und dass die Verbindung $C_9H_{10}O_5$ als ein Esteranhydrid aufzufassen sei, welches sehr leicht aus der Camphoronsäure entstehe. Er hat das zweibasische Kaliumsalz sowie den zweibasischen Äthyläther und daraus das Diamid dargestellt, endlich die beim Schmelzen der Camphoronsäure mit Ätzkali entstehende Buttersäure als Isobuttersäure erkannt. Kissling kommt zu dem Schlusse, dass die Camphoronsäure eine zweibasische dreiatomige Hydroxylsäure sei, welche noch ein keton- oder äthylenoxydartig gebundenes Sauerstoffatom und eine Isopropylgruppe enthalte.

Weiterhin hat Hjelt[3] in einer kurzen Mittheilung das Verhalten der Camphoronsäureäther zu Ammoniak näher beschrieben und im Allgemeinen die von Kissling in dieser Richtung erhaltenen Resultate bestätigt.

Wir haben vor Kurzem in einer vorläufigen Mittheilung[4] angekündigt, dass wir damit beschäftigt sind, die Bildungsweise, die Zusammensetzung der Camphoronsäure sowie ihrer Salze neuerdings festzustellen und unter anderem die Producte der Einwirkung von Acetylchlorid, Phosphorchlorid etc. zu unter-

---

[1] Sitzungsber. d. kais. Akademie 64, 125; Annal. d. Chem. u. Pharm. 159, 281.

[2] Inauguraldissertation, Tübingen 1878.

[3] Ber. d. deutsch. chem. G. 1880, 796.

[4] Sitzungsber. d. kais. Akademie Bd. 90, 1414; Monatshefte 1884, Juli-Heft.

suchen; zugleich haben wir erwähnt, dass ein neues Oxydationsproduct der Camphoronsäure erhalten wurde.

In letzter Zeit erschien auch von J. Bredt ein Aufsatz über die Constitution der Camphoronsäure,[1] in welcher er das dreibasische Silbersalz und den daraus erhaltenen dreibasischen Äthyläther beschreibt, die Camphoronsäure als eine Isopropyltricarballylsäure auffasst und weitere Untersuchungen, nebst einer Synthese derselben in Aussicht stellt.

Wir sind daher gezwungen, unsere bisher enthaltenen Resultate, so unvollständig sie auch sein mögen, bereits jetzt zu veröffentlichen.

Die Camphoronsäure ist in den bei der Oxydation des Camphers mit Salpetersäure gewonnenen und von der auskrystallisirten Camphersäure getrennten Mutterlaugen enthalten; wie man dieselbe daraus abscheidet, hat der eine von uns in der betreffenden Abhandlung[2] näher beschrieben.

Nachdem zunächst durch Abdampfen die Salpetersäure möglichst entfernt war, wurde mit überschüssigem Barythydrat gekocht und das herausfallende Baryumsalz der Camphoronsäure abfiltrirt und mit Wasser gewaschen.

Zur Reindarstellung der Säure wurde das rohe Baryumsalz durch eine eben hinreichende Menge verdünnter Schwefelsäure in der Kochhitze zerlegt und das Filtrat etwas eingedampft; die nach einiger Zeit auskrystallisirte gefärbte Säure wurde durch Kochen mit etwas Salpetersäure und öfteres Umkrystallisiren aus Wasser gereinigt.

Kissling[3] hat die Camphoronsäure in der Weise rein erhalten, dass er die mit Ammoniak neutralisirte Lösung der rohen Säure durch Kochen mit Chlorbaryum fractionirt fällte; die ersten Niederschläge waren gefärbt, die späteren dagegen vollkommen weiss. Diese wurden in Salzsäure gelöst, auf dem Wasserbade zur Trockene gebracht und mit Äther ausgezogen.

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 226, 249.

[2] Sitzungsber. d. kais. Akademie 76, 179; Annal. d. Chem. u. Pharm. 191, 143.

[3] Inauguraldissertation, Tübingen 1878.

Nach Angaben von Bredt[1] soll es zweckmässig sein, die Camphoronsäure behufs Reinigung in das Calciumsalz überzuführen, indem man die Lösung der Säure mit Kalkmilch annähernd neutralisirt und auf dem Wasserbade erwärmt; das Calciumsalz fällt als weisses Pulver nieder, während die Verunreinigungen in der Mutterlauge bleiben.

Die beiden letzten Methoden mögen bei kleineren Mengen anwendbar sein, bei der Reinigung von Camphoronsäure im grösseren Massstabe führt jedoch die erste Methode rascher zum Ziele.

Eine ziemlich concentrirte wässerige Lösung der Camphoronsäure stockt beim Auskühlen zu einem, aus feinen seideglänzenden Nädelchen bestehenden Kuchen, der nach dem Absaugen und Trocknen an der Luft, sich in eine blendend weisse, asbestartige Masse verwandelt. Enthält die Lösung Salzsäure, oder eine andere anorganische Säure, so krystallisirt die Camphoronsäure rascher und in deutlichen, zu kugeligen Aggregaten vereinigten Nadeln.

Die wiederholt aus Wasser umkrystallisirte Säure an der Luft, oder besser über Schwefelsäure getrocknet, besitzt die Zusammensetzung $C_9H_{14}O_6$.

0·4787 Grm. getrockneter Substanz gaben 0·8699 Grm. CO^2 und 0·2759 Grm. H_2O.

	$C_9H_{14}O_6$	Gefunden
C	49·54	49·56
H	6·42	6·41

Die Camphoronsäure ist im Wasser, besonders beim Erwärmen, in Alkohol und gewöhnlichem Äther leicht löslich, von absolutem Äther dagegen wird sie nur schwer aufgenommen. Ihr Schmelzpunkt ist nicht genau zu bestimmen; wird die Säure in ein enges, dünnwandiges Röhrchen eingefüllt und dieses allmählig im Schwefelsäurebade erhitzt, so beginnt selbe zwischen 135—140° C. zu schmelzen. Dabei erfolgt theilweise eine Abspaltung von Wasser, und bei einem neuerlichen Erhitzen der erstarrten Substanz schmilzt diese schon viel niedriger. Um also

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 226, 249.

die Wasserabspaltung möglichst zu vermeiden, wäre bei der Schmelzpunktbestimmung nur kurze Zeit vor dem eigentlichen Schmelzen zu erhitzen.

Wird das die lufttrockene Camphoronsäure enthaltende Röhrchen in eine bereits auf 140° C. erhitzte Schwefelsäure gebracht, so bleibt die Substanz im Röhrchen zunächst unverändert und kommt erst nach weiterem Erhitzen über 150° C. etwa bei 158° C. zum Schmelzen. Wenn die lufttrockene Substanz dagegen längere Zeit auf 100—120° C. erhitzt wird, so verwandelt sie sich nahezu vollständig in die Verbindung $C_9H_{12}O_5$, welche constant bei 135—136° C. schmilzt. Mit Wasserdampf ist die Säure nicht flüchtig.

Bei dem Umstande, dass die Camphoronsäure leicht Wasser abgibt und aus der Zusammensetzung des damals dargestellten Äthyläthers $C_9H_{11}(C_2H_5)O_5$ wurde seinerzeit die Camphoronsäure selbst als $C_9H_{12}O_5$ aufgefasst und die krystallisirte Säure als $C_9H_{12}O_5 + H_2O$ betrachtet.

Schon Kissling machte, wie bereits erwähnt, darauf aufmerksam, dass die Verbindung $C_9H_{12}O_5$ ein Esteranhydrid sei und der Camphoronsäure die Formel $C_9H_{14}O_6$ zukomme.

Um genauere Anhaltspunkte zur Entscheidung dieser Frage zu erhalten, haben wir nun neuerdings die Bildungsweise, Eigenschaften und Zusammensetzung der Salze der Camphoronsäure studirt und sollen im Folgenden der Übersicht wegen sowohl die bereits bekannten, als auch die von uns, Kissling und Bredt dargestellten Salze angeführt, und wo nöthig, näher beschrieben werden.

Salze der Camphoronsäure.

Die Camphoronsäure ist im Stande, drei Reihen von Salzen zu bilden, je nachdem 1, 2 oder 3 Atome Wasserstoff durch Metall ersetzt werden.

A. Einbasische Salze.

Zu diesen bisher unbekannten Salzen der Camphoronsäure kann man entweder in der Weise gelangen, dass man eine gewisse Menge Säure nur zum dritten Theil absättigt, oder dass man auf eine ätherische Lösung der Säure Natrium, Ammoniak

etc. einwirken lässt. Wir haben bei anderen Gelegenheiten oft den letzteren Weg mit Erfolg betreten und glaubten auch hier zum Ziele zu kommen.

Einwirkung von Natrium. Trockene Camphoronsäure wurde mit einer grösseren Menge absoluten Äther durch Kochen am Rückflusskühler in Lösung gebracht und blankes Natrium eingetragen.

Erst nach mehrtägigem Erhitzen bedeckte sich das Metall mit Salzkrusten, die öfters losgelöst werden mussten. Endlich wurde die abgeschiedene gelbliche Salzmasse abfiltrirt, vom Natrium getrennt, mit Äther gewaschen und im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet. Man erhält ein gelblich gefärbtes, leichtes, lockeres Pulver, das in Wasser leicht löslich ist und daraus beim Verdunsten in langen Nadeln krystallisirt; die wässerige Lösung reagirt stark alkalisch, entwickelt mit Säuren Kohlensäure und gibt mit Silbernitrat einen weissen Niederschlag. Eine damit vorgenommene Natriumbestimmung ergab 25·7% Natrium, für $C_9H_{13}NaO_6$ berechnet sich 9·59% und für $C_9H_{11}Na_3O_6$, 24·29% Na. Aus diesem Resultate und dem Verhalten gegen Säuren ergibt sich, dass das einbasische Salz der Camphoronsäure entweder gar nicht, oder nur in unreinem Zustande erhalten wurde.

Von besserem Erfolge war der Versuch begleitet, auf ähnliche Weise das entsprechende Ammonsalz darzustellen.

Ammonsalz. Wird Camphoronsäure in Äther gelöst und trockenes Ammoniakgas eingeleitet, so entsteht zuerst eine zähe Masse, die fortwährend gerührt werden muss, wenn man eine sehr bald eintretende Verstopfung der Gaszuleitungsröhre vermeiden will. Nach einiger Zeit scheidet sich das gebildete Ammonsalz als weisses Krystallpulver ab, das abfiltrirt und mit Äther gewaschen werden kann. Dasselbe ist in Wasser leicht löslich und schmilzt bei 127—128°C.

I. 0·2274 Grm. lufttrockenes Salz gaben 0·0980 Grm. Platin = 0·01816 Grm. NH_4;

II. 0·2960 Grm. des aus Wasser umkrystallisirten und im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Salzes gaben 0·1353 Grm. Platin = 0·02506 Grm. NH_4.

	$C_9H_{13}(NH_4)O_6$	Gefunden I	Gefunden II
NH_4	7·66	7·99	8·46

Es unterliegt somit keinem Zweifel, dass das untersuchte Salz wirklich ein einbasisches Ammonsalz der Camphoronsäure ist. Dass der Ammoniumgehalt bei der zweiten Analyse höher gefunden wurde, hat seinen Grund darin, dass dieses Ammonsalz schon im Vacuum über Schwefelsäure Wasser abspaltet und in das Ammonsalz der Anhydrocamphoronsäure $C_9H_{11}(NH_4)O_5$, welches später beschrieben werden soll und 8·28% NH_4 verlangt, übergeht.

Von einem entsprechenden Baryumsalze $C_9H_{13}baO_6$ wird später die Rede sein.

B. Zweibasische Salze.

Sie entstehen meist durch Absättigen einer Camphoronsäurelösung mit Carbonaten in der Kälte.

Ammonsalz $C_9H_{12}(NH_4)_2O_6$. Diese früher als $C_9H_{10}(NH_4)_2O_5 + H_2O$ beschriebene Verbindung, bildet sich, wenn Camphoronsäure in Wasser gelöst und mit Ammoniak neutralisirt oder auch mit überschüssigem Ammon zur Krystallisation eingedampft wird. Es erscheinen wawellitartige Krystallaggregate, die sich in Wasser leicht lösen und nach dem Trocknen im Vacuum über Schwefelsäure bei 148° C. unter Aufschäumen schmelzen, wobei Wasser und Ammoniak entweichen.

Die Analyse des neu dargestellten Salzes ergab Folgendes:

0·2282 Grm. des im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Salzes lieferten 0·1800 Grm. Platin = 0·3335 Grm. NH_4;

	$C_9H_{12}(NH_4)_2O_6$	Gefunden
NH_4	14·28	14·61

Kaliumsalz $C_9H_{12}K_2O_6 + H_2O$. Von Kissling durch Absättigen mit Kaliumcarbonat gewonnen. Weisse, glasig-rissige Masse, die in Alkohol fast unlöslich ist und bei circa 150° C. das Krystallwasser abgibt.

Baryumsalz $C_9H_{12}BaO_6 + H_2O$. Wenn man eine Camphoronsäurelösung mit aufgeschlämmten Baryumcarbonat durch

längere Zeit bei gewöhnlicher Temperatur digerirt, so erhält man nach dem Abfiltriren des überschüssigen Carbonates eine schwach sauer reagirende Flüssigkeit, die im Vacuum über Schwefelsäure zu einer krystallinischen Masse eintrocknet. 0·2892 Grm. solcher im Vacuum getrockneter Substanz wogen nach längerem Erhitzen auf 100° C. noch 0·2720 Grm. und lieferten schliesslich 0·1780 Grm. Baryumsulfat.

$C_9H_{12}\overset{\|\|}{Ba}O_6 + H_2O$	Gefunden im Vacuum getrocknet	$C_9H_{12}\overset{\|\|}{Ba}O_6$	Gefunden bei 100° getrocknet
Ba . . . 36·93	36·19	38·81	38·48

Dieses Baryumsalz ist in kaltem Wasser ziemlich leicht und vollständig löslich; wird die Lösung jedoch erhitzt, so scheidet sich ein weisser, pulveriger Niederschlag aus, welcher nach dem Abfiltriren, Waschen und Trocknen, bei der Analyse als das dreibasische camphoronsaure Baryum $C_9H_{11}\overset{|}{Ba}_3O_6$ erkannt wurde.

0·1993 Grm. des bei 180° C. getrockneten Baryumsalzes gaben 0·1640 Grm. Baryumsulfat.

	$C_9H_{11}\overset{|}{Ba}_3O_6$	Gefunden
Ba	48·87	48·38

Die von diesem unlöslichen Salze abfiltrirte, sauer reagirende Flüssigkeit enthält aber noch ein anderes Baryumsalz. Wird dieselbe abgedunstet, so bleibt eine gelblich gefärbte, gummiartige Masse zurück, die erst nach dem Zerreiben und längerem Stehen im Vacuum über Schwefelsäure alle Feuchtigkeit verliert und ein constantes Gewicht annimmt; der gefundene Baryumgehalt ergab, dass das einbasische Salz der Camphoronsäure $C_9H_{13}\overset{|}{Ba}O_6$ vorliegt.

0·3205 Grm. der im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Substanz lieferten 0·1290 Grm. Baryumsulfat.

	$C_9H_{13}\overset{|}{Ba}O_6$	Gefunden
Ba	23·99	23·66

Dieses einbasische Salz der Camphoronsäure verliert schon beim Erhitzen auf 90° C. soviel an Gewicht, dass sein Baryum-

gehalt mit dem eines Baryumsalzes der Anhydrocamphoronsäure $C_9H_{11}\overset{|}{ba}O_5$ nahezu übereinstimmt.

Aus den oben mitgetheilten Resultaten ergibt sich also, dass das zweibasische camphoronsaure Baryum durch Kochen seiner wässerigen Lösung in das unlösliche dreibasische und in das lösliche einbasische Baryumsalz zerfällt:

$$2\,C_9H_{12}\overset{|}{ba_2}O_6 = C_9H_{11}\overset{|}{ba_3}O_6 + C_9H_{13}\overset{|}{ba}O_6.$$

Dieselbe Umsetzung erleidet das zweibasische Baryumsalz auch im trockenen Zustande, wenn es längere Zeit auf 100° C. oder darüber erhitzt wird; bei einer darauf folgenden Behandlung mit Wasser geht nur die einbasische Verbindung in Lösung, während die dreibasische zurückbleibt.

Diese Umsetzung des zweibasischen camphoronsauren Baryums bei höherer Temperatur und die dabei stattfindende Wasserabgabe des entstandenen einbasischen Salzes waren die Ursache, dass in der öfter erwähnten ersten Abhandlung über Camphoronsäure, deren zweibasisches Baryumsalz als $C_9H_{10}\overset{|}{Ba}O_5$ aufgefasst wurde

Zinksalz $C_9H_{12}\overset{||}{Zn}O_6$. Sternförmig gruppirte Nadeln, die sich aus einer mit Zinkcarbonat abgesättigten und zum Syrup abgedampften Säurelösung bilden; dieselben wurden früher als $C_9H_{10}\overset{||}{Zn}O_5 + H_2O$ aufgefasst.

Cadmiumsalz $C_9H_{12}\overset{||}{Cd}O_6 + 6H_2O$. Durch Neutralisation mit kohlensaurem Cadmium dargestellt bildet es aus feinen Nadeln bestehende Krystalldrusen, welche in heissem Wasser leicht löslich sind und beim Trocknen selbst bei 140° C. nur vier Moleküle Krystallwasser abgeben.

I. 0·2114 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120° C. 0·0333 Grm. Wasser und lieferten 0·1015 Grm. Cadmiumsulfat.

II. 0·3077 Grm. lufttrockene Substanz gaben bei 140° C. 0·0497 Grm. Wasser und 0·1020 Grm. Cadmiumsulfid.

Berechnet für $C_9H_{12}\overset{\|\|}{Cd}O_6+6H_2O$		Gefunden		Berechnet für $C_9H_{12}\overset{\|\|}{Cd}O_6+2H_2O$	Gefunden	
		I.	II.		I.	II.
Cd	25·69	25·85	25·78	30·77	30·69	30·75
$4H_2O$	16·51	15·75	16·15	—	—	—

Äthyläther $C_9H_{12}(C_2H_5)_2O_6$. Von Kissling durch Einwirkung von Jodäthyl auf das früher beschriebene zweibasische Kaliumsalz erhalten. Bei andauerndem Erhitzen im Ölbad auf 200—220° C. zerfällt derselbe in $C_9H_{11}(C_2H_5)O_5$ und Alkohol.

C. Dreibasische Salze.

Wenn Camphoronsäurelösungen mit den Hydraten, Carbonaten der alkalischen Erden sowie Kupferacetat gekocht, oder durch Bleisalze gefällt werden, so entstehen die entsprechenden dreibasischen Salze; sie sind in Wasser nur schwer oder gar nicht löslich.

Calciumsalz $C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6$ + aq. Löst man Camphoronsäure in der 10—15fachen Menge kochenden Wassers und fügt so lange aufgeschlämmtes Calciumcarbonat zu, bis ein Theil selbst nach längerem Sieden ungelöst bleibt, so reagirt die abfiltrirte Flüssigkeit noch immer etwas sauer und scheidet nach dem Auskühlen und einigem Stehen einen reichlichen krystallinischen Niederschlag ab, der von der Lauge durch Absaugen getrennt und mit Wasser gewaschen wird.

Derselbe bildet nach dem Trocknen an der Luft ein lockeres, weisses Pulver, das in viel Wasser löslich ist und bei der Analyse sich als das dreibasische Salz $C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6$ mit 5 oder 6 Molekülen Krystallwasser erwies. Beim Erhitzen auf 100° C. verliert das Salz Krystallwasser, welches erst gegen 190° C. vollständig entweicht.

I. 0·4299 Grm. lufttrockenes Salz gaben bei 190° C. 0·1099 Grm. Wasser;

II. 0·3200 Grm. bei 190° C. getrockneter Substanz gaben 0·2343 Grm. Calciumsulfat.

	Berechnet für		
	$C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6 + 6H_2O$	$C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6 + 5H_2O$	Gefunden I
$6H_2O$	28·19	24·66	25·56

	$C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6$	Gefunden II
Ca	21·82	21·54

Es ist dies ohne Zweifel dasselbe Salz, das Bredt aus Camphoronsäure durch Eintragen von Kalkmilch als Ausscheidung erhielt; er macht weiterhin die Bemerkung, dass nach der von dem einen von uns früher[1] angegebenen Methode, das Calciumsalz mit Calciumcarbonat gemengt sich ausscheide, aus dem Filtrate aber kein Calciumsalz mehr auskrystallisire. Demgegenüber muss nun behauptet werden, dass auf obige Weise verfahren, der abfiltrirte überschüssige kohlensaure Kalk nach dem Waschen mit Wasser in Salzsäure gelöst und mit Äther ausgeschüttelt, an letzteren nur Spuren von Camphoronsäure abgibt, also kein Calciumsalz beigemischt enthielt, sondern alles Salz in Lösung ging und auch aus dem Filtrate beim Erkalten und längerem Stehen als weisses krystallinisches Pulver herausfällt.[2]

---

[1] Annal. d. Chem. 159, 290.

[2] Herr Bredt hat in seiner Mittheilung zugleich auf mehrere Ungenauigkeiten in den Ziffernangaben hingewiesen, welche bei einzelnen Analysen in meiner ersten Abhandlung über Camphoronsäure (Sitzungsber. d. kais. Akad. 64, 125; Annal. d. Chem. u. Pharm. 159, 281) vorkommen und die im Folgenden nach den vorhandenen Notizen ihre Berichtigung finden:

Dreibasische Salze: Kalksalz.

statt:	Gefunden	soll stehen:	Gefunden
	C.....36·29		C.. ..35·49
„	I. 0·3592 Grm. bei etc.	„ „	I. 0·3523 Grm. bei etc.
„	$C_9H_9ca_3O_5$	„ „	$C_9H_9ca_3O_5+H_2O$
	C.....40·45		C .....39·27
	H..... 3·44		H ..... 4·00
	Ca.....22·47		Ca .....21·82

Kupfersalz.

statt: *a)* II. 0·5897 Grm. bei etc.; soll stehen: *a)* II. 0·5730 Grm. bei etc.
„ *b)* 0·3786 Grm. bei 150° getrocknet, gaben 0·3786 Grm. CO_2, 0·1145 Grm. H_2O und 0·1115 Grm. CuO: soll stehen: 0·3010 Grm. bei 150° getrocknet gaben 0·3786 Grm. CO_2, 0·1145 Grm. H_2O und 0·1142 Grm. CuO.

Ferner in meiner zweiten Abhandlung über Campholsäure (Annal. d. Chem. u. Pharm. 162, 262) soll es statt: bei 210° getrocknet, heissen: bei 110° getrocknet.

Kachler.

Wenn man die von dem oben beschriebenen Calciumsalze abfiltrirte Lauge im Vacuum über Schwefelsäure abdunstet, so scheiden sich noch reichliche Mengen eines Calciumsalzes ab, das aus mikroskopischen, kurzen Nadeln besteht, und die Zusammensetzung $C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6 + 3H_2O$ besitzt.

I. 0·2895 Grm. des über Schwefelsäure getrockneten Salzes gaben bei 190—200° C. 0·0492 Grm. Wasser ab;

II. 0·2403 Grm. bei 200° getrockneter Substanz gaben 0·1747 Grm. Calciumsulfat.

$C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6 + 3H_2O$	Gefunden I.	$C_9H_{11}\overset{|}{c}a_3O_6$	Gefunden II.
$3H_2O$...16·41	16·99	Ca..21·82	21·38

Baryumsalz $C_9H_{11}\overset{|}{b}a_3O_6$. Diese früher als $C_9H_9\overset{|}{b}a_3O_5 + H_2O$ beschriebene und für die Camphoronsäure so charakteristische Verbindung entsteht, wenn die wässerige Lösung der Säure mit Barythydrat, Baryumcarbonat oder Baryumchlorid und Ammoniak gekocht wird; es fällt ein weisses, schweres, sandiges Pulver nieder, das in Wasser kaum, bei Gegenwart von Ammonsalzen, besonders Chlorammonium, jedoch ziemlich löslich ist, so dass in diesem Falle in verdünnten Säurelösungen durch die genannten Reagentien beim Kochen kein Niederschlag sich bildet. Zum Nachweis kleiner Mengen von Camphoronsäure empfiehlt sich daher das Kochen mit überschüssigem Barytwasser. Wird eine mässig concentrirte wässerige Lösung der Säure mit Barythydrat bis zur alkalischen Reaction versetzt, so scheidet sich schon in der Kälte nach einiger Zeit, rascher beim Schütteln, die Camphoronsäure beinahe vollständig als Baryumsalz aus, und die davon abfiltrirte Lösung gibt beim Kochen nur noch einen geringen Niederschlag dieses Salzes. Fügt man jedoch zuvor Chlorammonium oder salpetersaures Ammon hinzu, so bleibt die Flüssigkeit in der Kälte vollkommen klar, und lässt erst beim Erwärmen nur einen Theil des Baryumsalzes fallen.

Kupfersalz $C_9H_{11}\overset{|}{c}u_3O_6 + aq$. Wird eine Lösung der Säure mit Kupferacetat vermischt, so bleibt selbe zunächst klar; beim Kochen entsteht jedoch eine blaugrün gefärbte, schleimige Ausscheidung, welche beim Abkühlen der Flüssigkeit sich wieder vollkommen klar löst.

Setzt man das Erhitzen längere Zeit fort, so verwandelt sich der anfangs gallertige Niederschlag in ein lichtgrünes Pulver, das abfiltrirt, mit heissem Wasser gewaschen und getrocknet die Zusammensetzung $C_9H_{11}\overset{I}{cu}_3O_6 + H_2O$ besitzt. Beim Abdampfen des Filtrates erhält man noch ein dunkler gefärbtes wasserfreies Salz $C_9H_{11}\overset{I}{cu}_3O_6$. Auch diese beiden Kupfersalze wurden in der erwähnten früheren Abhandlung als $C_9H_9\overset{I}{cu}_3O_5 + 2H_2O$ und $C_9H_9\overset{I}{cu}_3O_5 + H_2O$ schon beschrieben.

Bleisalz $C_9H_{11}\overset{I}{pb}_3O_6 + 2H_2O$. Durch neutrales Bleiacetat entsteht in den Lösungen der freien Camphoronsäure ein reichlicher weisser Niederschlag, der gewaschen und über Schwefelsäure getrocknet wurde.

I. 0·6760 Grm. Substanz gaben 0·5454 Grm. Bleisulfat;

II. 0·4190 Grm. Substanz verloren bei 140° C. 0·0290 Grm. Wasser und lieferten 0·3355 Grm. Bleisulfat;

III. 0·3971 Grm. Substanz verloren bei 145° C. 0·0255 Grm. Wasser und lieferten 0·3186 Grm. Bleisulfat.

		Gefunden		
	$C_9H_{11}\overset{I}{pb}_3O_6 + 2H_2O$	I	II	III
$2H_2O$....	6·42	—	6·92	6·41
Pb.....	55·22	55·06	54·65	54·76

Auch mit Bleiessig entsteht in den Lösungen der Camphoronsäure ein weisser Niederschlag, der jedoch seiner Zusammensetzung nach, als Gemenge eines zweibasischen mit einem dreibasischen Salz betrachtet werden muss.

I. 0·4106 Grm. bei 100° C. getrockneter Substanz gaben 0·3200 Grm. CO_2, 0·0960 Grm. H_2O und 0·2385 Grm. Bleioxyd;

II. 0·6502 Grm. bei 100° C. getrocknetes Salz lieferten 0·5181 Grm. Bleisulfat.

	Berechnet für		Gefunden	
	$C_9H_{12}\overset{II}{P}bO_6$	$C_9H_{11}\overset{I}{pb}_3O_6$	I	II
C.....	25·56	20·58	21·25	—
H.....	2·84	2·09	2·59	—
Pb....	48·86	59·01	53·91	54·39

Silbersalz $C_9H_{11}Ag_3O_6 + H_2O$. Es wird nach Bredt durch Fällen einer Lösung des dreibasischen Calciumsalzes mit Silbernitrat als weisser Niederschlag erhalten.

Wenn man Camphoronsäuremit Ammoniak absättigt und durch Silbernitrat fällt, oder eine verdünnte Säurelösung mit Silberoxyd längere Zeit kocht und filtrirt, so erhält man ein Gemenge von zweibasischen mit dreibasischen Salzen. (Gefunden: 53·91, 54·39 und 56·82% Ag; für $C_9H_{11}Ag_3O_6$ berechnet: 60·11% Ag.)

Camphoronsäuretriäthyläther $C_9H_{11}(C_2H_5)_3O_6$ wurde von Bredt aus dem Silbersalz durch Einwirkung von Äthyljodid dargestellt; derselbe siedet bei 301° C.

Alle beschriebenen Salze, sowie der Di- und Triäthyläther entsprechen der Camphoronsäure mit der Formel $C_9H_{14}O_6$, und dies ist schon aus dem Grunde anzunehmen, weil manche hauptsächlich die dreibasischen von ihrem Krystallwasser befreiten Salze, eine hohe Temperatur vertragen ohne ihre Zusammensetzung zu ändern.

Die Camphoronsäure $C_9H_{14}O_6$ gibt, wie bereits erwähnt, leicht ein Molekül-Wasser ab und verwandelt sich in die Anhydrocamphoronsäure $C_9H_{12}O_5$. Auch Kissling hat schon beobachtet, dass die Wasserabspaltung bei einer Temperatur unter 100° C. (bei 80—85° C.) erfolgt, wobei sich ein Gemenge von Camphoronsäure und der Anhydrosäure bildet; selbst wenn man die Säure längere Zeit bei ihrem Schmelzpunkte erhält, bleibt noch immer ein geringer Theil unverändert, während sich die wasserärmere Verbindung schon in bemerkbarer Menge verflüchtigt. Da letztere von absolutem Äther in der Kälte sehr leicht, die Camphoronsäure dagegen nur schwer aufgenommen wird, so können beide Substanzen auf diese Weise getrennt werden. Ohne grösseren Verlust kann man diese Anhydrosäure durch Destillation der Camphoronsäure darstellen. Zuerst entweicht Wasserdampf, der etwas Camphoronsäure mitreisst und sich zu einer sauren Flüssigkeit condensirt. Bei dem hohen Siedepunkte der Anhydrosäure (gegen 400°) gelingt es leicht alles Wasser überzutreiben, bevor das eigentliche Product als gelbliches, sofort erstarrendes Öl übergeht; die letzten Partien

sind dunkler gefärbt und es bleibt eine geringe Menge schwarzer, zäher Masse zurück.

Wir haben versucht, diese Dunkelfärbung, welche von einer partiellen Zersetzung herrühren mag, durch Destillation im Vacuum zu vermeiden, was jedoch durch das heftige Stossen der Flüssigkeit, bei welchem oft die ganze Substanz in die Vorlage geschleudert wurde, nicht zum Ziele führte. Um die Anhydrosäure rein zu erhalten, wird das erstarrte Destillat mit absolutem Äther aufgenommen und von der in Form weisser Flocken zurückbleibenden Camphoronsäure durch rasche Filtration getrennt; beim freiwilligen Verdunsten der ätherischen Lösung in einem trockenen Raume bilden sich schöne, gut ausgebildete, beinahe farblose Krystalle der Anhydrocamphoronsäure $C_9H_{12}O_5$.

0·3004 Grm. im Vacuum über Schwefelsäure getrockneter Substanz lieferten bei der Verbrennung 0·5954 Grm. CO_2 und 0·1645 Grm. H_2O.

	$C_9H_{12}O_5$	Gefunden
C	54·00	54·05
H	6·00	6·08

Die Anhydrocamphoronsäure bildet farblose Krystalle, die beim Liegen an der Luft bald trüb werden und sich wahrscheinlich in Folge von Wasseraufnahme mit einer weissen Kruste überziehen. Sie sind in Wasser, Alkohol, Äther und Chloroform leicht, dagegen nur schwer im Petroleumäther löslich. Mit Wasser oder feuchten Lösungsmitteln zusammengebracht, bildet sich sofort Camphoronsäure, welche beim Verdunsten der Lösungen erhalten wird.

Die Anhydrosäure schmilzt constant bei 135—136° C. und sublimirt unverändert in federartigen Krystallnadeln.

Herr Hofrath von Zepharovich hatte die Freundlichkeit über die krystallographischen Verhältnisse dieser Verbindung Folgendes mitzutheilen:

„Krystallsystem: rhombisch;

$$a : b : c = 0{\cdot}9634 : 1 : 0{\cdot}8170;$$

Formen: (010) . (011) . (101) . (110) . (111);

$$\infty P\bar{\infty} \; . \; P\bar{\infty} \; . \; P\bar{\infty} \; . \; \infty P \; . \; P.$$

Die Combinationen sind entweder brachydiagonal verlängert, oder würfelähnlich bei gleichmässiger Ausdehnung von (101) und (010) ($101 : \bar{1}01 = 99°\ 24'$, $101 : 010 = 90°$ —), oder tafelig durch Vorwalten von (010). Der Habitus entspricht mehr dem rhombischen als dem monosymmetrischen Systeme, welches letztere (mit sehr geringer Abweichung des Axenwinkels *ac* von 90°) nach den schwankenden Neigungen der massgebenden Flächen auch angenommen werden könnte. Die Ergebnisse der optischen Untersuchung waren bei der ungünstigen Beschaffenheit der Krystalle für die Systemsfrage ebenfalls nicht entscheidend. Im Vergleich mit den (monosymmetrischen) Formen des aus Hydrooxycamphoronsäure $C_9H_{14}O_6$ und Brom erhaltenen Camphers derivates $C_9H_{12}O_6$[1] ($ac = 84°\ 15'$) zeigen sich bei $C_9H_{12}O_5$ die beiden Axen *a* und *c* gleichmässig und zwar um nahezu ein Drittel verlängert."

Nachdem in der Camphoronsäure drei Wasserstoffatome durch Metalle ersetzbar sind und bei der Bildung der eben beschriebenen Anhydrosäure $C_9H_{12}O_5$ nur ein Molekül Wasser abgespalten wird, so konnte die letztere immer noch ein durch Metalle ersetzbares Wasserstoffatom enthalten. In dieser Voraussetzung haben wir versucht, Salze der Anhydrosäure darzustellen, und zwar in der Weise, dass dabei der Zutritt von Wasser, welcher die Bildung von Camphoronsäure zur Folge hätte, ausgeschlossen war.

Einwirkung von Natrium. Anhydrocamphoronsäure wurde in absolutem Äther gelöst und mit blankem Natrium durch sechs Stunden am Rückflusskühler im Sieden erhalten; es war keine besondere Einwirkung zu bemerken, das Natrium blieb beinahe blank, nur wenige weisse Flocken hatten sich abgeschieden. Beim Verdunsten der Lösung bildeten sich am Boden des Gefässes sternförmige Krystallgruppen, am Rande dagegen schöne Krystalle der Anhydrosäure; die ersteren schmelzen bei 110—120° C., enthalten kein Natrium und sind wahrscheinlich ein Gemenge von Camphoronsäure (durch Wasseranziehung während des Verdunstens enstanden) und Anhydrosäure. Eine Natrium-

[1] v. Zepharovich, Sitzungsber. der kais. Akad. 1881, Bd. 83, 545.

verbindung hatte sich also unter diesen Umständen nicht in bemerkbarer Menge gebildet.

Einwirkung von Ammoniak. Wenn man in eine Lösung von Anhydrocamphoronsäure in absolutem Äther trockenes Ammoniakgas einleitet, so wird die Flüssigkeit zähe und ein weisses krystallinisches Pulver scheidet sich ab.

Hat man das Einleiten längere Zeit fortgesetzt und die entstandene Salzmasse abfiltrirt, so hinterlässt der Äther beim Verdunsten kaum einen Rückstand. Die erhaltene Ammonverbindung ist schön weiss, schmilzt bei 125—128° C. und ist in Wasser leicht löslich; die wässerige Lösung reagirt sauer.

I. 0·3005 Grm. im Vacuum über Schwefelsäure getrockneter Substanz gaben bei der Verbrennung 0·5425 Grm. CO_2 und 0·1965 Grm. H_2O.

II. 0·4602 Grm. im Vacuum getrockneter Substanz lieferten mit Platinchlorid abgedampft und Glühen des entstandenen Platinsalmiaks, 0·2150 Grm. Platin.

	$C_9H_{11}(NH_4)O_5$	Gefunden I	Gefunden II
C	49·77	49·23	—
H	6·91	7·26	—
N	6·45	—	6·73

Wie schon gelegentlich der Beschreibung des einbasischen Ammonsalzes der Camphoronsäure $C_9H_{13}(NH_4)O_6$ erwähnt wurde, geht dieses leicht, schon bei längerem Stehen im Vacuum über Schwefelsäure unter Verlust von einem Molekül Wasser in das Ammonsalz der Anhydrocamphoronsäure über, und dieser Umstand erklärt es auch, dass gleiche Schmelzpunkte für beide Verbindungen gefunden wurden.

Beide Ammonsalze erleiden bei längerem Erhitzen im Wasserbade eine weitergehende Veränderung; sie werden zuerst breiig und nach einiger Zeit wieder fest. Behandelt man die erkaltete Masse mit Wasser, so geht nur ein kleiner Theil noch unveränderten Ammonsalzes in Lösung, während das zurückbleibende sich erst in Wasser beim Erhitzen auflöst und später in breiten, nadelförmigen Krystallen anschiesst. Diese Verbindung schmilzt bei 214—220° C.; ihre sauer reagirende wässerige Lösung entwickelt mit Kalilauge gekocht, Ammoniak und scheint

in ihren Eigenschaften mit der von Hjelt[1] aus dem Diamid der Camphoronsäure erhaltenen Amidosäure $C_9H_{15}NO_5$ (Schmelzpunkt 212° C.) übereinzustimmen, welcher Umstand noch näher untersucht werden soll.

Die Entstehung des Ammoniumsalzes aus der Anhydrocamphoronsäure, sowie die Existenz des schon früher beschriebenen Äthyläthers $C_9H_{11}(C_2H_5)O_5$ zeigen, dass derselben noch die Eigenschaften einer einbasischen Säure zukommen.

Aus der Verbindung $C_9H_{12}O_5$ kann noch ein weiteres Anhydrid erhalten werden. Als wir nämlich versuchten, Acetylchlorid auf Camphoronsäure einwirken zu lassen, entstand kein Acetylderivat, sondern die Verbindung $C_{18}H_{22}O_9$.

Auf die gleiche Weise wird derselbe Körper auch aus der Anhydrocamphoronsäure gebildet.

Camphoronsäure und Chloracetyl.

Wird Camphoronsäure mit Chloracetyl zusammengebracht, so findet erst beim Kochen am Rückflusskühler eine Einwirkung und Salzsäureentwicklung statt. Nach einiger Zeit hört letztere auf; wird nun die etwas gefärbte Flüssigkeit auf dem Wasserbade abgedunstet und die zurückbleibende zähe Masse mit absolutem Äther vermischt, so erhält man bald eine weisse krystallinische Ausscheidung, die abfiltrirt und mit Äther oder Alkohol gewaschen werden kann.

Nach dem Trocknen im Vacuum über Schwefelsäure besteht die Substanz aus kleinen, farblosen Kryställchen, die bei 172 bis 174° C. schmelzen, in kaltem Äther, Alkohol, Petroleumäther beinahe unlöslich sind und selbst von kochendem Alkohol oder Äther nur schwer aufgenommen werden. Beim Kochen mit Wasser bleiben selbe längere Zeit unverändert, werden jedoch von verdünnten Alkalien leicht gelöst und zeigen dann die Reactionen der Camphoronsäure.

Bei der Analyse wurden Zahlen erhalten, welche für das Anhydrid $C_{18}H_{22}O_9$ stimmen.

0·1860 Grm. bei 100° C. getrockneter Substanz gaben 0·3855 Grm. CO_2 und 0·0975 Grm. H_2O.

---

[1] Ber. d. d. chem. G. 13, 796.

	$C_{18}H_{22}O_9$	Gefunden
C	56·54	56·51
H	5·75	5·82.

Die Entstehung dieser Verbindung wäre nach folgender Gleichung aufzufassen:

$$2\,C_9H_{14}O_6 - 3\,H_2O = C_{18}H_{22}O_9.$$

In den Mutterlaugen des eben beschriebenen Anhydrides bilden sich bei längerem Stehen schön ausgebildete Krystalle, die bei 136—137° C. schmelzen und sich als Anhydrocamphoronsäure erwiesen.

Das Acetylchlorid wirkt also auf die Camphoronsäure lediglich wasserentziehend, und zwar scheint zuerst die Anhydrosäure $C_9H_{12}O_5$ und aus dieser erst das Anhydrid $C_{18}H_{22}O_9$ zu entstehen.

Anhydrocamphoronsäure und Chloracetyl.

Die Reaction verläuft hier in ähnlicher Weise, wie bei der Camphoronsäure. Nach dem Abdunsten des Reactionsproductes auf dem Wasserbade erhält man einen dicken Syrup, der mit absolutem Äther vermischt, ein weisses Krystallpulver fallen lässt, das nach dem Abfiltriren und Waschen mit Äther im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet, vollkommen die Eigenschaften der Verbindung $C_{18}H_{22}O_9$ besitzt.

$$2\,C_9H_{12}O_5 - H_2O = C_{18}H_{22}O_9.$$

Der Schmelzpunkt wurde bei 175—176° C. gefunden und es scheint, dass nach längerem Liegen der Substanz an der Luft, in Folge einer Wasseranziehung, derselbe erniedrigt wird.

0·2235 Grm. der bei 100° C. getrockneten Substanz gaben 0·4622 Grm. CO_2 und 0·1168 Grm. H_2O.

	$C_{18}H_{22}O_9$	Gefunden
C	56·54	56·38
H	5·75	5·86

Wir haben weiterhin auf Camphoronsäure, sowie auf die Anhydrosäure Phosphorchlorid einwirken lassen in der Erwartung, durch diese Reaction möglicherweise Anhaltspunkte zur Ent-

scheidung der Frage, ob die Camphoronsäure eine dreibasische, oder eine zweibasische dreiatomige Säure sei, zu gewinnen.

Camphoronsäure und Phosphorchlorid.

Wird trockene Camphoronsäure mit etwa der vierfachen Menge Phosphorpentachlorid zusammengebracht, so ist die Einwirkung eine sehr langsame. Beim Erwärmen jedoch entwickelt sich Salzsäure und das Gemenge wird nach und nach, rascher beim Kochen, zu einer nur bei länger andauerndem Erhitzen, dunkelgefärbten Flüssigkeit gelöst. Beim Auskühlen scheiden sich nadelförmige Krystalle aus, die nach einiger Zeit von der Lösung getrennt und ohne bedeutenden Verlust an Substanz mehrmals mit trockenem Äther gewaschen werden konnten, denn der letztere schied beim Verdunsten nur wenig Krystalle aus. Nach dem Trocknen an der Luft und selbst nach längerem Stehen im Vacuum über Ätzkalk und Schwefelsäure blieb noch immer ein Geruch nach Phosphoroxychlorid anhaftend. Die neue Verbindung wurde schon bei 80° C. zum Theil flüssig, war aber erst bei 120° C. vollständig geschmolzen. Um selbe zu reinigen, wurde aus warmem absolutem Äther umkrystallisirt; dabei entstanden beinahe farblose Nadeln, die in kaltem Äther nur wenig löslich sind und nach dem Trocknen bei 130—131° C. schmelzen. Sie lösen sich schwer in kochendem Wasser, leichter in Alkohol und warmem Äther; eine damit ausgeführte Chlorbestimmung ergab, dass diese Verbindung das Chlorid der Anhydrocamphoronsäure darstellt.

0·2678 Grm. Substanz mit verdünntem Ammoniak längere Zeit gekocht, dann durch salpetersaures Silber gefällt, lieferten 0·1820 Grm. Chlorsilber.

	$\underbrace{C_9H_{11}O_4Cl}$	$\underbrace{\text{Gefunden}}$
Cl	16·25	16·81

Wird die von dem krystallisirten Chlorid abgegossene Flüssigkeit in Wasser eingetragen, die Lösung mit Äther ausgeschüttelt und letzterer abdestillirt, so bleibt eine ziemliche Menge eines krystallinischen Rückstandes zurück, der mit Wasser gekocht, beim Verdunsten gewöhnliche Camphoronsäure liefert. Beinahe ebenso viel einer camphoronsäureähnlichen Krystallmasse erhält

man noch, wenn die mit Äther extrahirte Flüssigkeit verdampft wird. Selbst nach mehrmaligem Umkrystallisiren aus Wasser enthalten die ausgeschiedenen kugeligen Aggregate von feinen Nadeln, neben Camphoronsäure noch viel Phosphorsäure (10·8% PO_4). Wird eine wässerige Lösung mit Baryumcarbonat in der Kälte gesättigt, so enthält das entstandene lösliche Baryumsalz ebenfalls viel Phosphorsäure, so dass man das Vorhandensein einer gepaarten Phosphorsäure vermuthen könnte.

Das Phosphorchlorid wirkt also auf die Camphoronsäure offenbar sowie Acetylchlorid zunächst wasserentziehend, und erst in der entstandenen Anhydrosäure $C_9H_{12}O_5$ wird eine OH-Gruppe durch Chlor ersetzt. Wird das Chlorid $C_9H_{11}O_4Cl$ längere Zeit mit Wasser gekocht und endlich abgedampft, so erhält man die krümligen Krystalle der Camphoronsäure, deren Schmelzpunkt nach dem Trocknen im Wasserbade bei 135—138° C. gefunden wurde.

Anhydrocamphoronsäure und Phosphorchlorid.

In erheblich grösseren Mengen, als soeben beschrieben, erhält man das Chlorid $C_9H_{11}O_4Cl$, wenn man die Anhydrocamphoronsäure mit der doppelten Menge Phosphorchlorid langsam erwärmt und endlich auf dem Sandbade einige Zeit kocht. Nach dem Auskühlen erfüllt sich die Flüssigkeit mit nadelförmigen Krystallen des Chlorides, die auf gleiche Weise durch Waschen mit Äther von der Lauge befreit werden. Nach dem Trocknen im Vacuum über Ätzkalk und Schwefelsäure besitzen sie ebenfalls den Schmelzpunkt von 130—131° C. und dieselbe Zusammensetzung.

0·2204 Grm. Substanz gaben nach Carius 0·1514 Grm. Chlorsilber.

	$C_9H_{11}O_4Cl$	Gefunden
Cl	16·25	16·99

Da dieses aus Camphoronsäure und deren Anhydrosäure erhaltene Chlorid verhältnismässig leicht wieder in die ursprüngliche Säure übergeht, so könnte man demnach dasselbe den Säurechloriden an die Seite stellen.

Diesem entsprechend und aus dem Umstande, dass die Camphoronsäure dreibasische Salze liefert, dass die Verbindung

$C_9H_{12}O_5$ noch saure Eigenschaften besitzt, ferner aus der Existenz des dreibasischen Äthyläthers würde der Schluss gezogen werden können, die Camphoronsäure sei, wie Bredt dies bereits annimmt, eine dreibasische Säure.

Allein dies scheint uns noch nicht ausser Frage gestellt. Eine Lösung von Camphoronsäure liefert mit Carbonaten in der Kälte blos zweibasische Salze, dem entsprechend und nach dem allgemeinen Verhalten ist es ausser Zweifel, dass in derselben zwei Carboxylgruppen vorhanden sind. Kissling hat bereits hervorgehoben, dass in der Camphoronsäure ausser diesen noch ein keton- oder äthylenoxydartig gebundenes Sauerstoffatom enthalten sein dürfte. Ist Letzteres der Fall und ist an dem Kohlenstoffatom, wo bereits Sauerstoff mit einer Affinität gebunden ist, auch noch ein Hydroxyl, so würde eine dem Carboxyl ähnliche Gruppe entstehen.

Bei der nothwendig gewordenen Auffassung der Camphoronsäure als $C_9H_{14}O_6$ statt wie früher $C_9H_{12}O_5 + H_2O$, erscheint die sogenannte Hydrooxycamphoronsäure[1] $C_9H_{14}O_6$ als eine mit ersterer isomere Verbindung. Die letztere ist beständiger und bildet unter gewöhnlichen Umständen nur dreibasische Salze; diese wäre demnach wirklich als eine dreibasische Säure zu betrachten.

Es wird unsere Aufgabe sein, die Hydrooxycamphoronsäure näher zu untersuchen, ihre Beziehungen zur Camphoronsäure festzustellen und bei diesem Anlasse ihre nicht mehr zutreffende Benennung zu ändern.

Zum Schlusse möge noch erwähnt werden, dass die Camphoronsäure bei geeigneter Behandlung mit Brom dieselben zwei isomeren Verbindungen $C_9H_{14}O_7$ liefert, welche, wie bereits mitgetheilt,[2] aus Camphoronsäure bei längerem Erhitzen mit Königswasser entstehen.

---

[1] Kachler, Sitzungsber. d. k. Akad. 76, 179; Annal. d. Chem. und Pharm. 191, 143.

[2] Sitzungsber. d. kais. Akad. 90, 141; Monats-Hefte für Chem. 1884 Juli-Heft.

Über Mannit-Bleinitrat.

Von **Alois Smolka.**

(Aus dem Laboratorium der Staats-Gewerbeschule in Bielitz.)

Morawski[1] veröffentlichte vor einiger Zeit eine Arbeit über einen Plumbonitratoglycerid genannten Körper, den er einmal durch Einwirkung von Bleinitratlösung auf Glycerin unter Zusatz von Ammoniak, ein andermal aus Bleinitrat, Glycerin und Bleioxyd erhielt. Ich versuchte über Veranlassung Herrn Professor Morawski's ähnliche Verbindungen aus den anderen mehratomigen Alkoholen darzustellen und gebe hiemit die Beschreibung einer solchen, die aus der Behandlung von salpetersaurem Blei mit Mannit hervorging.

Wird Mannit und Bleinitrat in Wasser gelöst und dann Ammoniak zugegeben, so fällt ein weisser Niederschlag heraus, der sich beim jedesmaligen Umrühren auflöst; wurde eine gewisse Menge von Ammoniak zugefügt, so verschwindet die Fällung beim Umrühren nicht mehr. Der getrocknete Niederschlag explodirt beim Erhitzen heftig. Analysen solcher Niederschläge, die unter Zusatz von verschiedenen Ammoniak- und Mannitmengen auf dieselbe Quantität von Bleinitrat erhalten wurden, ergaben einen sehr wechselnden Bleigehalt und auch die Heftigkeit, mit welcher die Producte beim Erhitzen explodirten, war eine verschiedene. Aus einer Reihe von angestellten Versuchen geht hervor, dass bei überschüssig vorhandenem Mannit immer ein und derselbe Körper entsteht, auch wenn man mit dem Zusatz von Ammoniak so weit geht, dass die Flüssigkeit deutlich darnach riecht. Am zweckmässigsten erwies sich folgendes Verfahren zur Darstellung dieser Verbindung, des Mannit-Bleinitrats:

---

[1] Journ. f. prakt. Chem., neue Folge. Bd. 22, p. 401.

Man löst auf je zwei Moleküle Bleinitrat mindestens ein Molekül Mannit in Wasser auf, erwärmt auf etwa 80° C. und gibt so viel titrirte Ammoniakflüssigkeit hinzu, als nothwendig ist, um drei Viertel der im Bleinitrat vorhandenen Salpetersäure zu binden. Es fällt ein voluminöser weisser Niederschlag heraus, der sich beim Umrühren immer wieder auflöst, bis er gegen Schluss der Operation nicht mehr verschwindet. Dann lässt man die Flüssigkeit sammt dem Niederschlage etwa 24 Stunden lang an einem kühlen Ort im bedeckten Gefässe stehen. Der Niederschlag wird nun krystallinisch, haftet fest an den Gefässwandungen an und auf der Oberfläche der Flüssigkeit scheidet sich eine feine gelatinöse Haut ab. Nach dem Decantiren mit kaltem Wasser wird abfiltrirt und um allen Mannit zu entfernen, wäscht man zum Schlusse am Filter mit Alkohol aus.

Analyse des Mannit-Bleinitrats.

Die Analysen wurden an von verschiedenen Darstellungen herrührenden Präparaten ausgeführt. Zur Wasserbestimmung wurde der Körper über Chlorcalcium bis zur Gewichtsconstanz stehen gelassen; die anderen Bestimmungen wurden an Präparaten vorgenommen, die bei 125—130° C. getrocknet, also wasserfrei waren.

a) Wasserbestimmung.

1. 0·4886 Gr. Substanz gaben bei 125° C. 0·0142 Gr. o. 2·91% H_2O.
2. 0·3941 „ „ „ „ „ 0·0120 „ „ 3·04 „ „
3. 0·7530 „ „ „ „ „ 0·0235 „ „ 3·12 „ „
4. 0·9530 „ „ „ „ „ 0·0307 „ „ 3·22 „ „
5. 0·8047 „ „ „ „ „ 0·0245 „ „ 3·04 „ „

b) Bleibestimmung.

Das entwässerte Mannit-Bleinitrat wurde in mit Salpetersäure angesäuertem Wasser gelöst, das Blei mit Ammoniumcarbonat und Ammoniak gefällt und als PbO gewogen.

1. 0·5180 Grm. Substanz gaben 0·4105 Grm. oder 79·25% PbO.
2. 0·4355 „ „ „ 0·3455 „ „ 79·33 „ „
3. 0·4608 „ „ „ 0·3650 „ „ 79·21 „ „
4. 0·3675 „ „ „ 0·2920 „ „ 79·46 „ „

5. 0·5478 Grm. Substanz gaben 0·4325 Grm. oder 78·95% PbO.
6. 0·7217 „ „ „ 0·5712 „ „ 79·20 „ „
7. 0·6090 „ „ „ 0·4804 „ „ 78·95 „ „

c) Kohlenstoff- und Wasserstoffbestimmung.

Zur Elementaranalyse wurde die wasserfreie Substanz mit CuO gemischt und im Bajonettrohr mit vorgelegtem Kupfer verbrannt.

1. 0·8290 Grm. Substanz lieferten 0·1825 Grm. CO_2, entsprechend 0·049773 Grm. oder 6·00% C und 0·055 Grm. H_2O, entsprechend 0·00611 Grm. oder 0·74% H.

2. 1·0090 Grm. Substanz gaben 0·2414 Grm. CO_2, entsprechend 0·065836 Grm. oder 6·52% C und 0·067 Grm. H_2O, entsprechend 0·007444 Grm. oder 0·74% H.

d) Stickstoffbestimmung.

Die entwässerte Verbindung ward mit CuO gemischt und mit vorgelegtem Kupfer nach der Methode von Dumas verbrannt, der Stickstoff in Zulkowsky's Apparat gemessen.

1. 0·5382 Grm. Substanz gaben bei 15·6° C. und 745·9 MM. Barometerstand 13·0 CC. N, oder 0·015159 Grm. = 2·81% N.

2. 0·7800 Grm. Substanz gaben bei 14° C. und 730·6 MM. Barometerstand 18·4 CC. N, entsprechend 0·0211335 Grm. oder 2·71% N.

Im Folgenden sei eine Zusammenstellung der gefundenen analytischen Daten gegeben:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Mittel
PbO	79·25%;	79·33%;	79·21%;	79·46%;	78·95%;	79·20%;	78·95%;	79·19%
C ..	6·00 „;	6·52 „;	—	—	—	—	—	6·26 „
H ..	0·74 „;	0·74 „;	—	—	—	—	—	0·74 „
N ..	2·81 „;	2·71 „;	—	—	—	—	—	2·76 „

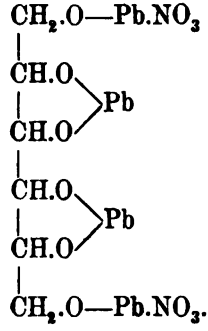
Eine Verbindung von der Zusammensetzung $C_6H_8Pb_4N_2O_{12}$ verlangt:

PbO.... 79·08%
C..... 6·38 „
H..... 0·71 „
N..... 2·48 „

In der Verbindung von der angegebenen Zusammensetzung entsprechen zwei Molekülle Krystallwasser 3·09% H_2O, — während

aus den oben angeführten, gut unter einander stimmenden Wasserbestimmungen im Mittel 3·07% H_2O gefunden wurden.

Auf Grund dieser Angaben und aus seinem weiter zu erörternden Verhalten lässt sich das in Rede stehende salpetersaure Mannitblei = $C_6H_8O_6.Pb_4(NO_3)_2$ für ein Mannitmolekül ansehen, in welchem vier Hydroxylwasserstoffe durch zwei zweiwerthige Bleiatome und die restirenden zwei Hydroxylwasserstoffe durch die zwei einwerthigen Gruppen $(PbNO_3)'$ ersetzt sind, — oder: für vier Moleküle Bleinitrat, in denen sechs einwerthige NO_3-Gruppen durch den sechswerthigen Mannitrest ($C_6H_8O_6$) vertreten sind, was sich durch die Formel ausdrücken lässt:



Eigenschaften.

Das salpetersaure Mannitblei stellt nach dem Trocknen über Chlorcalcium ein weisses, krystallinisches Pulver dar. Seine Löslichkeit in Wasser ist gering; 21·3955 Grm. Lösung von 14·5° C. hinterliessen nach dem Verdunsten 0·2335 Grm. bei 130° C. getrockneten Rückstand; 100 Theile Wasser von 14·5° C. lösen demnach 1·103 Theile, oder 1 Theil des wasserfreien salpetersauren Mannitbleis bedarf 90·63 Theile Wasser von der angegebenen Temperatur zu seiner Lösung. Die wässrige Lösung wird durch Alkohol gefällt. Beim Stehen über Schwefelsäure und beim Erhitzen auf 105—110° C. entlässt die Verbindung zwar ihr Krystallwasser, jedoch nur sehr langsam; verhältnissmässig rasch geschieht dies zwischen 125—130° C.

Wird die Substanz in eine Flamme gehalten, so erfolgt Zersetzung unter Explosion; in sehr kleiner Menge und sehr langsam

erhitzt, färbt sie sich zwischen 160—170° C. braungelb und verpufft beim nachherigen Glühen nicht mehr; nach dem Glühen der bei 170° zersetzten Verbindung hinterbleibt gelbes Bleioxyd, welches Kügelchen von geschmolzenem Blei einschliesst. Erhitzt man aber eine grössere Menge irgend rascher, so tritt bei 170° Verpuffung ein. Schlag bewirkt keine Explosion.

Bei längerem, mindestens viertägigem Kochen mit viel Wasser unter Ersatz des Verdampfenden findet Zersetzung statt. Filtrirt man ab und dampft das Filtrat ein, so erhält man einen weissen, in Alkohol bis auf eine Spur löslichen Rückstand, welcher aus diesem Lösungsmittel in halbkugelförmig aggregirten Nadeln krystallisirt, beim Erhitzen ruhig und ohne Hinterlassung von Bleioxyd verbrennt und dessen Schmelzpunkt bei 164° C. liegt. Dieses Verhalten lässt die Substanz als Mannit erkennen. Der nach dem Kochen mit Wasser abfiltrirte weisse Körper wurde heiss gewaschen, getrocknet und analysirt; die Analysen stimmten indessen nicht überein, hauptsächlich wohl desswegen, weil der Körper immer etwas Kohlensäure angezogen hatte. Zweimal wurde zwar ein Bleigehalt gefunden, der einem Viertel basisch salpetersauren Blei $= 4PbO.N_2O_5$ entsprechen würde; in anderen Fällen fiel aber der Gehalt an Blei zu niedrig aus, ebenso die Procente an N_2O_5. Wiewohl es nach dem Gesagten nicht unwahrscheinlich ist, dass sich das salpetersaure Mannitblei beim Kochen mit Wasser in Mannit und in ein Viertel basisch salpetersaures Blei zersetzt, wurde doch davon Abstand genommen, den nach dem Kochen resultirenden unlöslichen Rückstand, welcher das basische Bleinitrat vorstellen müsste, weiter zu studiren, da es schwer angeht, ihn kohlensäurefrei zu erhalten.

Wird das salpetersaure Mannitblei in Wasser suspendirt und Kohlensäure eingeleitet, so findet ebenfalls Zersetzung statt; die Kohlensäure wurde so lange eingeleitet, bis eine Probe des Filtrats bei weiterer Behandlung damit keine Trübung gab. Der nach dem Einleiten bleibende weisse Rückstand hinterlässt dann beim Erhitzen Bleioxyd; es wurden darin nach dem Trocknen über Chlorcalcium 83·46% PbO und 16·65% CO_2 gefunden, woraus folgt, dass als ein Zersetzungsproduct bei dieser Reaction normales Bleicarbonat (Rechnung: 83·52% PbO und 16·48% CO_2) auftritt. Aus dem Filtrate von diesem Bleicarbonat

krystallisirte nach dem Einengen am Wasserbade zuerst Mannit heraus, der sich unschwer an seinen physikalischen Eigenschaften erkennen liess; zuletzt krystallisirten die für das normale Bleinitrat charakteristischen Octaëder aus. Ihr Bleioxydgehalt betrug 67·19% (Rechnung für $Pb(NO_3)_2$ = 67·37% PbO).

Die Zersetzung des salpetersauren Mannitbleies durch gleichzeitige Einwirkung von Kohlensäure und Wasser findet daher in folgender Formelgleichung ihren Ausdruck:

$$C_6H_8O_6.Pb_4(NO_3)_2 + 3CO_2 + 3H_2O = C_6H_8(OH)_6 + 3PbCO_3 + Pb(NO_3)_2.$$

Endlich wurde noch der Versuch gemacht, dem Mannit-Bleinitrat durch Einwirkung von überschüssigem Ammoniak die Salpetersäure gänzlich zu entziehen; die Verbindung wurde indessen auf diese Weise nicht geändert, weder bei längerem Digeriren mit viel Ammoniak, noch beim Kochen damit.

Notiz über das Löwe'sche Drittelbleinitrat und das Morawski'sche Pentaplumbotrinitrat.

Von **Alois Smolka.**

(Aus dem Laboratorium der Staats-Gewerbeschule in Bielitz.)

Löwe[1] beschrieb unter anderen basischen Bleisalzen das „zweifach basisch salpetersaure Bleioxyd" (Drittelbleinitrat) = $6PbO.2N_2O_5+H_2O$, welches bereits Berzelius, jedoch mit anderem Wassergehalte, darstellte; übrigens wurde es auch von Löwe mit wechselndem Wassergehalte erhalten.

Morawski erhielt aus seinem Plumbonitratoglycerid = $C_6H_{11}Pb_5N_3O_{16}$ durch Kochen mit Wasser ein Pentaplumbotrinitrat $= Pb_5N_3H_5O_{15}$.[2] Die theoretischen Procentzahlen für diese beiden basischen Salze differiren nur wenig unter einander, so dass Morawski[3] der Vermuthung Raum gab, ob sein Salz nicht doch etwa mit dem von Löwe beschriebenen Drittelbleinitrate identisch sei.

Ich sah mich um so mehr veranlasst an die Lösung dieser Frage zu gehen, als sich in Gmelin-Kraut's Handbuch der anorganischen Chemie[4] eine Notiz vorfindet, nach welcher die Salpetersäure in dem Löwe'schen Salz nie direct bestimmt geworden zu sein scheint.

Bei einer Analyse des Pentaplumbotrinitrats fand ich Werthe, die mit den von Morawski mitgetheilten Zahlen[5] völlig übereinstimmen; darnach kann die Existenz des Pentaplumbotrinitrats nicht zweifelhaft erscheinen, — übrigens ist sie schon durch die

---

[1] Journ. f. prakt. Chem. Bd. 98, p. 388.

[2] Journ. f. prakt. Chem. [2], Bd. 22, p. 413.

[3] Journ. f. prakt. Chem. [2], Bd. 22, p. 414.

[4] III. Bd., p. 260.

[5] L. c.

zahlreichen Beleganalysen Morawski's am angeführten Orte genügend erhärtet.

Es wurde nun das Löwe'sche Drittelbleinitrat genau nach angegebener Vorschrift[1] bereitet und um jede Verunreinigung des Salzes durch Kohlensäure zu verhüten, ist das Verdunsten der Lösungen beim Umkrystallisiren im Vacuum vorgenommen worden. In der sorgfältigst dargestellten und über Schwefelsäure bis zur Gewichtsconstanz aufbewahrten Substanz wurde der Wassergehalt durch Trocknen bei etwa 115° und einmal (IV) direct durch Glühen im Schiffchen mit vorgelegtem Kupfer bestimmt; der Bleioxydgehalt ergab sich nach dem Glühen und die Salpetersäure wurde als Stickstoff nach der Dumas'schen Methode im Zulkowsky'schen Apparate gemessen.

Analyse des Löwe'schen Drittelbleinitrates.

a) Wasser.

1. 0·8652 Grm. Substanz gaben 0·0124 Grm. = 1·43% H_2O.
2. 1·0250 „ „ „ 0·0130 „ = 1·27 „ „
3. 1·0181 „ „ „ 0·0121 „ = 1·19 „ „
4. 1·3702 „ „ „ 0·0160 „ = 1·17 „ „

b) Bleioxyd.

1. 0·8055 Grm. Substanz gaben 0·6892 Grm. = 85·56% PbO.
2. 0·8120 „ „ „ 0·6906 „ = 85·05 „ „
3. 0·9598 „ „ „ 0·8177 „ = 85·19 „ „

c) Salpetersäure.

1. 1·0632 Grm. Salz gaben bei 16·4° C. und 740 MM. Barometerstand 32·0 CC. N = 0·036918 Grm. N, entsprechend 13·39% N_2O_5.

2. 1·4047 Grm. Substanz lieferten bei 15° C. und 725 MM. Druck 44·5 CC. N = 0·05054345 Grm. N, entsprechend 13·89% N_2O_5.

3. 0·9598 Grm. Substanz gaben bei 16° C. und 728·5 MM. Barometerstand 30·2 CC. N = 0·03436008 Grm. N, entsprechend 13·81% N_2O_5.

---

[1] L. c.

Zusammenstellung der analytischen Daten:

	I.	II.	III.	IV.	Mittel
PbO	85·56%	85·05%	85·19%	—	85·27%
N_2O_5	13·39 „	13·89 „	13·81 „	—	13·70 „
H_2O	1·43 „	1·27 „	1·19 „	1·17%	1·27 „

Das Löwe'sche Salz $6PbO.2N_2O_5+H_2O$ verlangt:

$6PbO$ ..	85·11%
$2N_2O_5$ ..	13·74 „
H_2O....	1·15 „

Auch die Eigenschaften dieser Verbindung stimmten mit den von Löwe für sein Drittelbleinitrat angegebenen überein; nur wäre zu bemerken, dass meine von zwei verschiedenen Darstellungen herrührenden Salze das Krystallwasser völlig bei 115° C. entliessen, während Löwe [1] anführt, dass die letzten Reste des gebundenen Wassers bei längerem Erhitzen auf 150 bis 160° C. fortgehen.

Schliesslich muss noch erwähnt werden, dass bei beiden erwähnten Darstellungen das Salz $6PbO.2N_2O_5+H_2O$ und nie das andere von Löwe beschriebene $= 6PbO.2N_2O_5+2H_2O$ erhalten werden konnte.

Aus dem Angeführten muss die Existenz des Löwe'schen Drittelbleinitrats und des Morawski'schen Pentaplumbotrinitrats als zweier verschiedener Verbindungen gefolgert werden.

[1] L. c.

VII. SITZUNG VOM 12. MÄRZ 1885.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Die Nervenkörperchen. Ein neuer bisher unbekannter morphologischer Bestandtheil der peripherischen Nerven", von Herrn Prof. Dr. Alb. Adamkiewicz in Krakau.
2. „Über den Gebrauch des siedenden Sauerstoffs, Stickstoffs, Kohlenoxyds, sowie der atmosphärischen Luft als Kältemittel", von Herrn Prof. Dr. Sigm. v. Wroblewski in Krakau.
3. „Beschreibung eines lenkbaren Luftschiffes", von Herrn Thomas Rödling in Gumischhof (Kärnten).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. v. Langer überreicht eine von Herrn Prof. Dr. E. Zuckerkandl in Graz eingesendete Abhandlung: „Beitrag zur Lehre von dem Bau des hyalinen Knorpels".

Herr Hofrath v. Langer überreicht ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. F. Mareš, Assistent am physiologischen Institute der böhmischen medicinischen Facultät in Prag, unter dem Titel: „Beobachtungen über die Ausscheidung des indigschwefelsauren Natrons".

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: „Notiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen."

Das c. M. Herr Oberbergrath D. Stur in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Die obertriadische Flora der Lunzer Schichten und des bituminösen Schiefers von Raibl."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg: Bulletin. Tome XXIX. No. 4. St. Pétersbourg, 1884; gr. 4°.

Accademia, Reale dei Lincei: Atti. Anno CCLXXXII. 1884—1885. Serie quarta. Rendiconti. Vol. I°. Fascicoli 1°—5°. Roma, 1884—85; 4°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 5ᵉ année, 6ᵉ série, 1ᵉʳ cahier, 1885. Janvier, Paris; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang IX, Nr. 6—15. Cöthen, 1885; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tom. C, 1ᵉʳ semestre. Nr. 8. Paris, 1885; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. VI. Jahrgang, 1885. Heft II. Februar. Berlin, 1885; 4°.

Gesellschaft, k. k. mährisch-schlesische, zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde in Brünn: Mittheilungen. Brünn, 1884; 4°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XX. Band. März-Heft. Wien, 1885; 8°.

— naturforschende zu Freiburg i. B.: Berichte über die Verhandlungen. Band VIII, Heft II. Freiburg i. B., 1884; 8°.

— der Wissenschaften, königl. sächsische zu Leipzig: Berichte. 1883. Leipzig 1884; 8°. — Über die Frage des Weber'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes von Fechner. Leipzig, 1884; 8°.

— Oberlausitzische der Wissenschaften: Neues Lausitzisches Magazin. LX. Bd., 2. Heft. Görlitz, 1884; 8°.

— russische chemisch-physikalische: Journal. Tome XVII, Nr. 1. St. Petersburg, 1885; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLVI. Jahrgang. Nr. 7—10. Wien, 1885; 4°.

Helsingfors, Universität: Akademische Schriften pro 1883 bis 1884. 20 Stücke; 8° und 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Wochenschrift. X. Jahrgang, Nr. 7—10. Wien, 1885; 4°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie. Für 1883. II. Heft. Giessen, 1884; 8°.

Kiew, Universität: Universitäts-Nachrichten. XXIV. Band. Nr. 9 und 10. Kiew, 1884; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 29 année, 3ᵉ série. Tome XV, 519ᵉ livraison, mars 1885. Paris; 4°.

Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique: Bulletin. Tome III. 1884. — Nr. 2 et Extrait du Bulletin. Tome III. 1884. Bruxelles; 8°.

Nature. Vol. XXXI. Nr. 801. London, 1885; 8°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Correspondenzblatt. XXVII. Riga, 1884; 8°.

Nuovo Cimento, 3ª serie. Tomo XV. Marzo et Aprile. Maggio e Giugno. 1884, Pisa; 8°.

Osservatorio reale die Brera in Milano: Publicazioni. N. XXV. Milano, 1883; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. XVIII. 1884. — Nr. 1 und 2. 1885, Wien; 4°.

Societas entomologica rossica: Horae. Tom. XVIII. 1884, St. Petersburg, 1883—84; 8°.

Société de Biologie: Comptes rendus hebdomadaires. 8ᵉ série, tome II. Nos. 3—8. Paris, 1885; 8°.

Society the American philosophical: Proceedings. Vol. XXI. Nr. 115. Philadelphia, 1884; 8°.

Wiener Medicinische Wochenschrift. XXXV. Jahrgang. Nr. 7—10. Wien, 1885; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. V. Jahrgang 1885. 2. Heft. Februar. Berlin, 1885; 4°.

Notiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen.

Von dem w. M. Prof. Dr. E. Weiss.

Vor Kurzem stiess ich bei einer eingehenderen Discussion des Lagrange'schen Reversionssatzes[1] auf ein paar Specialfälle von zwei der Binomialreihe verwandten Reihengruppen und wurde dadurch veranlasst, dieselbe allgemeiner zu untersuchen. Von den eben erwähnten Reihengruppen ist die eine folgende:

$$\left.\begin{aligned} X_r^{(m)} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+2r+1)}{2!}x^2 + \\ \frac{m(m+3r+1)(m+3r+2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ + \frac{m(m+nr+1)(m+nr+2)\ldots(m+nr+n-1)}{n!}x^n + \ldots \end{aligned}\right\} A$$

oder, übersichtlicher geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} X_r^{(m)} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{2}\binom{m+2r+1}{1}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m}{n}\binom{m+nr+n-1}{n-1}x^n + \ldots \end{aligned}\right\} A'$$

Diese Reihe enthält, wie man sofort erkennt, die Binomialreihe als Specialfälle in sich. Es ist nämlich:

$$\text{für } r=0\colon\ X_0^{(m)} = (1-x)^{-m}$$
$$\text{für } r=-1\colon\ X_1^{(m)} = (1+x)^m$$

[1] Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem etc. Denkschr. d. kais. Akad. d. Wissensch. XLIX. Bd., pag. 133.

Was zunächst die Convergenzbedingungen betrifft, folgt für r ganz und positiv aus dem Bildungsgesetze der Reihe unmittelbar:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[m+n(r+1)][m+n(r+1)+1]\ldots.[m+n(r+1)+r-1].[m+n(r+1)+r]}{[m+nr+1]\quad[m+nr+2]\qquad\qquad[m+nr+r]\quad.\quad[n+1]}x =$$

$$= \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r}\cdot\frac{\left[1+\frac{m}{n(r+1)}\right]\left[1+\frac{m+1}{n(r+1)}\right]\ldots\left[1+\frac{m+r-1}{n(r+1)}\right]\left[1+\frac{m+r}{n(r+1)}\right]}{\left[1+\frac{m+1}{nr}\right]\left[1+\frac{m+2}{nr}\right]\ldots\left[1+\frac{m+r}{nr}\right]\quad\left[1+\frac{1}{n}\right]}x =$$

$$= \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r}\cdot\frac{1+\frac{2m+r}{2n}+\ldots.}{1+\frac{2m+r+3}{2n}+\ldots.}\cdot x = \frac{(r+1^{r+1}}{r^r}\cdot\frac{x}{1+\frac{3}{2n}+\ldots.} \qquad 1)$$

Dieselbe Relation gilt auch für r negativ ganz. Für r gebrochen positiv, etwa $r = +\frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen vorstellen mögen, würde es zu sehr weitläufigen Rechnungen führen, wollte man die Convergenzbedingungen aus zwei unmittelbar auf einander folgenden Reihengliedern ableiten. Vergleicht man aber das allgemeine Glied mit dem Index nq, also u_{nq} mit $u_{(n+1)q}$, so erhält man durch eine der obigen ganz gleiche Analyse leicht:

$$\frac{u_{(n+1)q}}{u_{nq}} = \frac{(r+1)^{(r+1)q}}{r^{rq}}\cdot\frac{x^q}{1+\frac{3}{2n}+\ldots.} \qquad 2)$$

Etwas eingehender wollen wir uns indess mit dem Falle r negativ, gebrochen, also $r = -\frac{p}{q}$ beschäftigen.

Hier ist:

$$u_{nq} = (-1)^{nq-1} \cdot \frac{m[np-(m+1)][np-(m+2)]\ldots[np-(m+nq-1)]}{(nq)!} x^{nq}$$

Der grösste Factor im Zähler ist der zweite $np-(m+1)$; der kleinste der letzte $n(p-q)-(m-1)$. Ist nun:

a) $p > q$, das heisst r seinem absoluten Werthe nach ein unechter Bruch, so sind von einem bestimmten Reihengliede an alle Factoren des Zählers positiv, und man gewinnt durch eine Vergleichung von u_{nq} mit $u_{(n+1)q}$ wieder genau die Relation 2). Ist hingegen:

b) $p < q$, das heisst r ein echter Bruch, so sind von einer bestimmten Stelle an, die ersten Factoren des Zählers positiv, die letzten negativ. Ist überdies m ganz, so erfolgt der Übergang der Factoren aus den positiven in negative Werthe durch Null und es entfällt daher in der Reihe von einer bestimmten Stelle an jedes $q$te Glied. Ausserdem ist hier:

$$\frac{u_{(n+1)q}}{u_{nq}} = (-1)^p \cdot \frac{(r+1)^{(r+1)q}}{(-r)^{rq}} \cdot \frac{x^q}{1+\frac{3}{2n}+\ldots.} \qquad 3)$$

Fassen wir daher das Resultat dieser Untersuchungen zusammen, so findet, wenn man im letzten Falle von dem Factor $(-1)^p$ absieht, Convergenz statt:

für $-1 < r < 0$, so lange $x < \frac{(-r)^r}{(r+1)^{(r+1)}}$

für alle anderen Werthe von r hingegen, so lange $x < \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$.

Für die Grenzwerthe:

$$x=\frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$$

und

$$x=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$$

respective ist:

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=+\frac{3}{2},$$

es convergirt daher auch noch für diese unsere Reihe, und wir können daher den Satz aussprechen:

Die Reihe, deren allgemeines Glied u_n den Ausdruck hat:

$$u_n=\frac{m}{n}\cdot\binom{m+nr+n-1}{n-1}x^n,$$

convergirt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } -1<r<0 \text{ und } x\leqq\dfrac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}\\ \text{für } \begin{cases}-\infty<r<-1 & \text{,,} \quad x\leqq\dfrac{r^r}{(r+1)^{r+1}}\\ 0<r<+\infty\end{cases}\end{array}\right\} 5)$$

Für $r=0$ und $r=-1$ geht die Reihe in die binomische über und es gelten dann die bekannten Convergenzbedingungen.

Vor Allem ist nun weiter zu bemerken, dass die durch die obige Reihe dargestellten Functionen Potenzgrössen sind. Man überzeugt sich nämlich durch eine einfache Multiplication leicht von dem Stattfinden der Relation:

$$X_r^{(m)}\,.\,X_r^{(1)}=X_r^{(m+1)} \qquad 6)$$

woraus, wenn man Kürze halber $X_r^{(1)}$ durch X_r schlechtweg bezeichnet, unmittelbar folgt:

$$X_r^{(m)}=X_r^m \qquad 7)$$

Es handelt sich also jetzt nur noch darum, X_r zu ermitteln. Gehen wir zu diesem Zwecke auf die Gleichung *A)* zurück, so liefert sie:

$$X_r = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1(2r+2)}{2!}x^2 + \frac{1.(3r+2)(3r+3)}{3!}x^3 + \ldots\ldots\frac{1(nr+2)(nr+3)\ldots(nr+n)}{n!}x^n + \ldots = $$

$$= 1 + x\left[1 + \frac{r+1}{1!}x + \frac{(r+1)(3r+2)}{2!}x^2 + \ldots\ldots\frac{(r+1)(nr+2)(nr+3\ldots(nr+n=1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + xX_r^{r+1}.$$

Man findet daher die Summe aller hieher gehörigen Reihen durch Auflösung der dreigliederigen Gleichung:

$$xX_r^{r+1} - X_r + 1 = 0 \qquad 8)$$

Die einfachsten Specialfälle dieser Gleichung ergeben sich, abgesehen von den schon oben erwähnten Werthen $r = 0$ und $r = -1$, die bloss die Auflösung einer Gleichung ersten Grades erfordern, für $r = +1$, $-\frac{1}{2}$ und -2, und führen auf quadratische Gleichungen. Übrigens sind die Reihen für $r = +1$ und $r = -2$ im Grunde eben sowenig von einander verschieden, wie die für $r = 0$ und $r = -1$. Bezeichnet man nämlich die Reihe *A)*, deren Werth von r, m und x abhängt, mit $F(x, m, r)$, so lässt das allgemeine Glied unschwer die Beziehung erkennen:

$$F(x, m, r) = F(-x, -m, -r-1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

Die Gleichung 8) enthält daher bloss zwei Reihen, deren Summe aus der Auflösung einer quadratischen Gleichung sich ergibt. Sie lauten mit Weglassung der zweiten Wurzel, welche nicht den hier betrachteten, sondern stammverwandten Reihen angehört:

Für $r = -2$:

$$(1+\sqrt{1+4x})^m = 2^m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-3)}{1.2}x^2+\ldots.+(-1)^{n-1}\frac{m[2n-(m+1)][2n-(nr+2)]\ldots.[n-m+1]}{n!}x^n\ldots.\right]$$

$$x \gtrless \pm\frac{1}{4}$$

$r = -\frac{1}{2}$:

$$(2+x^2+x\sqrt{4+x^2})^m = \frac{1}{2^m}(x+\sqrt{4+x^2})^{2m} =$$

$$= 2^m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m^2}{1.2}x^2+\ldots\ldots\frac{m\left[m-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]\left[m-\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]\ldots.\left[m+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]}{n!}x^n+\ldots.\right]$$

$$x \gtrless \pm 2.$$

daher, wenn man noch $\frac{m}{2}$ an die Stelle von m und $2x$ an die Stelle von x treten lässt, für $r = -\frac{1}{2}$ einfacher:

$$(x+\sqrt{1+x^2})^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m^2}{1.2}+x^2+\frac{m(m+1)(m-1)}{3!}x^3+\ldots.+$$
$$+\frac{m(m-n+2)(m-n+4)(m-n+6)\ldots.(m+n-2)}{n!}x^n+\ldots.$$
$$x \lesssim \pm 1.$$

Die Auflösung einer **kubischen** Gleichung erfordern die Werthe: $r = +2, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ und die homologen $r = -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$; die einer **biquadratischen** Gleichung $r = +3, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ oder $r = -4, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}$; etc.

Eine beachtenswerthe Eigenschaft der Gleichung 8) besteht ferner darin, dass sie für den einen Grenzwerth $x=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ zwei gleiche Wurzeln $X_r=\frac{r+1}{r}$ besitzt. Denn der Gleichung 8) kommt bekanntlich dann eine doppelte Wurzel zu, wenn mit ihr gleichzeitig ihr Differentialquotient erfüllt ist, wenn also mit 8) coëxistirt:

$$(r+1)xX_r^r-1=0 \qquad 10)$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt:

$$X_r=\frac{r+1}{r} \qquad 11)$$

$$x=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}} \qquad 12)$$

Sei nun zunächst wieder r ganz und positiv, so lässt sich die Gleichung 8) für den obigen Werth von x auch so schreiben:

$$\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}X_r^{r+1}-X_r+1=$$

$$=\frac{1}{r}[z-1]^2[z^{r-1}+2z^{r-2}+3z^{r-3}+\ldots.(r-1)z+r]=0 \qquad 8^*)$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$z=\frac{r}{r+1}X_r$$

Der blosse Anblick dieser Gleichung lässt nun erkennen, dass .ihr ausser $z=1$ keine weitere positive Wurzel mehr zukommt. Da aber für ein positives r und $x=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ die Reihe *A)* eine positive Summe haben muss, so ist $X_r=\frac{r+1}{r}$ auch die Summe der Reihe. Wir gewinnen damit das interessante Resultat:

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^m=1+\frac{m}{1}x_r+\frac{m(m+2r+1)}{2!}x_r^2+ \qquad 14)$$

$$\frac{m(m+3r+1)(m+3r+2}{3!}x_r^3+\ldots$$

$$+\frac{m(m+nr+1)(m+nr+2\ldots.(m+nr+n-1)}{n!}x_r^n+\ldots..$$

$$x_r=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$$

Wir haben oben nur den Fall r ganz und positiv betrachtet. Es lässt sich indess leicht zeigen, dass alles bisher Gesagte auch für positive gebrochene r, ferner für r negativ ganz, und für r negativ, unecht gebrochen seine Giltigkeit behält.

Für ein negatives, echt gebrochenes r, also $r=-\frac{p}{q}, p<q$ haben wir früher als Grenze der Convergenz $x=\frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ gefunden. Ist nun p eine gerade Zahl, so fällt wenigstens für die hier in Betracht kommende Wurzel $x=\frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ mit $x=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ zusammen; es reducirt sich also auf den früheren Fall. Für p ungerade, q gerade besitzt die Gleichung 8) für $x=\frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ keine ohne Weiteres allgemein angebbare Wurzel, während die Annahme $x=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ diese Grösse imaginär macht. Die Reihe *A)* zerfällt daher für diesen Werth von x in zwei Theile, deren reeller die Summe $X_r=\frac{r+1}{r}$ und imaginärer die Summe Null hat. Für p und q ungerade und $x=-\frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$, also im Grunde $x=\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ kommt der Gleichung wieder die Wurzel $X_r=\frac{r+1}{r}$ zu.

Für den zweiten Grenzwerth der Convergenz $x=-\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ lässt sich im Allgemeinen keine Wurzel der Gleichung 8) angeben. Hingegen besitzt sie für $x=-\frac{r}{(r+1)^{r+1}}$ und $x=-\frac{(r+1)^r}{r^{r+1}}$ die Wurzeln $X_r=\frac{r-1}{r}$ und $X_r=\frac{r}{r+1}$, respective; diese Werthe von x liegen aber ausserhalb der Grenze der Convergenz der Reihe X_r.

Mit der bisher betrachteten Reihengruppe im innigen Zusammenhange steht die folgende, deren Bildungsgesetz ähnlich, aber etwas einfacher ist:

$$Y_r^{(m)} = 1 + \binom{m+2r+1}{1} x + \binom{m+3r+2}{2} x^2 + \ldots.$$
$$+ \binom{m+nr+n-1}{n-1} x^{n-1} + \ldots. \qquad B)$$

Hier haben wir:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} \cdot \frac{x}{1+\frac{1}{2n}+\ldots.}$$

$$\operatorname{Lim} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} x \ldots.$$

und für $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$

$$\operatorname{Lim} n\left[\frac{u_{n-1}}{u_n} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

Die obige Reihe convergirt daher für $x < \pm \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$; sie divergirt aber bereits für $x = \pm \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$. Sie enthält als Specialfälle wohl ebenfalls die binomische Reihe (für $r=0$ und $r=-1$) in sich, ist aber trotzdem im Allgemeinen keine einfache Potenzfunction. Denn es ist, wie leicht ersichtlich:

$$Y_r^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d(X_r^m)}{dx} = X_r^{m-1} \frac{dX}{dx}$$

Aus Gleichung 8) folgt aber

$$\frac{dX_r}{dx} = -\frac{X_r^{r+1}}{(r+1)xX_r - 1} = -\frac{X_r^{r+2}}{rX_r - (r+1)}$$

und damit:

$$Y_r^{(m)} = \frac{X_r^{m+r+1}}{(r+1) - rX_r} \qquad 15)$$

Für die beiden oben betrachteten Specialfälle $r=-2$ und $r=-\frac{1}{2}$ ist:

$$Y_{-2}^{(m)} = \frac{X_{-2}^{m-1}}{2X_{-2}-1} = \frac{(1+\sqrt{1+4x})^{m-1}}{2^{m-1}\sqrt{1+4x}}$$

$$Y_{\ldots\ldots-\frac{1}{2}}^{(m)} = \frac{2X_{-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{X_{-\frac{1}{2}}+1} = \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{(x+\sqrt{4+x^2})^{2m}}{\sqrt{4+x^2}}$$

oder im ersten Falle $m+1$ und $\frac{x}{4}$, im zweiten $\frac{m}{2}$ und $2x$ statt m und x setzend:

$$\frac{(1+\sqrt{1+x})^m}{\sqrt{1+x}} = 2^m\left[1+\binom{m-2}{1}\cdot\frac{x}{4}+\binom{m-3}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\binom{m-n}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}+\ldots\ldots\right]$$

$$\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}} = 1+\binom{m}{2}(2x)+\binom{m+1}{2}(2x)^2+\ldots\ldots$$
$$\binom{m+n-2}{n-1}(2x)^{n-1}+\ldots\ldots$$

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass wohl bereits Lagrange in seiner schönen Abhandlung „Nouvelle méthode pour résoudre es équations littérales“ (Lagrange oeuvres, T. III, p. 5ff.) bei der Entwickelung der Wurzeln einer Gleichung in Reihen auf einige Specialfälle der zuerst betrachteten Reihengruppe *A*) stiess, dass er aber, dem Zwecke jener Abhandlung entsprechend, die Eigenschaften derselben nicht weiter verfolgte.

VIII. SITZUNG VOM 19. MÄRZ 1885.

Das c. M. Herr Oberbergrath D. Stur in Wien übermittelt ein Exemplar seines Werkes: „Beiträge zur Kenntniss der Flora der Vorwelt.“ II. Band. Dieser Band enthält die Carbon-Flora der Schatzlarer Schichten. (Mit 49 Doppeltafeln in Lichtdruck und 48 Zinkographien.)

Herr Marquis Anatole de Caligny in Versailles übermittelt folgende Druckwerke:

1. „Mémoires inédits du Maréchal de Vauban sur Landau, Luxembourg etc.“ Extraits des papiers des Ingénieurs Hue de Caligny.
2. „Oisivetés du M. de Vauban.“
3. „Traité de la défense des Places Fortes.“
4. „Mémoires militaires de Vauban et des Ingénieurs Hue de Caligny.“

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übermittelt das erste Heft des II. Bandes seines von der Akademie subventionirten Werkes: „Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens.“

Das c. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Zepharovich in Prag übersendet die dritte Folge seiner krystallographischen Untersuchungen von Kampferderivaten.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Experimentaluntersuchung zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante einiger Gase und Dämpfe“, von Herrn Dr. Ignaz Klemenčič, Privatdocent und Assistent an der Universität in Graz.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über die Divisoren der ganzen Zahlen.“

Herr Dr. Heinrich Leiblinger, pract. Arzt in Brody, übersendet eine Abhandlung: „Über Resorptions-Icterus im Verlaufe der Polyarthritis rheumatica“.

Das w. M. Herr. Prof. E. Weyr überreicht folgende zwei Abhandlungen des Herrn Regierungsrathes Prof. Dr. F. Mertens in Graz:

1. „Über eine Formel der Determinantentheorie.“
2. „Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat.“

Das w. M. Herr Prof. v. Lang überreicht zwei Abhandlungen des c. M. Herrn Prof. V. v. Ebner in Graz: „Die Lösungsflächen des Kalkspathes und des Aragonites. II. Die Ätzfiguren des Kalkspathes. III. Die Lösungsflächen des Aragonites.“ (Fortsetzung und Schluss.)

Das w. M. Herr Director E. Weiss bespricht ein Feuermeteor, welches Sonntag den 15. März Abends um $8^1/_2$ Uhr vom Assistenten der Sternwarte Herrn R. Spitaler gesehen wurde.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademia umiejętności w Krakowie: Pamiętnik. Tom IX. W. Krakowie, 1884; 4°.

— — Rozprawy i Sprawozdania z posiedzen wydziału matematiczno-przyrodniczego. Tome XII. W. Krakowie, 1884; 8°.

Basel, Universität: Akademische Schriften pro 1880—1882; 62 Stücke 8° u. 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. 1. semestre. Tome C. No. 9. Paris, 1885; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVIII. Jahrgang, Nr. 4. Berlin, 1885; 8°.

Institute, the North of England of Mining and Mechanical Engineers: Transactions. Vol. XXXIV, part. I. Newcastle-upon-Tyne, 1885; 8°.

Journal, the of nervous and mental Disease. N. S. Vol. IX. Nr. 4. New York, 1884; 8°.

Museo nacional de México: Anales. Tomo III, Entrega 6ª. México. 1884; Folio.

Nature. Vol. XXXI, No. 802. London, 1885; 8°.

Repertorium der Physik. XXI. Band, 2. Heft. München und Leipzig, 1885; 8°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome XII. No. 6 et dernier. Paris, 1884; 8°. — Tome XIII. Nr. 1. Paris, 1885; 8°.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4ª série, 37ª année, 11ª & 12ª cahiers. Paris 1884; 8°.

Society of Chemical Industry: The Journal. Vol. IV. Nr. 2. Manchester 1885; 8°.

— the American geographical: Bulletin 1884, Nr. 3. New York; 8°.

United States: Commission of Fish and Fisheries: Reports of the Commissioner for 1881 and 1882. Washington, 1884; 8°.

— — Geological Survey. Mineral Resources. Washington, 1883; 8°.

— — Report of the Commissioner of Agriculture for the year 1883. Washington, 1883; 8°.

— — Naval Observatory: Astronomical and meteorological Observations made during the year 1880. Washington 1884; 4°.

Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg: Archiv XXXVIII. Jahr. Güstrow 1884; 8°.

Washburn Observatory of the University of Wisconsin: Publications. Vol. II. Madison, 1884; Folio.

Über die Divisoren der ganzen Zahlen.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

Ich habe unlängst einige Theoreme über diejenigen Divisoren der ganzen Zahlen mitgetheilt, welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind („Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie." Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 50. Band, I. Abtheilung, p. 36 ff.). In den folgenden Zeilen sollen zunächst einige allgemeinere Sätze, welche sich auf jene Divisoren der ganzen Zahlen, die r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beziehen und in denen die eben erwähnten Theoreme als specielle Fälle enthalten sind, abgeleitet und sodann einige Sätze über die Anzahl jener Divisoren einer Zahl, welche nach einem geraden Modul vorgeschriebenen Zahlen congruent sind, aufgestellt werden.

Bezeichnet man die Summe der k^{ten} Potenzen derjenigen Theiler einer Zahl n, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, mit $\tau_{r,k,\sigma}(n)$, so ist, da bekanntlich $\mu_\sigma(m)$ gleich Null ist, wenn m durch eine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, sonst aber den Werth $+1$ besitzt:

$$1) \qquad \tau_{r,k,\sigma}(n) = \sum_{d_r} \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right) \frac{n^k}{d_r^k}$$

wo die Summation über alle Divisoren d_r von n zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine r^{te} Potenz ist.

Die Formel 1) zeigt, dass folgende Gleichung besteht:

$$2) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\tau_{r,k,\sigma}(n)}{n^{s+k}} = \frac{\zeta(rs)\,\zeta(s+k)}{\zeta(\sigma rs)}.$$

Es ist:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk}\mu_\sigma(x) = \sum_{x=1,\ y=1}^{x=[\sqrt[r]{n}],\ y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^r y}\right) x^{rk}\mu_\sigma(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right)\left(\sum_{d_r} \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\frac{x}{d_r}}\right)\frac{x^k}{d_r^k}\right)$$

also nach 1):

3) $$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,k,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk}\mu_\sigma(x).$$

Schreibt man in der bekannten Relation:

$$\mathfrak{Q}_r(n) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right]\mu(x)$$

für n : $\left[\frac{n}{y^r}\right]$, multiplicirt mit y^k und summirt bezüglich y von 1 $[\sqrt[r]{n}]$, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) y^k = \sum_{x,\ y=1}^{x,\ y=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{(xy)^r}\right] y^k\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right]\left(\sum_{d} \mu\left(\frac{x}{d}\right) d^k\right)$$

oder, weil:

$$\sum_{d} \mu\left(\frac{m}{d}\right) d^k = \varphi_k(m)$$

ist:

4) $$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) y^k = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right] \varphi_k(x)$$

aus welcher Formel für $k = 0$ die specielle von Herrn Bugajef und mir aufgestellte Gleichung:

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_r\left(\left[\frac{n}{y^r}\right]\right) = n$$

folgt.

Schreibt man in dieser speciellen Formel für $r : \sigma r$ und für $n : \left[\frac{n}{x^r}\right]$, multiplicirt sodann mit $\mu_\sigma(x)$ und summirt bezüglich x von 1 bis $[\sqrt[r]{n}]$, so erhält man:

$$\sum_{y=1,\, x=1}^{y=[\sqrt[\sigma r]{n}],\, x=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_{\sigma r}\left(\left[\frac{n}{(y^\sigma x)^r}\right]\right)\mu_\sigma(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \left[\frac{n}{x^r}\right]\mu_\sigma(x)$$

oder wegen 3):

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_{\sigma r}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right)\left(\sum_{d_\sigma} \mu_\sigma(d_\sigma)\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,0,\sigma}(x),$$

welche Relation man unter Berücksichtigung der Formel:

$$\sum_{d_\sigma} \mu_\sigma(d_\sigma) = 1$$

in die folgende verwandeln kann:

$$5) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,0,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \mathfrak{Q}_{\sigma r}\left(\left[\frac{n}{x^r}\right]\right).$$

Man hat daher das Theorem:

Die ganzen Zahlen von 1 bis n besitzen eben so viele Divisoren, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, als die Summe der Anzahlen derjenigen Zahlen beträgt, welche durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar und beziehungsweise nicht grösser, als

$$\frac{n}{1^r}, \frac{n}{2^r}, \frac{n}{3^r}, \ldots, \frac{n}{[\sqrt[r]{n}]^r}$$

sind.

Aus der Gleichung 3) ergibt sich die Relation:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-k,\sigma}(x) = n \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \frac{\mu_\sigma(x)}{x^{r(k+1)}} - \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \frac{\varepsilon_x \mu_\sigma(x)}{x^{rk}} \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1),$$

welche wegen der bekannten Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\mu_\sigma(x)}{x^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(\sigma s)}$$

in die folgende übergeht:

6) $$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-k,\sigma}(x) = \frac{\zeta(r(k+1))}{\zeta(\sigma r(k+1))} n - \Delta_1 \qquad (r(k+1) > 1)$$

wo:

$$\Delta_1 = n \sum_{x=[\sqrt[r]{n}]+1}^{x=\infty} \frac{\mu_\sigma(x)}{x^{r(k+1)}} + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[r]{n}]} \frac{\varepsilon_x \mu_\sigma(x)}{x^{rk}}$$

ist.

Aus der letzten Gleichung leitet man leicht folgende Relationen ab:

$$|\Delta_1| < \frac{\zeta(r(k+1))}{\zeta(\sigma r(k+1)) n^{k-\frac{1}{r}}} + \frac{\zeta(rk)}{\zeta(\sigma rk)} \qquad (rk > 1)$$

oder einfacher, wenn auch weniger genau:

$$|\Delta_1| < \frac{\pi^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n^{k-\frac{1}{r}}}\right) \qquad (rk > 1)$$

$$|\Delta_1| < \frac{\zeta(r+1)}{\zeta(\sigma(r+1))} + \log n + C + \frac{1}{n} \qquad (rk = 1)$$

$$|\Delta_1| < \left(\frac{\zeta(r)}{\zeta(\sigma r)} + 1\right) n^{\frac{1}{r}} \qquad (k = 0, r > 1)$$

Die eben abgeleiteten Relationen liefern sofort die Gleichungen:

$$7) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-k,\sigma}(x)}{n} = \frac{\zeta(r(k+1)}{\zeta(\sigma r(k+1))}$$

$$8) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-k,2\sigma}(x)}{n} = \frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)\zeta(r(k+1))}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)} B_{\sigma r(k+1)}}$$

$$9) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-2k+1,\sigma}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2\sigma rk+1) B_{rk}}{(2\pi)^{2rk(\sigma-1)} \Gamma(2rk+1) B_{\sigma rk}}$$

$$10) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{2r,-k,\sigma}(x)}{n} = \frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1) B_{r(k+1)}}{(2\pi)^{2r(k+1)(\sigma-1)} \Gamma(2r(k+1)+1) B_{\sigma r(k+1)}}$$

Bezeichnet man mit $\tilde{\tau}_{r,k,\sigma}(n)$ die Summe der $k$ten Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl n, welche $r$te Potenzen und mindestens durch eine (σr)te Potenz (ausser 1) theilbar sind, so ergeben sich aus den letzten Gleichungen die folgenden Relationen:

$$11) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tilde{\tau}_{r,-k,\sigma}(x)}{n} = \zeta(r(k+1)) \left\{1 - \frac{1}{\zeta(\sigma r(k+1))}\right\}$$

$$12) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tilde{\tau}_{r,-k,2\sigma}(x)}{n} = \zeta(r(k+1)) \left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)} B_{\sigma r(k+1)}}\right\}$$

13) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,-2k+1,\sigma}(x)}{n} = \frac{(2\pi)^{2kr} B_{kr}}{2\Gamma(2kr+1)} \left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma kr+1)}{(2\pi)^{2\sigma kr} B_{\sigma kr}}\right\}$$

14) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{2r,-k,\sigma}(x)}{n} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2r(k+1)} B_{r(k+1)}}{2\Gamma(2r(k+1)+1)} \left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)} B_{\sigma r(k+1)}}\right\}$$

Man kann die aufgestellten Formeln auch auf dem folgenden Wege ableiten.

Schreibt man in der Gleichung:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk} = \overline{P}_{k,r}(n)$$

für n: $\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]$, multiplicirt sodann mit $y^{\sigma kr}\mu(y)$ und summirt bezüglich y von 1 bis $\left[\sqrt[\sigma r]{n}\right]$, so erhält man:

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\sigma r]{n}\right]} \overline{P}_{k,r}\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]\right) y^{\sigma rk}\mu(y) = \sum_{x=1,\, y=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right],\, y=\left[\sqrt[\sigma r]{n}\right]} \left[\frac{n}{(xy^{\sigma})^r}\right] (xy^{\sigma})^{rk}\mu(y)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk} \left(\sum_{d_\sigma} \mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right)\right)$$

oder wegen der Gleichung:

$$\sum_{d_\sigma} \mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{d_\sigma}}\right) = \mu_\sigma(n)$$

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\sigma r]{n}\right]} \overline{P}_{k,r}\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]\right) y^{\sigma rk}\mu(y) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^r}\right] x^{rk}\mu_\sigma(x)$$

welche Gleichung sich nach Formel 3) in die folgende verwandelt:

$$15) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r,k,\sigma}(x) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\sigma r]{n}\right]} \overline{P}_{k,r}\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma r}}\right]\right) y^{\sigma r k}\mu(y).$$

Den speciellen Fall $\sigma = 2$, $r = 1$ dieser Formel habe ich schon früher a. a. O. mitgetheilt.

Verbindet man die Relation 15) mit den von mir mitgetheilten Gleichungen:

$$\overline{P}_{-k,r}(m) = m\zeta(r(k+1)) + \frac{\varepsilon\zeta(r(k+1))}{(m+1)^{rk-1}} + \varepsilon'\zeta(rk)$$
$$(rk > 1;\ 0 \leqq |\varepsilon|, |\varepsilon'| < 1)$$

$$\overline{P}_{-k,r}(m) = m\zeta(r+1) + \varepsilon\zeta(r+1) + \varepsilon'\left(\log m + C + \frac{1}{m}\right)$$
$$(rk = 1;\ 0 \leqq |\varepsilon|, |\varepsilon'| < 1)$$

$$\overline{P}_{-k,r}(m) = m\zeta(r) + \varepsilon(\zeta(r)+1)m^{\frac{1}{r}}$$
$$(k = 0,\ r > 1;\ 0 \leqq |\varepsilon|, |\varepsilon'| < 1)$$

so erhält man ebenfalls die oben aufgestellten Formeln.

Die Relation 15) gestattet aber auch den bisher noch nicht behandelten Fall $r = 1$, $k = 0$ zu erledigen. Setzt man in derselben nämlich $r = 1$, $k = 0$, so verwandelt sie sich in:

$$16) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,0,\sigma}(x) = \sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\sigma]{n}\right]} \Psi\left(\left[\frac{n}{y^{\sigma}}\right]\right) \mu(y).$$

Nun ist bekanntlich:

$$\Psi(m) = m(\log m + 2C - 1) + \varepsilon\sqrt{m}$$

wo:

$$|\varepsilon| < 4$$

ist.

Die Gleichung 16) verwandelt sich daher in:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,0,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^{\sigma}}\right]\left\{\log\left[\frac{n}{x^{\sigma}}\right] + 2C - 1\right\}\mu(x) + \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma]{n}\right]} \varepsilon_x \mu(x)\sqrt{\left[\frac{n}{x^{\sigma}}\right]}$$

oder:

$$17) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,0,\sigma}(x) = \frac{n}{\zeta(\sigma)} \left\{ \log n + 2C - 1 + \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)} \right\} + \Delta_2$$

wo:

$$\mathfrak{F}_\sigma = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\log x}{x^\sigma}$$

$$\Delta_2 = -n \Bigg\{ (2C-1) \sum_{y=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{y=\infty} \frac{\mu(y)}{y^\sigma} - \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma]{n}]} \frac{\mu(y) \log\left(1 - \frac{\varepsilon_y'' y^\sigma}{n}\right)}{y^\sigma} -$$

$$- \sum_{y=[\sqrt[\sigma]{n}]+1}^{y=\infty} \frac{\mu(y)}{y^\sigma} \log\left(\frac{y^\sigma}{n}\right) \Bigg\} - \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma]{n}]} \varepsilon_y' \mu(y) \left\{ \log\left(\left[\frac{n}{y^\sigma}\right]\right) + 2C - 1 \right\} +$$

$$+ \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\sigma]{n}]} \varepsilon_y \mu(y) \sqrt{\left[\frac{n}{y^\sigma}\right]}$$

$$(0 \leqq |\varepsilon_y|,\ \varepsilon_y',\ \varepsilon_y'' < 1)$$

ist. Aus der letzten Gleichung ergibt sich für $\sigma > 2$ die Beziehung:

$$|\Delta_2| < n^{\frac{1}{\sigma}} \{ \log n + 2C + \zeta(\sigma)(2C-1) \} + \sqrt{n} \left(\zeta\left(\frac{\sigma}{2}\right) + 2\log 2 + 4 \right)$$

während für $\sigma = 2$, wie schon Herr Mertens gefunden hat:

$$|\Delta_2| < \left(\frac{1}{2} \log n + 5 + 3C + 2\log 2 \right) \sqrt{n} + 2$$

ist.

Aus der Gleichung 17) ergeben sich daher die Relationen:

$$18) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,0,\sigma}(x)}{n} = \left\{ \log n + 2C - 1 + \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)} \right\} \frac{1}{\zeta(\sigma)}$$

$$19) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,0,\sigma}(x)}{n} = \left\{ 1 - \frac{1}{\zeta(\sigma)} \right\} \{ \log n + 2C - 1 \} - \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

$$20)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \tau_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{n} = \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \left\{ \log n + 2C - 1 + \frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \right\}$$

$$21)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{r}_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{n} = \left\{ 1 - \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \right\} \{\log n + 2C - 1\} - \frac{8\sigma[\Gamma(2\sigma+1)]^2 \mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{4\sigma} B_\sigma^2}$$

$$22)\quad \lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \tau_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{2\eta} = \left\{ \log n + 2C + \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)} \right\} \frac{1}{\zeta(\sigma)} \qquad \left(\lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0,\ \lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0 \right)$$

$$23)\quad \lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \mathfrak{r}_{1,\,0,\,\sigma}(x)}{2\eta} = \left\{ 1 - \frac{1}{\zeta(\sigma)} \right\} \{\log n + 2C\} - \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

$$24)\quad \lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \tau_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{2\eta} = \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \left\{ \log n + 2C + \frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \right\}$$

$$25)\quad \lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \mathfrak{r}_{1,\,0,\,2\sigma}(x)}{2\eta} = \left\{ 1 - \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \right\} \{\log n + 2C\} - \frac{8\sigma[\Gamma(2\sigma+1)]^2 \mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{4\sigma} B_\sigma^2}$$

$$26)\quad \lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{n=n+\eta} \tau_{1,0,\sigma}(x)}{2\eta} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=[ne]} \tau_{1,0,\sigma}(x)}{[ne]}$$

$$27)\quad \lim_{\eta,\,n=\infty} \frac{\sum_{x=n-\eta+1}^{x=n+\eta} \tilde{\tau}_{1,0,\sigma}(x)}{2\eta} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=[ne]} \tilde{\tau}_{1,0,\sigma}(x)}{[ne]}$$

$$28)\quad \lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \tau_{1,0,\sigma}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tau_{1,0,\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta(\sigma)} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 + \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)} \right\}$$

$$29)\quad \lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \tilde{\tau}_{1,0,\sigma}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tilde{\tau}_{1,0,\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \left\{1 - \frac{1}{\zeta(\sigma)}\right\} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 \right\} - \frac{\sigma \mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

$$30)\quad \lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \tau_{1,0,2\sigma}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tau_{1,0,2\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 + \frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma} \right\}$$

$$31)\quad \lim_{s=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=10^s} \tilde{\tau}_{1,0,2\sigma}(x) - \sum_{x=1}^{x=10^{s-1}} \tilde{\tau}_{1,0,2\sigma}(x)}{10^s - 10^{s-1}} =$$

$$= \left\{1 - \frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma} B_\sigma}\right\} \left\{ s \log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1 \right\} - \frac{8\sigma\{\Gamma(2\sigma+1)\}^2 \mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{4\sigma} B_\sigma^2}.$$

Von den in den abgeleiteten Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden erwähnt werden:

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\zeta(r(k+1))}{\zeta(\sigma r(k+1))}.$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)\,\zeta(r(k+1))}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}}.$$

Die Summe der reciproken $(2k-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma rk+1)B_{rk}}{(2\pi)^{2rk(\sigma-1)}\Gamma(2rk+1)B_{\sigma rk}}.$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)B_{r(k+1)}}{(2\pi)^{2r(k+1)(\sigma-1)}\Gamma(2r(k+1)+1)B_{\sigma r(k+1)}}.$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r(k+1))\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma r(k+1))}\right).$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\zeta(r(k+1))\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}}\right\}.$$

Die Summe der reciproken $(2k-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2rk}B_{rk}}{2\Gamma(2rk+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma rk+1)}{(2\pi)^{2\sigma rk}B_{\sigma rk}}\right\}.$$

Die Summe der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{(2\pi)^{2r(k+1)}B_{r(k+1)}}{2\Gamma(2r(k+1)+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r(k+1)+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(k+1)}B_{\sigma r(k+1)}}\right\}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r>1$ im Mittel:

$$\frac{\zeta(r)}{\zeta(\sigma r)}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r>1$ im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)\zeta(r)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)B_r}{(2\pi)^{2r(\sigma-1)}\Gamma(2r+1)B_{\sigma r}}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r>1$ im Mittel:

$$\zeta(r)\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma r)}\right).$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $r>1$ im Mittel:

$$\zeta(r)\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}}\right\},$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und mindestens durch eine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt im Mittel;

$$\frac{(2\pi)^{2r}B_r}{2\Gamma(2r+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}}\right\}.$$

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{15}{\pi^2}$ quadratische Divisoren, welche durch keine vierte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{315}{2\pi^4}$ quadratische Divisoren, welche durch keine sechste Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{1505}{\pi^6}$ quadratische Divisoren, welche durch keine achte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{31185}{2\pi^8}$ quadratische Divisoren, welche durch keine zehnte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{105}{\pi^4}$ biquadratische Divisoren, welche durch keine achte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jede ganze Zahl hat im Mittel $\frac{14189175}{1382\pi^8}$ biquadratische Divisoren, welche durch keine zwölfte Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so besitzt jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\left\{\log n+2C+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right\}\frac{1}{\zeta(\sigma)}$$

Divisoren, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)(\log n+2C)-\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so besitzt jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel ebenso viele Divisoren, welche durch keine (mindestens eine) σ^{te} Potenz theilbar sind, als jede ganze Zahl in dem Intervalle $1 \ldots [n\varepsilon]$.

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so besitzt jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\left(\log n+2C+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)$$

Divisoren, welche durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)(\log n+2C)-\frac{8\sigma\mathfrak{F}_{2\sigma}\{\Gamma(2\sigma+1)\}^2}{(2\pi)^{4\sigma}B_\sigma^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)}\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1+\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)}\right)$$

Divisoren, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1\right)-\frac{\sigma\mathfrak{F}_\sigma}{\zeta(\sigma)^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1+\frac{4\sigma\Gamma(2\sigma+1)\mathfrak{F}_{2\sigma}}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)$$

Divisoren, welche durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und:

$$\left(1-\frac{2\Gamma(2\sigma+1)}{(2\pi)^{2\sigma}B_\sigma}\right)\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1\right)-\frac{8\sigma\mathfrak{F}_{2\sigma}\{\Gamma(2\sigma+1)\}^2}{(2\pi)^{4\sigma}B_\sigma^2}$$

Divisoren, welche mindestens einen Primfactor in der $(2\sigma)^{\text{ten}}$ oder einer höheren Potenz enthalten.

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]+$$

$$+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}R_r\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)-[\sqrt{n}]R_r([\sqrt{n}])$$

wo:

$$R_r(z)=\alpha$$

ist, wenn:

$$z\equiv\pm\alpha\ (\text{mod. }2r)$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{x}\right]=n\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\frac{(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}}{x}+\Delta_3$$

wo:

$$\Delta_3 = -\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\varepsilon_x + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} R_r\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) - [\sqrt{n}]\, R_r([\sqrt{n}])$$

$$(0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

ist.

Nun ist aber:

$$32)\quad \frac{1}{m}\log(1+x^m) + \frac{2}{m}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{m}{2}\right]} \operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2m} \cdot$$

$$\cdot\left\{\operatorname{arctang}\frac{x-\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{m}}{\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{m}} + \frac{\pi}{2} - \frac{(2\lambda-1)\pi}{m}\right\} =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \frac{x^{m+3}}{m+3} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{x^{2m}}{2m} + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \frac{x^{2m+2}}{2m+2} + \frac{x^{2m+3}}{2m+3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^{3m}}{3m} - \frac{x^{3m+1}}{3m+1} - \ldots$$

und daher hat man auch:

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{x}\right] =$$

$$= n\left\{\frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right\} + \Delta_4$$

wo:

$$|\Delta_4| < (2r+1)\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ist.

Es ist daher:

$$33)\ \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]} \left[\frac{n}{x}\right]}{n} =$$

$$= \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\lambda+1) \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}.$$

Den speciellen Fall $r = 6$ dieser Formel habe ich schon früher a. a. O. mitgetheilt.

Da $(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}$ den Werth $+1$ hat, wenn x einer der Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, r$ nach dem Modul $2r$ congruent ist, und in allen anderen Fällen gleich -1 ist, so ist der Zähler des auf der linken Seite der letzten Gleichung stehenden Bruches die Differenz aus der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche eine der Formen $2r\mu+1$, $2r\mu+2$, $\ldots$, $2r\mu+r$ besitzen, und der Anzahl der übrigen Divisoren.

Man hat daher die Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen Theiler im Mittel um:

$$\frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\lambda+1) \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}.$$

Ist:

$$\lim_{\eta,\ n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\ n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

so hat jede ganze Zahl im Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left(\log n + 2C + \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\lambda+1) \operatorname{cotang} \frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., r congruent sind, und:

$$\frac{1}{2}\left(\log n+2C-\frac{\log 2}{r}-\frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $2\mu r$, $2\mu r+r+1$, $2\mu r+r+2$, ..., $2\mu r+2r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{2}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., r congruent sind, und:

$$\frac{1}{2}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}-\frac{\log 2}{r}-\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{2r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $2\mu r$, $2\mu r+r+1$, $2\mu r+r+2$, ..., $2\mu r+2r-1$ besitzen.

Es ist ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right]+$$
$$+\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}R_r\left(\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right)-\lambda_1 R_r(\lambda_1)$$

wo:

$$\lambda_1 = \left[\frac{\sqrt{8n+1}+1}{4}\right]$$

ist.

Berücksichtigt man die Formel 32), so kann man diese Gleichung sofort in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right] = \frac{\pi n}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r} + \Delta_5$$

wo, wie man leicht findet:

$$|\Delta_5| < \frac{(2r+1)(2n+1)+4}{\sqrt{8n+1}-3} + \frac{3(2r+1)}{4}$$

ist.

Es ist also:

$$34)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right]}{n} = \frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}$$

Den speciellen Fall $r = 3$ dieser Formel habe ich schon früher a. a. O. mitgetheilt.

Da $(-1)^{\left[\frac{x-1}{r}\right]}$ den Werth $+1$ hat, wenn $2x-1$ eine der Formen $4r\mu+1$, $4r\mu+3$, $4r\mu+5$, ..., $4r\mu+2r-1$ besitzt, in allen anderen Fällen aber gleich -1 ist, so ist der Zähler des auf der linken Seite der letzten Gleichung befindlichen Bruches die Differenz aus der Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche eine der Formen $4r\mu+1$, $4r\mu+3$, $4r\mu+5$, ..., $4r\mu+2r-1$ besitzen, und der Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren.

Man hat daher die arithmetischen Theoreme:

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer Zahl, welche eine der Formen $4r\mu+1$, $4r\mu+3$, $4r\mu+5$, ..., $4r\mu+2r-1$ besitzen,

übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren im Mittel um:

$$\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}.$$

Die Anzahl derjenigen Divisoren einer Zahl, welche eine der Formen $4r\mu+2$, $4r\mu+4$, $4r\mu+6$, ..., $4r\mu+2r$ besitzen, übertrifft die Anzahl der übrigen geraden Divisoren im Mittel um:

$$\frac{\log 2}{2r}+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}.$$

Ist:

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so hat jede Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C+\log 2+\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 1, 3, 5, ..., $2r-1$ congruent sind, und:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C+\log 2-\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $4r\mu+2r+1$, $4r\mu+2r+3$, ..., $4r\mu+4r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 1, 3, 5, ..., $2r-1$ congruent sind, und:

$$\frac{1}{4}\left(s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\pi}{4r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche eine der Formen $4r\mu+2r+1$, $4r\mu+2r+3$, $\ldots$, $4r\mu+4r-1$ besitzen.

Ist:

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

so hat jede ganze Zahl in dem Intervalle $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C+\frac{\log 2}{2r}-\log 2+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen $2, 4, 6, \ldots, 2r$ congruent sind, während die Anzahl der übrigen geraden Divisoren:

$$\frac{1}{4}\left(\log n+2C-\log 2-\frac{\log 2}{2r}-\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

beträgt.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel:

$$\frac{1}{4}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{2r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda-1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

Divisoren, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2r$ congruent sind, während die Anzahl der übrigen geraden Divisoren:

$$\frac{1}{4}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\log 2}{2r}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(r-2\lambda+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\lambda-1)\pi}{4r}\right)$$

beträgt.

Über eine Formel der Determinantentheorie.

Von F. Mertens.

1.

Es sei Θ eine ganze Function der $m.n$ Elemente

$$(1) \qquad \begin{Bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn}, \end{Bmatrix}$$

welche in Bezug auf die Elemente

$$(2) \qquad a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots a_{m1}$$

homogen und vom Grade m_1, in Bezug auf die Elemente

$$(3) \qquad a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots a_{m2}$$

homogen und vom Grade m_2 u. s. w., in Bezug auf die Elemente

$$(4) \qquad a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots a_{mn}$$

homogen und vom Grade m_n ist, und es werde zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a_{\lambda 1}\, a_{\lambda 2} \ldots a_{\lambda n} \\ a_{\mu 1}\, a_{\mu 2} \ldots a_{\mu n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{\rho 1}\, a_{\rho 2} \ldots a_{\rho n} \end{vmatrix} = A_{\lambda\mu\ldots\rho}$$

$$\Sigma a_{\alpha p'} a_{\beta q'} \ldots a_{\varepsilon s'} \frac{\partial^k \Theta}{\partial a_{\alpha p} \partial a_{\beta q} \ldots \partial a_{\varepsilon s}} = \Theta \begin{pmatrix} p' q' \ldots s' \\ p\ q\ \ldots s \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial^n \Theta}{\partial a_{\lambda\alpha} \partial a_{\mu\beta} \ldots \partial a_{\rho\varepsilon}} = \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta)$$

gesetzt, wo sich das erste Summenzeichen auf alle Werthe $1, 2, \ldots m$ der k reihenden Elemente $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ bezieht, unter dem zweiten dagegen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ zu durchlaufen haben und das Vorzeichen $\pm$ sich, wie bei der Bildung einer Determinante, nach der jeweiligen Classe der betreffenden Permutation richtet. Nennt man jeden Ausdruck von der Form

$$\Theta\binom{p'}{p} = a_{1p'}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{1p}} + a_{2p'}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{2p}} + \ldots + a_{mp'}\frac{\partial\Theta}{da_{mp}}$$

eine Polare von Θ, die Polare einer Polare von Θ, d. h. einen Ausdruck von der Form

$$\Theta\binom{p'}{p}\binom{q'}{q} = a_{1q'}\frac{\partial.\Theta\binom{p'}{p}}{\partial a_{1q}} + a_{2q'}\frac{\partial.\Theta\binom{p'}{p}}{\partial a_{2q}} + \ldots + a_{mq'}\frac{\partial.\Theta\binom{p'}{p}}{\partial a_{mq}}$$

eine mehrfache Polare u. s. w. und bezeichnet allgemein mit $\Pi(\Theta)$ ein aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren jedes eine mit einem Zahlenfactor versehene mehrfache Polare von Θ ist, bestehendes Polynom, mit $\Pi^{(k)}(\Theta)$ dagegen ein eben solches Polynom, wenn alle seine Glieder Polaren von Ausdrücken sind, welche in Bezug auf die Elemente (4) vom Grade k sind, so lässt sich Θ identisch auf die Form

(5) $$\Theta = \Pi^{(0)}(\Theta),$$

wenn $m < n$, und

(6) $$\Theta = \Pi^{(0)}(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_1),$$

wenn $m \geqq n$, bringen; das Summenzeichen bezieht sich auf alle der Grösse der Stellenzeiger nach geordneten Combinationen n^{ter} Classe $\lambda\mu\ldots\rho$ der Zahlen $1, 2, \ldots m$ und Θ_1 bezeichnet einen Ausdruck von der Form

$$\Theta_1 = \frac{1}{M}\Theta + \Pi(\Theta),$$

M eine ganz positive Zahl.

I. Es seien, um die Formeln (5), (6) zu beweisen, $\lambda, \mu, \ldots \sigma, \tau$ k verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots n$ und $S_{\lambda\mu\ldots\tau}$ die Summe aller Ausdrücke von der Form

$$(7) \qquad (-1)^{\lambda}\Theta\binom{\alpha}{\tau}\binom{\beta}{\alpha}\dots\binom{\varepsilon}{\delta}\binom{\tau}{\varepsilon},$$

wo $\alpha\beta\dots\varepsilon$ irgend eine Combination k—1ter Classe der Stellenzeiger $\lambda\mu\dots\sigma$ ohne Wiederholung bezeichnet. Man hat dann

$$(8) \qquad m_\tau\Theta = S_{\lambda\mu\dots\tau} + (-1)^{k-1}\Theta\binom{\mu\nu\dots\tau\lambda}{\lambda\mu\dots\sigma\tau}.$$

Der Ausdruck (7) zerfällt nämlich, wenn die geforderten Differentiationen ausgeführt werden, in

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\lambda}\Theta\binom{\tau}{\tau}\\
&+(-1)^{\lambda}\Theta\binom{\alpha\tau}{\tau\alpha}+(-1)^{\lambda}\Theta\binom{\beta\tau}{\tau\beta}+\dots+(-1)^{\lambda}\Theta\binom{\varepsilon\tau}{\tau\varepsilon}\\
&+(-1)^{\lambda}\Theta\binom{\alpha\beta\tau}{\tau\alpha\beta}+\dots\\
&+\dots\\
&+(-1)^{\lambda}\Theta\binom{\alpha\beta\dots\varepsilon\tau}{\tau\alpha\beta\dots\varepsilon}
\end{aligned}$$

und es kommt demnach der Ausdruck $\Theta\binom{\tau}{\tau}$ in $S_{\lambda\mu\dots\rho}$ mit dem Coëfficienten

$$\binom{k-1}{1}-\binom{k-1}{2}+\binom{k-1}{3}-\dots\quad=1,$$

jeder Ausdruck von der Form $\Theta\binom{\alpha\beta\dots\tau}{\tau\alpha\dots\varepsilon}$, wenn $k>2$ und die Anzahl p—1 der Stellenzeiger $\alpha,\beta,\dots\varepsilon$ (ausser τ) $< k$—1 ist, mit dem Coëfficienten

$$(-1)^{p}\left[1-\binom{k-p}{1}+\binom{k-p}{2}-\dots\right]=0$$

und der Ausdruck $\Theta\binom{\lambda\mu\dots\tau}{\tau\lambda\mu\dots\sigma}$ mit dem Coëfficienten $(-1)^{k}$ vor; überdies ist

$$(9) \qquad \Theta\binom{\tau}{\tau}=a_{1\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{1\tau}}+a_{2\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{2\tau}}+\dots+a_{m\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{m\tau}}=m_\tau\Theta$$

wegen der Homogeneität von Θ in Bezug auf die Elemente

$$a_{1\tau}, a_{2\tau}, \ldots a_{m\tau}.$$

Bezeichnet nun $pq \ldots s$ irgend eine Permutation der Zahlen $1,2, \ldots n$ und $\lambda\mu \ldots \tau$ einen k-gliedrigen Cykel derselben, so hat man, wenn $k > 1$, nach (8):

$$m_\tau \Theta = \Pi(\Theta) + (-1)^{k-1} \Theta \begin{pmatrix} \mu \ldots \lambda \\ \lambda\mu \ldots \tau \end{pmatrix} \tag{10}$$

und man darf annehmen, dass τ der grösste unter den Stellenzeigern des Cykels ist. Aber auch für einen eingliedrigen Cykel τ gilt diese Gleichung, wenn man $\Pi(\Theta) = 0$ setzt und erwägt, dass nach (9)

$$m_\tau \Theta = \Theta \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

ist. Besteht die Permutation $pq \ldots s$ aus mehr als einem Cykel und bezeichnet $\lambda'\mu' \ldots \tau'$ einen zweiten mit k' Stellenzeigern, so wende man die Formel (10) auf den Cykel $\lambda'\mu' \ldots \tau'$ und den Ausdruck

$$(-1)^{k-1} \Theta \begin{pmatrix} \mu \ldots \lambda \\ \lambda\mu \ldots \tau \end{pmatrix} = m_\tau \Theta - \Pi(\Theta)$$

an; es wird dann, da letzterer in Bezug auf

$$a_{1\tau'}, a_{2\tau'}, \ldots a_{m\tau'}$$

von demselben Grade wie Θ ist und ein Aggregat von Polaren desselben wieder die Form $\Pi(\Theta)$ hat:

$$(-1)^{k-1} m_{\tau'} \Theta \begin{pmatrix} \mu \ldots \lambda \\ \lambda\mu \ldots \tau \end{pmatrix} = \Pi(\Theta) + (-1)^{k-1+k'-1} \Theta \begin{pmatrix} \mu \ldots \lambda\mu' \ldots \lambda' \\ \lambda\mu \ldots \tau\lambda'\mu' \ldots \tau' \end{pmatrix}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (10) ein, so wird

$$m_\tau m_{\tau'} \Theta = \Pi(\Theta) + (-1)^{k-1+k'-1} \Theta \begin{pmatrix} \mu \ldots \lambda\mu' \ldots \lambda' \\ \lambda\mu \ldots \tau\lambda'\mu' \ldots \tau' \end{pmatrix}.$$

So kann fortgefahren werden, bis alle Cykeln der Permutation $pq \ldots s$ erschöpft sind, und man erhält allgemein:

$$m_\tau \ldots \Theta = \Pi(\Theta) + (-1)^{n-g} \Theta \begin{pmatrix} p\,q \ldots s \\ 1\,2 \ldots n \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wo g die Anzahl der Cykeln der Permutation $pq \ldots s$ — die eingliedrigen mitgerechnet — und $\tau \ldots$ die grössten in den einzelnen Cykeln enthaltenen Stellenzeiger bezeichnen.

Summirt man alle Gleichungen (11), welche den verschiedenen Permutationen $pq\ldots s$ entsprechen, so ergibt sich

$$(12) \qquad M.\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma(-1)^{n-g}\Theta\begin{pmatrix} p\,q\ldots s \\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix},$$

wo M die Summe der Producte $m_\tau\ldots$ bezeichnet. Es ist aber

$$\Theta\begin{pmatrix} p\,q\ldots s \\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix} = \Sigma\, a_{\alpha p}a_{\beta q}\ldots a_{\varepsilon s}\frac{\partial^n\Theta}{\partial a_{\alpha 1}\partial a_{\beta 2}\ldots\partial a_{\varepsilon n}}$$

und daher

$$\Sigma(-1)^{n-g}\Theta\begin{pmatrix} p\,q\ldots s \\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix} = \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}\frac{\partial^n\Theta}{\partial a_{\alpha 1}\partial a_{\beta 2}\ldots\partial a_{\varepsilon n}}.$$

Ist nun $m < n$, so verschwinden alle Determinanten $A_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ identisch, weil unter den Stellenzeigern $\alpha,\beta\ldots\varepsilon$ gleiche vorkommen müssen, und man hat

$$\Sigma(-1)^{n-g}\Theta\begin{pmatrix} p\,q\ldots s \\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix} = 0.$$

Ist dagegen $m \geqq n$, so braucht das Summenzeichen nur auf diejenigen Zahlensysteme $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ bezogen zu werden, welche aus allen möglichen Permutationen der einzelnen der Grösse der Stellenzeiger nach geordneten Combinationen $\lambda\mu\ldots\rho$ n^{ter} Classe (ohne Wiederholung) der Zahlen $1,2,\ldots m$ bestehen; bilden aber $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ eine Permutation der Combination $\lambda\mu\ldots\rho$, so hat man

$$A_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \pm A_{\lambda\mu\ldots\rho},$$

wo das Vorzeichen der Classe der Permutation $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ entspricht, und derjenige Bestandtheil der Summe, welcher sich auf alle Permutationen von $\lambda\mu\ldots\rho$ bezieht, ist

$$= A_{\lambda\mu\ldots\rho}\,\Sigma\pm\frac{\partial^n\Theta}{\partial a_{\alpha 1}\partial a_{\beta 2}\ldots\partial a_{\varepsilon n}} = A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta),$$

so dass, über alle Combinationen $\lambda\mu\ldots\rho$ erstreckt,

$$\Sigma(-1)^{n-g}\Theta\begin{pmatrix} p\,q\ldots s \\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix} = \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta)$$

wird. Dividirt man noch die Gleichung (12) durch die Zahl M, welche nicht $= 0$ sein kann, wenn $m_n > 0$, da ja $M \geqq m_n$ ist, wie aus der auf die cyklische Permutation $2\,3 \ldots n\,1$ bezogenen Gleichung (11) hervorgeht, so hat man

$$\Theta = \Pi(\Theta), \tag{13}$$

wenn $m < n$, und

$$\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\frac{1}{M}\Theta\right), \tag{14}$$

wenn $m \geqq n$.

II. Um eine Polare eines Ausdrucks von der Form

$$\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi)$$

zu bilden, genügt es, die dazu führende Operation unter dem Zeichen ∇ an Φ zu vollziehen, d. h. es ist

$$\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi)\binom{p'}{p} = \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\Phi\binom{p'}{p}\right). \tag{15}$$

Greift man nämlich aus dem Ausdrucke

$$\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\Phi\binom{p'}{p}\right) = \Sigma \pm \frac{\partial^n . \Phi\binom{p'}{p}}{\partial a_{\lambda\alpha}\partial a_{\mu\beta}\ldots\partial a_{\rho\varkappa}}$$

je zwei Glieder

$$\pm \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{\ldots \partial a_{\sigma p}\ldots\partial a_{\tau p'}\ldots}, \mp \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{\ldots\partial a_{\sigma p'}\ldots\partial a_{\tau p}\ldots}$$

heraus, welche zwei nur durch die Vertauschung von p und p' sich unterscheidenden Permutationen $\ldots p \ldots p' \ldots, \ldots p' \ldots p \ldots$ entsprechen, so ist, weil diese Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben

$$\pm \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{\ldots\partial a_{\sigma p}\ldots\partial a_{\tau p'}\ldots} \mp \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{\ldots\partial a_{\sigma p'}\ldots\partial a_{\tau p}\ldots} =$$

$$= \left(\pm \frac{\partial^n \Phi}{\ldots\partial a_{\sigma p}\ldots\partial a_{\tau p'}\ldots} \mp \frac{\partial^n \Phi}{\ldots\partial a_{\sigma p'}\ldots\partial a_{\tau p}\ldots}\right)\binom{p'}{p},$$

woraus die Gleichung (15) folgt.

Aus dieser Gleichung ergibt sich ferner:

$$(16)\quad [\Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi)]\binom{p'}{p} =$$

$$= \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\binom{p'}{p}\cdot\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\cdot(\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi))\binom{p'}{p} =$$

$$= \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\Phi\binom{p'}{p}\right),$$

da identisch

$$A_{\lambda\mu\ldots\rho}\binom{p'}{p} = 0$$

ist.

III. Der Ausdruck $\Pi(\Theta)$ in (14) besteht aus lauter Gliedern von der Form

$$G = c\,\Theta\binom{p'}{p}\binom{q'}{q}\ldots\binom{t'}{t}$$

und der Herleitung zufolge ist immer wenigstens $p' < p$. Es kann auch noch $q' < q \ldots$ sein. Es seien in der Zahlenreihe $p, q, \ldots t$

$$p, q, \ldots r$$

die ersten aufeinander folgenden Stellenzeiger, für welche

$$p' < p, q' < q, \ldots r' < r$$

ist. Das Glied G kann dann als Polare des Ausdrucks

$$(17)\qquad \Phi = c\,\Theta\binom{p'}{p}\binom{q'}{q}\ldots\binom{r'}{r}$$

aufgefasst werden. Ist nun für jedes Glied G der Ausdruck Φ vom Grade 0 in Bezug auf die Elemente (4), so hat man die Formel (6). Ist dagegen für ein Glied G der Ausdruck noch nicht vom Grade 0 in Bezug auf $a_{1n}, a_{2n}\ldots a_{mn}$, so kann man auf denselben die Formel (14) anwenden. Es wird dann

$$(18)\qquad \Phi = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\frac{1}{M}\Phi\right)$$

und es ist klar, dass jedes Glied von $\Pi(\Theta)$ in dieser Formel die Gestalt

$$G' = c'\,\Theta\binom{p'}{p}\binom{q'}{q}\ldots\binom{r'}{r}\binom{s'}{s}\ldots$$

hat, wo neben

$$p' < p, q' < q, \ldots r' < r$$

wenigstens auch noch $s' < s$ ist. Aus (18) folgt hierauf nach (16)

$$G = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} \left(\frac{1}{M} G\right). \tag{19}$$

Ersetzt man in der Gleichung (14) das Glied G durch den Ausdruck (19) und verfährt mit allen ähnlichen Gliedern ebenso, so ergibt sich

$$\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} \left(\frac{1}{M} \Theta + \frac{1}{M'} G + \ldots\right).$$

Diese Gleichung lässt sich, wenn sie noch nicht die Form (6) hat, ebenso wie (14) behandeln und es ist klar, dass man zu einer Gleichung von der Form (6) gelangen muss, wenn man das beschriebene Verfahren hinreichend oft wiederholt. Nach k-maliger Wiederholung gelangt man nämlich entweder schon zu einer Gleichung von der gewünschten Form, oder aber doch zu einer Gleichung von der Form

$$\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} \left(\frac{1}{M} \Theta + \frac{1}{M'} G + \ldots\right),$$

in welcher jedes Glied von $\Pi(\Theta)$ als Polare eines Ausdrucks Φ von der Form (17) auftritt, in welchem die Anzahl der Stellenzeiger $p, q, \ldots r$ wenigstens k beträgt. Sind nun $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ beziehungsweise die Gradzahlen von Φ in Bezug auf die Elemente (2), (3), ... (4), so ist

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + n\mu_n = m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n - (p - p') - (q - q') - \ldots - (r - r'),$$

und da

$$p - p' + q - q' + \ldots + r - r' \geqq k,$$

so wird

$$\mu_n \leqq \frac{1}{n} (m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n - k).$$

Bei hinreichend grossem k muss daher $\mu_n = 0$ werden.

Dieselben Schlüsse führen von (13) zu (5).

2.

Bezeichnen

$$\begin{matrix} a'_{11}\, a'_{12} \ldots a'_{1n} \\ a'_{21}\, a'_{22} \ldots a'_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{m1}\, a'_{m2} \ldots a'_{mn} \end{matrix}$$

$m.n$ beliebige Elemente und $A'_{\lambda\mu\ldots\rho}$ die Determinante

$$\Sigma \pm a'_{\lambda 1}\, a'_{\mu 2} \ldots a'_{\rho n},$$

so kann man, wenn $m \geqq n$ und $m_n > 1$, die Formel (6) auf den Ausdruck

$$\Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho}\, \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_1)$$

anwenden und erhält

$$\begin{aligned} \Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_1) &= \Pi^0(\Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_1)) \\ &\quad + \Sigma A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}\nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}[\Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_2)], \\ &= \Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}[\Pi^{(1)}(\Theta)] \\ &\quad + \Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho}A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}\nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_2), \end{aligned}$$

wo Θ_2 wieder die Form $\frac{1}{N}\Theta + \Pi(\Theta)$ hat. Setzt man dann

$$a'_{11} = a_{11}\ a'_{12} = a_{12} \ldots a'_{mn} = a_{mn},$$

so wird

$$\begin{aligned} \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_1) &= \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}[\Pi^{(1)}\Theta] \\ &\quad + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}(\Theta_2), \end{aligned}$$

woraus nach (6)

$$\begin{aligned} \Theta &= \Pi^0(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Pi^{(1)}(\Theta_1)) \\ &\quad + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}(\Theta_2) \end{aligned}$$

folgt. So kann fortgefahren werden, bis die Gradzahl m_n erschöpft ist, und es ergibt sich allgemein

$$\begin{aligned} (20)\quad \Theta &= \Pi^0(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Pi^{(1)}(\Theta_1)) + \ldots \\ &\quad + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho}A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}\ldots\nabla_{\gamma\rho\ldots\mu}\nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}\ldots(\Theta_{m_n}), \end{aligned}$$

wo

$$\Theta_{m_n} = \frac{1}{P}\Theta + \Pi(\Theta).$$

Für $n=2$ findet man diese Formel bei Clebsch (Theorie der binairen algebraischen Formen).

3.

Die Formel (20) lässt sich auf die Bestimmung der allgemeinen Gestalt eines ganzen Ausdrucks Θ der Coëfficienten von m linearen Formen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{21}$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ anwenden, welcher letztere nicht enthält und einer Identität von der Form

$$\Theta x_n^r = QY + Q'Y' + \ldots \tag{22}$$

genügt, wo $Q, Q', \ldots$ ganze Polynome der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Coëfficienten von $y_1, y_2, \ldots$ und $Y, Y', \ldots$ Producte von k gleichen oder verschiedenen Factoren bezeichnen, deren jeder eine der Formen (21) ist. Diese Anwendung beruht auf der Eigenschaft von Θ, dass jede ein- oder mehrfache Polare von Θ, welche in Bezug auf die Elemente

$$a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{mn} \tag{23}$$

den Grad k nicht erreicht, identisch verschwindet.

Einerseits genügt nämlich jede Polare $\Theta\binom{p'}{p}$, in welcher $p' < p$, einer Identität von derselben Form wie Θ. Aus (22) folgt

$$\Theta\binom{p'}{p} x_n^r = Q\binom{p'}{p} \cdot Y + Q'\binom{p'}{p} \cdot Y' + \ldots$$
$$+ Q \cdot Y\binom{p'}{p} + Q' \cdot Y'\binom{p'}{p} + \ldots;$$

es ist aber

$$Y\binom{p'}{p} = x_p\left(\frac{\partial Y}{\partial y_1}a_{1p'} + \frac{\partial Y}{\partial y_2}a_{2p'} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial y_m}a_{mp'}\right)$$
$$= x_p\frac{\partial Y}{\partial x_{pl}}$$
$$Y'\binom{p'}{p} = x_p\frac{\partial Y'}{\partial x_{pl}}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

und da (22), nach $x_{p'}$ differenziirt, die Identität

$$0 = Y\frac{\partial Q}{\partial x_{pl}} + Y'\frac{\partial Q'}{\partial x_{pl}} + \ldots + Q\frac{\partial Y}{\partial x_{pl}} + Q'\frac{\partial Y'}{\partial x_{pl}} + \ldots$$

gibt, so wird

$$\Theta\binom{p'}{p}.x_n^r = \left(Q\binom{p'}{p} - x_p\frac{\partial Q}{\partial x_{pl}}\right)Y + \left(Q'\binom{p'}{p} - x_p\frac{\partial Q'}{\partial x_{pl}}\right)Y' + \ldots$$

Andererseits muss jeder der Identität (22) genügende Ausdruck Θ, welcher in Bezug auf die Elemente (23) den Grad k nicht erreicht, identisch verschwinden. Setzt man, unter $t_1, t_2, \ldots t_m$ beliebige Elemente verstanden, in (22) $x_n = 1$ und für $i = 1,2,\ldots m$

$$a_{in} = t_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in-1}x_{n-1},$$

wodurch Θ in Θ^0 übergehen möge, so erscheint Θ^0 als Polynom, dessen sämmtliche Glieder in Bezug auf $t_1, t_2, \ldots t_m$ wenigstens k^{ten} Grades sind, und muss daher identisch verschwinden. Setzt man dann $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $t_1 = a_{1n}$, $t_2 = a_{2n}, \ldots t_m = a_{mn}$, wodurch Θ^0 wieder in Θ übergeht, so ergibt sich $\Theta = 0$.

Wenn aber jede Polare von Θ, welche in Bezug auf die Elemente (23) den Grad k nicht erreicht, identisch verschwindet, so haben die einzelnen Bestandtheile von Θ, welche sowohl in Bezug auf die Elemente (2) als in Bezug auf die Elemente (3) u. s. w. homogen, aber in Bezug auf eine oder mehrere der genannten Elementengruppen verschiedenen Grades sind, dieselbe Eigenschaft. Es sei B einer dieser Bestandtheile, welcher in Bezug auf die Elemente (23) den Grad $k-1$ übersteigt — andere, welche diese Eigenschaft nicht haben, kommen nicht in

Betracht, da sie identisch verschwinden. Man hat dann, da alle Ausdrücke

$$\Pi^0(B), \Pi^{(1)}(B), \Pi^{(k-1)}(B)$$

identisch verschwinden, nach (20)

$$B = \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \cdots \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \cdots (B_k)$$

und es erscheint somit B in der Gestalt

$$B = A.P + A'.P' + \ldots,$$

wo $A, A', \ldots$ ganze Polynome der Coëfficienten der Formen (21) und $P, P', \ldots$ Producte von k-Determinanten n^{ter} Ordnung der nämlichen Formen bezeichnen.

Da dasselbe von allen Bestandtheilen B von Θ gilt, so hat man auch

$$\Theta = A.P + A'.P' + \ldots \tag{24}$$

Wäre $m < n$, so führen dieselben Schlüsse zu der Gleichung

$$\Theta = 0. \tag{25}$$

4.

Jede Invariante Θ der m linearen Formen (21) genügt einer Identität von der Gestalt (22). Es gehe allgemein y_p durch die Substitution

$$x_\mu = \xi_{1\mu} X_1 + \xi_{2\mu} X_2 + \ldots + \xi_{n\mu} X_n \quad \mu = 1, 2, \ldots n$$

in

$$y_{p1} X_1 + y_{p2} X_2 + \ldots + y_{pn} X_n$$

über, wo also

$$y_{pq} = a_{p1}\xi_{q1} + a_{p2}\xi_{q2} + \ldots + a_{pn}\xi_{qn},$$

und Θ in $\overline{\Theta}$, wenn allgemein a_{pq} durch y_{pq} ersetzt wird. Man hat dann, wenn

$$\Sigma \pm \xi_{11}\xi_{22}\cdots\xi_{nn} = \Xi$$

gesetzt wird,

$$\overline{\Theta} = \Xi^r . \Theta. \tag{26}$$

Wendet man diese Identität auf die Substitution

$$(27)\quad x_1 = X_1 + z_1 X_n \quad x_2 = X_2 + z_2 X_n \ldots$$
$$x_{n-1} = X_{n-1} + z_{n-1} X_n \quad x_n = z_n X_n$$

an und setzt

$$a_{p1} z_1 + a_{p2} z_2 + \ldots + a_{pn} z_n = Z_p,$$

so wird

$$z_n^r \Theta = \overline{\Theta}$$

und $\overline{\Theta}$ ein Polynom, in welchem die Elemente $z_1, z_2, \ldots z_n$ nur in den Ausdrücken

$$(28)\qquad Z_1, Z_2, \ldots Z_m$$

vorkommen und welches daher nur aus Gliedern bestehen kann, die wenigstens r der genannten Ausdrücke als Factoren enthalten. Θ muss sonach, wenn $m \geqq n$, nach (24) die Gestalt

$$A.P + A'.P' + \ldots$$

haben und es ist klar, dass $A, A', \ldots$ constante Factoren sind. Aus der Identität (26) folgt nämlich, wenn man den Grad beider Seiten in Bezug auf die Substitutionscoëfficienten $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots \xi_{nn}$ in Betracht zieht, dass Θ vom Grade $n.r$ in Bezug auf die Coëfficienten von $y_1, y_2, \ldots$ sein muss, wenn es nicht etwa identisch verschwindet.

Jede Invariante m linearer Formen von n Veränderlichen lässt sich daher, wenn $m \geqq n$, als homogene Function der Determinanten n^{ter} Ordnung dieser Formen darstellen. — Weniger als n lineare Formen mit n Veränderlichen besitzen keine Invariante (25).

Bezeichnet $\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Covariante der Formen (21), welche in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Grade μ ist und der Identität

$$(29)\quad \overline{\Theta}(X_1, X_2, \ldots X_n) = \Xi^r \Theta(\xi_{11} X_1 + \xi_{21} X_2 + \ldots + \xi_{n1} X_n, \ldots)$$

genügt, wo $\overline{\Theta}(X_1, \ldots)$ aus $\Theta(x_1, \ldots)$ hervorgeht, wenn allgemein a_{pq} durch y_{pq} und x_i durch X_i ersetzt wird, so ergibt sich, wenn man die Identität (29) auf die Substitution (27) anwendet

(30) $z_n^r \Theta(X_1 + z_1 X_n, X_2 + z_2 X_n, \ldots z_n X_n) = \overline{\Theta}(X_1, X_2, \ldots X_n)$

und man schliesst, wie oben, dass $\bar{\Theta}(X_1, X_2, \ldots)$ aus lauter Gliedern bestehen muss, welche wenigstens r von den Ausdrücken (28) als Factoren enthalten. Diese Eigenschaft geht nicht verloren, wenn

$$X_1, X_2, \ldots X_{n-1}, X_n$$

durch

$$z_n x_1 - z_1 x_n, z_n x_2 - z_2 x_n, \ldots z_n x_{n-1} - z_{n-1} x_n, x_n$$

ersetzt werden, und es hat sonach

$$z_n^{r+\mu} \Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

dieselbe Eigenschaft. Hieraus folgt, wenn $r > 0$ und $m \gtrless n$, nach (24)

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n) = P.A(x_1, x_2, \ldots x_n) + P' A'(x_1, x_2, \ldots x_n) + \ldots;$$

$A(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots$ sind, wie aus der Betrachtung der Gradzahlen von $\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$ hervorgeht, ganze Polynome μ^{ten} Grades sowohl in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ als auch $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{mn}$. Setzt man diesen Ausdruck in die Identität (30) ein, so ergibt sich nach Forthebung von z_n^r

$$\Theta(X_1 + z_1 X_n, X_2 + z_2 X_n, \ldots z_n X_n) = P.\bar{A}(X_1, X_2, \ldots X_n) + P' \bar{A}'(X_1, X_2, \ldots X_n) + \ldots$$

Die Gleichsetzung der Glieder, welche X_n^μ enthalten, gibt dann

$$\Theta(z_1, z_2, \ldots z_n) = P.C + P'C + \ldots$$

wo $C, C', \ldots$ die Coëfficienten von X_n^μ in $\bar{A}(X_1, X_2, \ldots), \bar{A}'(X_1, X_2, \ldots) \ldots$ bezeichnen. Da aber $\bar{A}(X_1, X_2, \ldots), \ldots$ Functionen von

$$a_{11} a_{12} \ldots a_{1n-1}, Z_1$$
$$a_{21} a_{22} \ldots a_{2n-1}, Z_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

sind, so haben $C, C', \ldots$ die Form

$$C = \psi(Z_1, Z_2, \ldots Z_m) + \chi$$
$$C' = \psi'(Z_1, Z_2, \ldots Z_m) + \chi'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo $\psi, \psi', \ldots$ ganze homogene Functionen μ^{ten} Grades von $Z_1, Z_2, \ldots Z_m$ bezeichnen, deren Coëfficienten die Elemente $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{mn}$ nicht mehr enthalten, $\chi, \chi', \ldots$ dagegen in Bezug auf $z_1, z_2, \ldots z_n$ den Grad μ nicht erreichen. Man hat daher auch

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n) = P.\psi(y_1, y_2, \ldots y_m) + P'.\psi'(y_1, y_2, \ldots y_m) + \ldots$$

Jede Covariante m linearer Formen mit n Veränderlichen erscheint sonach, wenn $m \geqq n$ und ihr Exponent $r > 0$ ist, als ganzes homogenes Polynom dieser Formen und ihrer Determinanten n^{ter} Ordnung. — Wenn $m < n$, so gibt es keine Covariante, für welche $r > 0$ wäre. — Wenn $r = 0$, so erscheint jede Covariante, wie sich leicht zeigen lässt, als homogenes Polynom von $y_1, y_2, \ldots y_m$.

Die vorstehenden Sätze wurden zuerst von Clebsch (Crelle-Borrhardt's Journal, Bd. 59) gegeben.

Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat.

Von **F. Mertens.**

Bei der Frage nach den Covarianten eines Kegelschnittbüschels, welche zugleich die Combinanteneigenschaft besitzen, bin ich auf einen Kegelschnitt gestossen, welcher die genannte Eigenschaft hat und sonach zu je zwei Individuen des Kegelschnittbüschels in derselben Beziehung steht.

Ich will Kürze halber den Kegelschnitt, welcher von allen zwei gegebene Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ in harmonischen Punktepaaren schneidenden Strahlen berührt wird, und den Kegelschnitt, von dessen Punkten zwei zu einander harmonische Tangentenpaare an $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ gezogen werden können, die beiden harmonischen Kegelschnitte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ nennen. Die Combinanteneigenschaft des obgenannten Kegelschnittes besteht dann darin, dass sich auf demselben die beiden harmonischen Kegelschnitte je zweier Individuen des Büschels (vollständig) schneiden.

Es seien

$$f_x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$
$$f'_x = a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{31}x_3x_1 + 2a'_{12}x_1x_2$$

zwei quadratische Formen von x_1, x_2, x_3 und

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2$$
$$A'_{11}u_1^2 + A'_{22}u_2^2 + A'_{33}u_3^2 + 2A'_{23}u_2u_3 + 2A'_{31}u_3u_1 + 2A'_{12}u_1u_2$$

die adjungirten Formen von f_x, f'_x, wo also

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \quad \ldots \qquad A_{23} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \quad \ldots$$
$$A'_{11} = a'_{22}a'_{33} - a'^2_{23} \quad \ldots \qquad A'_{23} = a'_{12}a'_{13} - a'_{11}a'_{23} \quad \ldots$$

Setzt man dann

$$(a_{22}a'_{33} + a_{33}a'_{22} - 2a_{23}a'_{23})u_1^2 + (a_{33}a'_{11} + a_{11}a'_{33} - 2a_{13}a'_{12})u_2^2$$
$$+ (a_{11}a'_{22} + a_{22}a'_{11} - 2a_{12}a'_{12})u_3^2$$
$$+ 2(a_{12}a'_{13} + a_{13}a'_{12} - a_{11}a'_{23} - a_{23}a'_{11})u_2u_3$$
$$+ 2(a_{12}a'_{23} + a_{23}a'_{12} - a_{22}a'_{13} - a_{13}a'_{22})u_3u_1$$
$$+ 2(a_{13}a'_{23} + a_{23}a'_{13} - a_{33}a'_{12} - a_{12}a'_{33})u_1u_2 = G_u,$$

$$(A_{22}A'_{33} + A_{33}A'_{22} - 2A_{23}A'_{23})x_1^2 + (A_{33}A'_{11} + A_{11}A'_{33} - 2A_{13}A'_{13})x_2^2$$
$$+ (A_{11}A'_{22} + A_{22}A'_{11} - 2A_{12}A'_{12})x_3^2$$
$$+ 2(A_{12}A'_{13} + A_{13}A'_{12} - A_{11}A'_{23} - A_{23}A'_{11})x_2x_3$$
$$+ 2(A_{12}A'_{23} + A_{23}A'_{12} - A_{22}A'_{13} - A_{13}A_{22})x_3x_1$$
$$+ 2(A_{13}A'_{23} + A_{23}A'_{13} - A_{33}A'_{12} - A_{12}A'_{33})x_1x_2 = g_x,$$

$$a'_{11}A_{11} + a'_{22}A_{22} + a'_3\ A_{33} + 2a'_{23}A_{23} + 2a'_{31}A_{31} + 2a'_{12}A_{12} = E,$$
$$a_{11}A'_{11} + a_{22}A'_{22} + a_{33}A'_{33} + 2a_{23}A'_{23} + 2a_{31}A'_{31} + 2a_{12}A'_{12} = E',$$

$$E'f_x + Ef'_x - 3g_x = \varphi_x,$$
$$E'f_x + Ef'_x - g_x = \Gamma_x,$$

so ist φ_x eine Covariante mit Combinanteneigenschaft des Kegelschnittbüschels

1.) $$\lambda f_x + \lambda' f'_x = 0$$

und

(2.) $$\varphi_x = 0$$

die Gleichung des in Frage stehenden Kegelschnittes. Die von demselben behauptete Eigenschaft geht unmittelbar aus der Identität

$$\varphi_x \equiv \Gamma_x - 2g_x$$

hervor, wenn man erwägt, dass

$$G_u = 0 \qquad g_x = 0$$

die Gleichungen der beiden harmonischen Kegelschnitte von

(3.) $$f_x = 0 \qquad f'_x = 0$$

(in Strahlen- und Punkt-Coordinaten) und dass Γ_x die — mit

Punktcoordinaten geschriebene — adjungirte Form von G_u oder

$$\Gamma_x = 0$$

die Gleichung des ersten der beiden harmonischen Kegelschnitte in Punktcoordinaten ist. Der Kegelschnitt (2.) ist, da die Determinante der Form φ mit der Berührungsinvariante der Kegelschnitte (3.) zusammenfällt, immer und nur dann eine eigentliche (nicht zerfallende) Curve 2. Ordnung, wenn der Kegelschnittbüschel vier verschiedene Grundpunkte hat.

Man kann unmittelbar sechs Punkte des Kegelschnittes (2.) angeben. Zu diesem Ende nehme ich an, dass der Kegelschnittbüschel (1.) vier verschiedene Grundpunkte und ein reelles gemeinschaftliches Poldreieck habe. Denkt man sich dann in jeder Seite des letzteren das Punktepaar, welches sowohl von den durch den gegenüberliegenden Eckpunkt laufenden Seiten des Poldreieckes als auch den durch den nämlichen Punkt laufenden Seiten des vollständigen Viereckes, welches die Grundpunkte bilden, harmonisch getrennt wird, so hat man drei Punktepaare des Kegelschnittes (2.).

Über die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgange eines Strahlenbüschels monochromatischen Lichtes durch ein Prisma mit gerader Durchsicht.

Von Dr. **J. v. Hepperger,**
Assistent an der k. k. Sternwarte zu Wien.

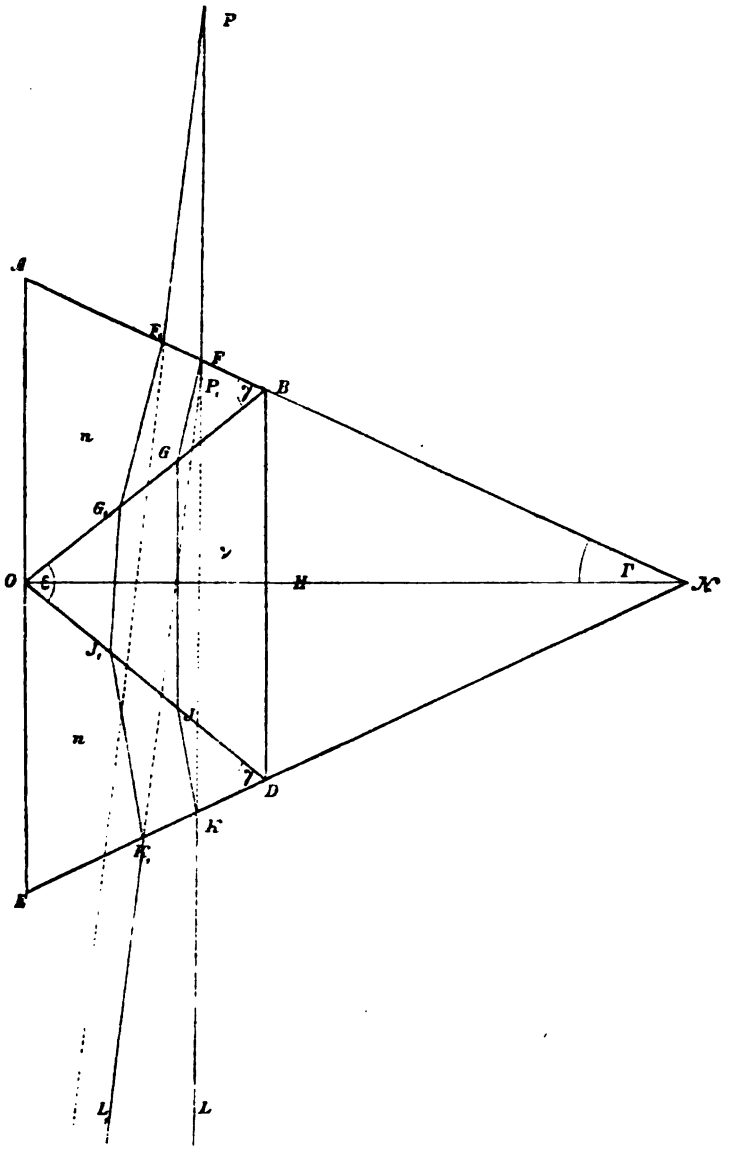
(Mit 2 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1885.)

Wenn von einem Punkte ausgehende Strahlen homogenen Lichtes auf ein Prisma fallen, so treten dieselben nach dem Durchgange durch das Prisma divergent aus, und zwar so, dass sie in ihrer rückwärtigen Verlängerung sich nicht mehr in einem einzigen Punkte schneiden würden. Wenn jedoch der Strahlenkegel eine sehr geringe Öffnung besitzt, wie z. B. der Lichtkegel in einem Fernrohre von verhältnissmässig grosser Brennweite, so erleiden die einzelnen Strahlen beim Durchtritte durch ein Prisma eine solche Brechung, dass sie anscheinend wie von einem Punkte ausgegangen ihren weiteren Weg fortsetzen. Dieser Punkt, den man mit einigem Rechte Bildpunkt nennen kann, fällt seiner Lage nach nicht mit der Lichtquelle zusammen und erscheint speciell bei Prismen mit gerader Durchsicht auf der die Lichtquelle und das Auge verbindenden Geraden in der Richtung der Lichtbewegung verschoben. Auf die Grösse dieser Verschiebung ist besonders Rücksicht zu nehmen bei der Construction von solchen Telespektroskopen, bei welchen Prismen zwischen dem Objectiv des Fernrohres und dem Spalte des Spektroskops in Anwendung kommen. Da hiezu gewöhnlich Prismen mit gerader Durchsicht genommen werden, so werde ich auch nur für solche die Grösse der Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen bestimmen, und der Vereinfachung wegen die Voraussetzung

machen, dass der angewandte Prismensatz aus drei Prismen bestehe, wovon die äusseren gleiche Brechungsexponenten und gleiche brechende Winkel besitzen mögen, und das mittlere Prisma gleichschenklig sein soll. Ferner werde ich nur die Vor-

Fig. 1.



gänge in Betracht ziehen, welche sich in einem Hauptschnitte des Prismensatzes abspielen und des weiteren die Annahme machen, dass die Lichtquelle nur monochromatisches Licht aussende.

Es stelle $ABDE$ den mit dem leuchtenden Punkte P in einer Ebene gelegenen Hauptschnitt des Prismensatzes dar. Brechungsexponent und brechender Winkel der äusseren Prismen mögen mit n, γ, die correspondirenden Grössen für das mittlere Prisma mit ν, ε bezeichnet werden. Ferners ist $OB = OD$. O sei der Anfangspunkt eines Systemes rechtwinkliger Coordinaten; der positive Theil der Abscissenaxe erstrecke sich in der Richtung der den Winkel ε halbirenden Geraden ON, der der Ordinatenaxe in der Richtung OA.

$PFGJKL$ sei der Weg jenes Strahles, für welchen die Summe der Ablenkungen der einzelnen Prismen gleich Null ist, so zwar, dass PF und KL in einer Linie liegen, welche auf ON senkrecht steht. $PF_1G_1J_1K_1L_1$ sei der Weg irgend eines anderen Strahles. Die Coordinaten des Punktes P seien ξ, η. — Die übrigen Bestimmungsstücke des Laufes des beliebig gewählten Strahles $PF_1G_1J_1K_1L_1$ mögen folgendem Schema entnommen werden:

Brechung bei	F_1	G_1	J_1	K_1
Abscis. ob. Punkte.	v	v_1	v_2	v_3
Ordinat. ob. Punkte.	w	w_1	w_2	w_3
Einfallswinkel	α	$\gamma-\beta$	$\varepsilon-\chi$	β'
Brechungswinkel...	β	χ	$\gamma-\beta'$	α'
Neigung des einfallenden Strahles gegen die Absc.-Achse	$90°-(\Gamma-\alpha)$	$90°-(\Gamma-\beta)$	$90°-(\chi-\frac{\varepsilon}{2})$	$90°-(\beta'-\Gamma)$
Neigung des gebrochenen Strahles gegen die Absc.-Achse	$90°-(\Gamma-\beta)$	$90°-(\chi-\frac{\varepsilon}{2})$	$90°-(\beta'-\Gamma)$	$90°-(\alpha'-\Gamma)$
Brechungsexponent.	n	$\frac{\nu}{n}$	$\frac{n}{\nu}$	$\frac{1}{n}$
Absz. d. Bildpunktes	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
Ordin. d. Bildpunktes	η_1	η_2	η_3	η_4

Einfalls- und Brechungswinkel sind hierin als durchaus positive Grössen zu betrachten und an die Relationen geknüpft

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=n;\quad \frac{\sin\chi}{\sin(\gamma-\beta)}=\frac{\sin(\varepsilon-\chi)}{\sin(\gamma-\beta')}=\frac{n}{\nu}$$

Die Prismenwinkel γ und ε sind ebenfalls positive Grössen und mit Γ durch die Gleichung verbunden

$$\Gamma=\gamma-\frac{\varepsilon}{2}$$

Bedeuten x, y die laufenden Coordinaten, so sind die Gleichungen des einfallenden Strahles (PF_1) und des gebrochenen (F_1G_1) nachstehende:

$$(PF_1) \qquad\qquad (F_1G_1)$$

$$\eta-w=(\xi-v)\operatorname{cotg}(\Gamma-\alpha); \qquad y-w=(x-v)\operatorname{cotg}(\Gamma-\beta) \quad 1)$$

Ich suche vorerst die Coordinaten des Bildpunktes von P mit Bezug auf die erste Trennungslinie AB. Die Coordinaten dieses Punktes, welche ich mit ξ_1, η_1 bezeichnet habe, erhält man durch Bestimmung des virtuellen Schnittpunktes eines von P ausgegangenen, unendlich nahe an F_1 gebrochenen Strahles mit dem Strahle F_1 G_1. Durch entsprechende Differenziation obiger Gleichungen erhält man:

$$-\partial w=\frac{\xi-v}{\sin^2(\Gamma-\alpha)}\,\partial\alpha-\operatorname{cotg}(\Gamma-\alpha).\partial v$$

$$-\partial w=\frac{\xi_1-v}{\sin^2(\Gamma-\beta)}\,\partial\beta-\operatorname{cotg}(\Gamma-\beta).\partial v$$

Den Zusammenhang zwischen den Grössen w und v vermittelt die Gleichung:

$$w-BH=(OH-v)\operatorname{tg}\Gamma$$

Demgemäss ist:

$$\partial w=-\operatorname{tg}\Gamma.\partial v$$

Anderseits ist auch:

$$\cos\alpha.\partial\alpha=n\cos\beta.\partial\beta$$

Unter Berücksichtigung dieser beiden Relationen bekommt man:

$$[\operatorname{tg}\Gamma+\operatorname{cotg}(\Gamma-\alpha)]\,\partial v=\frac{\xi-v}{\sin^2(\Gamma-\alpha)}.\partial\alpha$$

$$[\operatorname{tg}\Gamma + \operatorname{cotg}(\Gamma-\beta)]\,\partial v = \frac{\xi_1 - v}{\sin^2(\Gamma-\beta)} \cdot \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta} \cdot \partial\alpha$$

Durch Elimination von ∂v und $\partial\alpha$ aus vorstehenden Gleichungen erhält man nach einfacher Reduction die Bestimmungsgleichung für ξ_1:

$$\xi_1 - v = (\xi - v) \cdot n \cdot \frac{\cos^2\beta \cdot \sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\alpha \cdot \sin(\Gamma-\alpha)} \qquad 2)$$

Die zugehörige Ordinate ist bestimmt durch:

$$\eta_1 - w = (\xi_1 - v)\operatorname{cotg}(\Gamma-\beta)$$

Bei der nächstfolgenden Brechung an OB haben ξ_1, η_1 an Stelle von ξ, η zu treten, und sind überhaupt alle in der Columne F_1 enthaltenen Grössen durch die nebenstehenden der Columne G_1 zu ersetzen. Man erhält sonach:

$$\xi_2 - v_1 = (\xi_1 - v_1) \cdot \frac{\nu}{n} \cdot \frac{\cos^2\chi \cdot \sin(\chi - \frac{\varepsilon}{2})}{\cos^2(\gamma-\beta)\sin(\Gamma-\beta)} \qquad 3)$$

$$\eta_2 - w_1 = (\xi_2 - v_1) \cdot \operatorname{cotg}(\chi - \frac{\varepsilon}{2})$$

und in gleicher Weise fortfahrend:

$$\xi_3 - v_2 = (\xi_2 - v_2) \cdot \frac{n}{\nu} \cdot \frac{\cos^2(\gamma-\beta')\sin(\beta'-\Gamma)}{\cos^2(\varepsilon-\chi) \cdot \sin\left(\chi - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \qquad 4)$$

$$\eta_3 - w_2 = (\xi_3 - v_2) \cdot \operatorname{cotg}(\beta'-\Gamma)$$

$$\xi_4 - v_3 = (\xi_3 - v_3)\,\frac{1}{n}\,\frac{\cos^2\alpha' \cdot \sin(\alpha'-\Gamma)}{\cos^2\beta' \cdot \sin(\beta'-\Gamma)} \qquad 5)$$

$$\eta_4 - w_3 = (\xi_4 - v_3)\operatorname{cotg}(\alpha'-\Gamma)$$

Betrachtet man daher den Punkt ξ, η als Emissionspunkt eines Strahlenfächers von unendlich kleiner Öffnung, dessen Mittellinie gegen einen beliebigen Punkt des entsprechenden Hauptschnittes des Prismensatzes gerichtet ist, so treten die Strahlen nach allen Brechungen so aus dem Prisma aus, als kämen sie von einem Punkte, dessen Coordinaten ξ_4, η_4 sind. Des allgemeinen Characters der vorstehenden Entwicklungen halber gelten dieselben auch für den Fall, dass der von dem Punkte ξ, η ausgehende Axenstrahl den Prismensatz unter dem Einfalls-

winkel trifft, welcher dem Minimum der Ablenkung entspricht, und demgemäss nach den gemachten Voraussetzungen den Prismensatz so verlässt, dass der austretende Strahl mit dem eintretenden in derselben Geraden zu liegen kommt. In diesem Falle ist aber $\xi_1 = \xi$, und dem entsprechend $\eta - \eta_1$ die auf der gemeinschaftlichen Mittellinie gemessene Verschiebung der Scheitelpunkte des ein- und austretenden Strahlenfächers, oder die Differenz von Gegenstands- und Bildweite für den betreffenden Prismensatz. Als Vorbereitung zum Übergange auf diesen Grenzfall werde ich noch folgende Umgestaltungen vornehmen.

Die Elimination von $\xi - v$ aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt:

$$\xi_1 - v = (\eta - w) \cdot n \cdot \frac{\cos^2\beta \cdot \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^2\alpha \cdot \cos(\Gamma - \alpha)} \qquad 6)$$

Nach Vornahme der Unterstellung:

$$X = \frac{\nu}{n} \frac{\cos^2\chi \cdot \sin(\chi - \frac{\varepsilon}{2})}{\cos^2(\gamma - \beta)\sin(\Gamma - \beta)}$$

$$Y = \frac{n}{\nu} \frac{\cos^2(\gamma - \beta')\sin(\beta' - \Gamma)}{\cos^2(\varepsilon - \chi)\sin(\chi - \frac{\varepsilon}{2})}$$

lauten die Gleichungen 3) und 4):

$$\xi_2 - v_1 = (\xi_1 - v_1) \cdot X$$

$$\xi_3 - v_2 = (\xi_2 - v_2) \cdot Y$$

durch Elimination von ξ_2 erhält man:

$$\xi_3 = v_2 - (v_2 - v_1) \cdot Y + (\xi_1 - v_1) \cdot X \cdot Y$$

Es ist aber, wie aus dem Dreiecke OG_1J_1 folgt:

$$v_2 = v_1 \frac{\cos\chi}{\cos(\varepsilon - \chi)}$$

daher

$$v_2 - v_1 = -\frac{2v_1}{\cos(\varepsilon - \chi)} \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin(\chi - \frac{\varepsilon}{2})$$

und demgemäss

$$(v_2 - v_1)\, Y = 2v_1 \cdot \frac{n}{\nu} \cdot \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos^2(\gamma - \beta')\sin(\Gamma - \beta')}{\cos^3(\varepsilon - \chi)}$$

während

$$X.Y = -\frac{\cos^2\chi \cdot \cos^2(\gamma - \beta') \cdot \sin(\Gamma - \beta')}{\cos^2(\varepsilon - \chi) \cdot \cos^2(\gamma - \beta') \cdot \sin(\Gamma - \beta)}$$

Der Grenzfall, welchen ich jetzt betrachten werde, zeichnet sich dadurch aus, dass der einfallende Strahl parallel zur Ordinaten-Axe liegt, also die vordere Prismenfläche unter dem Einfallswinkel Γ trifft, und durch den Prismensatz weder abgelenkt noch verschoben wird. Die aus dieser Annahme erwachsenden Bedingungsgleichungen sind folgende:

$$\alpha = \alpha' = \Gamma; \quad \xi_4 = v_3 = v = \xi$$
$$\beta = \beta'; \quad v_2 = v_1$$
$$\gamma = \frac{\varepsilon}{2}; \quad w_2 = -w_1$$
$$w_3 = -w$$

Mit Rücksichtnahme hierauf gelangt man zu folgenden Formeln

$$(v_2 - v_1).Y = 2v_1 . \frac{n}{\nu} . \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos^2(\gamma - \beta)\sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$X.Y = -1$$

Nach Einführung der Bezeichnung

$$Z = \frac{n}{\nu} . \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2} . \cos^2(\gamma - \beta)\sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\frac{\varepsilon}{2}}$$

erhält man

$$\xi_3 = 2v_1 - 2v_1 Z - \xi_1$$

Aus Formel 6) wird

$$\xi_1 - \xi = (\eta - w) . n . \frac{\cos^2\beta . \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^2\Gamma} \qquad 7)$$

Durch Zusammenfassung des Gleichungspaares 5) erhält man unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen für den in Rede stehenden Grenzfall:

$$\eta_4 + w = -(\xi_3 - \xi) . \frac{1}{n} . \frac{\cos^2\Gamma}{\cos^2\beta . \sin(\Gamma - \beta)}$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit der unmittelbar vorangehenden ergibt sich:

$$(\eta_4+w)(\xi_1-\xi) = -(\eta-w)(\xi_3-\xi)$$

oder

$$\eta_4(\xi_1-\xi) = \eta(\xi-\xi_3)-w(\xi_1-\xi_3)$$

Diese Gleichung verwandelt sich nach Einsetzung des früher abgeleiteten Ausdruckes für ξ_3 in folgende:

$$\eta_4(\xi_1-\xi) = \eta(\xi-2v_1-2v_1 . Z+\xi_1)-w(\xi_1-2v_1+2v_1 . Z+\xi_1)$$

$$\eta_4(\xi_1-\xi) = -\eta(\xi_1-\xi)+2(\eta-w)(\xi_1-v_1)+2(\eta-w) . v_1 Z.$$

Es ist daher

$$\eta_4 = -\eta+2(\eta-w)\frac{\xi_1-\xi+\xi-v_1}{\xi_1-\xi} + 2\frac{\eta-w}{\xi_1-\xi} . v_1 Z$$

$$\eta_4 = \eta-2w+2\frac{\eta-w}{\xi_1-\xi}(\xi-v_1+v_1 Z)$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit Gleichung 7) erhält man nach einfacher Reduction:

$$\frac{1}{2}(\eta-\eta_4) = w-\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos^2\Gamma}{\cos^2\beta . \sin(\Gamma-\beta)}(\xi-v_1+v_1 Z)$$

Ich werde nun die Grössen ξ, w, v_1 als Functionen der Constanten des Prismensatzes und einer einzigen Variablen (λ) ausdrücken, welche die Entfernung des Punktes, in welchem der einfallende Strahl die erste Prismenfläche trifft, von der zugehörigen brechenden Kante darstellen soll. Nenne ich die Länge einer Seite des als gleichschenklig vorausgesetzten mittleren Prisma's c, so finden folgende Relationen statt:

$$BF = KD = \lambda; \quad w = c \sin\frac{\varepsilon}{2} + \lambda \sin\Gamma$$

$$OB = OD = c; \quad \xi = c \cos\frac{\varepsilon}{2} - \lambda \cos\Gamma$$

$$v_1 = c \cos\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\lambda \cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)}.$$

Hieraus bestimmt sich

$$\xi-v_1 = \lambda\left[\frac{\cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)} - \cos\Gamma\right]$$

Da aber

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = \cos(\gamma - \Gamma)$$

so wird

$$\xi - v_1 = \frac{\lambda \sin\gamma \,.\, \sin(\Gamma - \beta)}{\cos(\gamma - \beta)}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke ergibt sich:

$$\frac{1}{2}(\eta - \eta_4) = c\sin\frac{\varepsilon}{2} + \lambda\sin\Gamma - \frac{\lambda}{n}\frac{\cos^2\Gamma\sin\gamma}{\cos^2\beta\,.\,\cos(\gamma-\beta)}$$

$$-\frac{Z}{n}\frac{\cos^2\Gamma}{\cos^2\beta\,.\,\sin(\Gamma-\beta)}\left(c\cos\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\lambda\cos\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)}\right).$$

Die Bestimmungsgleichung für $\eta - \eta_4$, welche Grösse ich mit V bezeichnen will, besitzt sonach die Form:

$$^1/_2\, V = c\,.\,R + \lambda\,.\,S,$$

da

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin\beta}{\sin\Gamma};\quad \frac{n}{\nu} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin(\gamma-\beta)}$$

so ist, wenn ich zur Vereinfachung der Schreibweise $\delta = \gamma - \beta$ setze,

$$R = \sin\frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \frac{1}{\nu}\frac{\cos^2\delta\,.\,\cos^2\Gamma}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\beta}\right]$$

$$S = \sin\Gamma + \frac{Z}{n}\frac{\cos^2\Gamma\,.\,\cos\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\beta\,.\,\cos\delta\,.\,\sin(\Gamma-\beta)} - \frac{1}{n}\frac{\cos^2\Gamma\sin\gamma}{\cos^2\beta\,.\,\cos\delta}$$

Ich werde nun noch den Ausdruck für S etwas vereinfachen.

Es ist

$$\sin\Gamma + \frac{Z}{n}\cdot\frac{\cos^2\Gamma\,.\,\cos\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\beta\,.\,\cos\delta\,\sin(\Gamma-\beta)} =$$

$$\sin\Gamma + \frac{\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\,.\,\sin\beta\cos\delta\,.\,\cos^2\Gamma}{\cos\beta\sin\delta\,.\,\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\sin^2\Gamma\cos\beta\sin\delta + \mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\beta\cos\delta\,.\,\cos^2\Gamma}{\cos\beta\sin\delta\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\sin^2\Gamma(\sin\gamma - \cos\delta\sin\beta) + \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\beta\,.\cos\delta\,.\cos^2\Gamma}{\cos\beta\,.\sin\delta\,.\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\beta\,.\sin\delta\,.\sin\Gamma}\left\{\sin^2\Gamma + \frac{\cos\delta\sin\beta\sin(\varepsilon-\gamma)}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$$

Nach diesen vorläufigen Entwicklungen kann ich den Factor von λ folgendermassen schreiben:

$$S = \frac{\sin\gamma}{\cos^2\beta\,.\sin\delta\,.\cos\delta\,.\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{c}\sin^2\Gamma\cos\beta\cos\delta - \cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta \\ + \dfrac{\cos^2\delta\,.\sin\beta\,.\cos\beta\,.\sin(\varepsilon-\gamma)}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\end{array}\right\}$$

Die ersten zwei Glieder des in der Klammer befindlichen Ausdruckes ergeben, wenn man $\cos\delta$ und $\sin\delta$ mittelst der Relation $\delta = \gamma - \beta$ als Functionen von γ und β ausdrückt:

$\cos\gamma(\sin^2\Gamma\cos^2\beta + \cos^2\Gamma\sin^2\beta) + \sin\gamma\sin\beta\cos\beta(\sin^2\Gamma - \cos^2\Gamma)$

oder

$\cos\gamma(\sin^2(\Gamma-\beta) + \sin 2\Gamma\sin\beta\cos\beta) - \sin\gamma\sin\beta\cos\beta\cos 2\Gamma,$

das ist

$$\cos\gamma\sin^2(\Gamma-\beta) - \sin\beta\cos\beta\sin(\varepsilon-\gamma).$$

Durch Hinzufügung des dritten Gliedes erhält man, da

$$\cos^2\frac{\varepsilon}{2} - \cos^2\delta = \sin(\Gamma-\beta)\sin(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} - \beta)$$

$$S = \frac{\sin\gamma\sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\beta\,.\sin\delta\,.\cos\delta\,.\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{c}\cos\gamma\sin(\Gamma-\beta) \\ \sin\beta\cos\beta\,.\sin(\varepsilon-\gamma)\sin(\gamma+\frac{\varepsilon}{2}-\beta) \\ - \dfrac{}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\end{array}\right\}$$

Da

$$R = \sin\frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \frac{1}{\nu}\frac{\cos^2\delta\cos^2\Gamma}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\beta}\right],$$

so erhält man V aus der Gleichung

$$V = \Sigma c\,.R + 2\lambda\,.S, \qquad 8$$

worin für R und S obige Ausdrücke einzusetzen sind. Vorstehende Gleichung lässt sofort erkennen, dass V, das ist die Grösse der Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen, unabhängig

ist von η, und in Folge dessen durch Entfernung des Prismensatzes von dem Ausgangspunkte der Strahlen nicht geändert wird. Die Gleichung 8) behält aber auch dann noch ihre Giltigkeit bei, wenn die Strahlen convergent auf das Prisma fallen, wie sofort daraus erhellt, dass der Gang der in Fig. 1) gezeichneten Strahlen genau derselbe bleiben würde, wenn das Licht den Prismensatz in umgekehrter Richtung durchlaufen würde, wenn also die einfallenden Strahlen durch LK, L_1K_1 dargestellt wären. Letztere Strahlen würden sich nicht mehr im Punkte P_1 schneiden, sondern im Punkte P; ihr Durchschnittspunkt wäre sonach wiederum in der Richtung der Lichtbewegung verschoben worden.

Um die bisherigen Entwicklungen an einem Beispiele zu illustriren, nehme ich an, dass das mittlere Prisma einen brechenden Winkel von 120° besitze und aus Flintglas Nr. 13 bestehe, während die beiden äusseren Prismen aus Glas von St. Gobin gefertigt seien. Die Brechungsexponenten dieser Glassorten sind für die nachbenannten Fraunhofer'schen Linien folgende:

	Flintglas Nr. 13 (ν)	Glas von St. Gobin (n)
B....	1·627749	1·586757
F....	1·648260	1·595808
H....	1·671062	1·604761

Es soll nun der Prismensatz für Licht von der Wellenlänge F gerade Durchsicht gewähren. Da $\varepsilon = 120°$ und der Einfallswinkel $\Gamma = \gamma - \frac{\varepsilon}{2}$ angenommen wurde, so muss γ den Werth besitzen:

$$\gamma = 69° 10' 53''74.$$

Es ist also

$$\Gamma = 9° 10' 53''74$$
$$\beta = 5 \quad 44 \quad 18\cdot84$$
$$\delta = 63 \quad 26 \quad 34\cdot90$$
$$R = +0\cdot452489$$
$$S = -0\cdot209754$$

Wenn nun die Länge jeder der beiden Seiten des mittleren Prisma's 20 Mm. beträgt, und für λ die Werthe 0·5 Mm. und 8·5 Mm. angenommen werden, so ergibt sich:

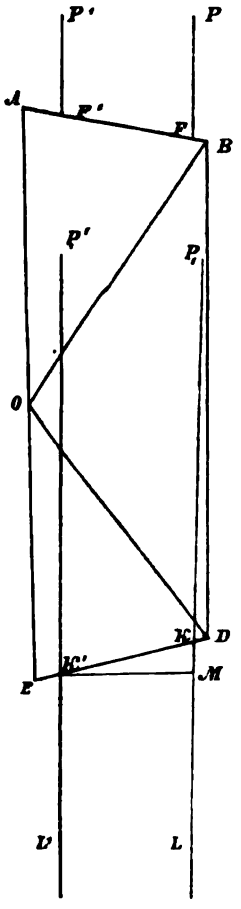
$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \lambda = 0{\cdot}5 \text{ Mm.} & V = 17{\cdot}8898 \text{ Mm.} \\ \text{für } \lambda = 8{\cdot}5 & V = 14{\cdot}5337 \end{array}\right\} c = 20 \text{ Mm.}$$

Einer Änderung von λ um 8 Mm. entspricht also eine Änderung der Verschiebung (ΔV) im Betrage von:

$$\Delta V = -3{\cdot}3561 \text{ Mm.}$$

In ähnlicher Weise bedingt eine Änderung von λ auch eine Änderung der Verschiebung des Vereinigungspunktes anders-färbiger Strahlen, für welche unter den angenommenen Verhältnissen keine gerade Durchsicht mehr existirt. Es seien P und P' zwei Punkte, welche sich in gleicher Entfernung von der den brechenden Winkel des mittleren Prisma's halbirenden Geraden befinden, und Licht von der Wellenlänge B unter dem Einfallswinkel Γ auf das Prisma senden. Der virtuelle Schnittpunkt der von P ausgehenden, bei F auf das Prisma fallenden und in der Richtung KL austretenden Strahles mit einem der Nachbarstrahlen sei P_1; P_1' sei in gleicher Weise dem Punkte P' conjugirt.

Fig. 2.



Da angenommen wurde, dass die Strahlen PF und $P'F'$ unter demselben Winkel Γ auf das Prisma fallen, so muss auch zwischen den austretenden Strahlen Parallelismus bestehen. Wenn ich den Austrittswinkel, den früheren Bezeichnungen conform, α' nenne und $K'M$ senkrecht zu KL ziehe, so ist auch

$$\sphericalangle KK'M = \alpha'$$

Es sei ferners

$$\begin{array}{ll} BF = \lambda; & BF' = \lambda'; \\ DK = \sigma; & DK' = \sigma'; \\ P_1K = l; & P_1'K' = l'; \\ OB = OD = c = 20 \text{ Mm.} & \end{array}$$

Ich kann nun die durch Änderung von λ bewirkte Änderung der Verschiebung die ich wieder mit ΔV bezeichnen will, ausdrücken in der Form:

$$\Delta V = l - l' + (\sigma' - \sigma)\sin\alpha'.$$

Zur numerischen Bestimmung dieser Grössen dienen die bereits entwickelten Gleichungen:

$$\xi_1 - r = (r_1 - w).n.\frac{\cos^2\beta.\sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\Gamma}$$

$$w = c\sin\frac{\varepsilon}{2} + \lambda\sin\Gamma$$

$$r = c\cos\frac{\varepsilon}{2} - \lambda\cos\Gamma$$

$$r - v_1 = \lambda.\frac{\sin\gamma\sin(\Gamma-\beta)}{\cos(\gamma-\beta)}$$

$$\xi_2 - v_1 = (\xi_1 - r_1)\frac{\nu}{n}.\frac{\cos^2\chi\sin(\chi-\frac{\varepsilon}{2})}{\cos^2(\gamma-\beta)\sin(\Gamma-\beta)}$$

$$v_1 - v_2 = 2v_1.\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}.\sin(\chi-\frac{\varepsilon}{2})}{\cos(\varepsilon-\chi)}$$

$$\xi_3 - r_2 = (\xi_2 - v_2)\frac{n}{\nu}\frac{\cos^2(\gamma-\beta')\sin(\beta'-\Gamma)}{\cos^2(\varepsilon-\chi)\sin(\chi-\frac{\varepsilon}{2})}$$

$$v_2 - v_3 = \sigma.\frac{\sin\gamma\sin(\beta'-\Gamma)}{\cos(\gamma-\beta')}$$

$$\xi_4 - v_3 = (\xi_3 - v_3)\frac{1}{n}.\frac{\cos^2\alpha'\sin(\alpha'-\Gamma)}{\cos^2\beta'\sin(\beta'-\Gamma)}$$

$$r_4 - w_3 = (\xi_4 - v_3).\operatorname{cotg}(\alpha'-\Gamma).$$

Zur Bestimmung der in vorstehenden Formeln vorkommenden Grösse σ dient die Gleichung

$$\sigma = \lambda.\frac{\cos\beta.\cos\chi.\cos(\gamma-\beta')}{\cos(\gamma-\beta).\cos(\varepsilon-\chi)\cos\beta'}$$
$$+c.\frac{\cos(\gamma-\beta')}{\cos\beta'}\left[1-\frac{\cos\chi}{\cos(\varepsilon-\chi)}\right],$$

welche man durch Elimination von OG und OJ (s. Fig. 1) aus folgenden Gleichungen erhält:

$$c - OG = BF \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)}$$

$$OJ = OG . \frac{\cos\chi}{\cos(\varepsilon - \chi)}$$

$$DK = (c - OJ) . \frac{\cos(\gamma - \beta')}{\cos\beta'}.$$

In diesen Gleichungen ist $BF = \lambda$ und $DK = \sigma$; die Grösse l erhält man nun aus der Gleichung

$$l^2 = (\eta_4 - w_3)^2 + (\xi_4 - v_3)^2$$

und ebenso

$$l'^2 = (\eta_4' - w_3')^2 + (\xi_4' - v_3')^2$$

worin $\eta_4' - w_3'$, $\xi_4' - v_3'$ die durch Ersetzung von λ durch λ' veränderten Werthe von $\eta_4 - w_3$, $\xi_4 - v_3$ darstellen.

Diese Formeln gelten in gleicher Weise auch für den Fall, dass die Punkte P, P' Licht von irgend einer anderen Wellenlänge aussenden. Im Folgenden gebe ich eine Zusammenstellung der numerischen Werthe von l, l', ΔV, sowie der wichtigsten zu deren Bestimmung dienenden Grössen, welche berechnet worden sind, unter der Annahme, dass Licht von der Wellenlänge der Linie B respective H unter dem Einfallswinkel Γ auf den Prismensatz von der früher beschriebenen Form und Zusammensetzung auftrifft und die Ordinate der Punkt P, P' 20 Mm. beträgt, während $\lambda = 0{\cdot}5$ Mm., $\lambda' = 8{\cdot}5$ Mm. gesetzt wurde.

$\eta = 20$ Mm.

	B	H
Γ	9°10'53"74	9°10'53"74
β	5 46 17·08	5 42 23·20
χ	60 39 30·42	59 13 53·44
β'	7 14 34·28	3 51 15·39
α'	11 32 23·74	6 11 33·28

		B	*H*
		mm	mm
$\lambda = 0{\cdot}5^{mm}$	v	9·506405	9·506405
	w	17·400290	17·400290
	$v - v_1$	0·062109	0·063435
	$v_1 - v_2$	0·368656	— 0·449210
	$v_2 - v_3$	— 0·058932	— 0·018756
	σ	0·876660	0·090219
	l	20·7145	17·8003
$\lambda' = 8{\cdot}5$	v'	1·608900	1·608900
	w'	18·676800	18·676800
	$v' - v'_1$	1·055860	1·078392
	$v'_1 - v'_2$	0·021588	— 0·025237
	$v'_2 - v'_3$	— 0·603650	— 1·642930
	σ'	8·979950	7·902572
	l'	24·3954	23·5982
	$(\sigma' - \sigma)\sin\alpha'$	1·6211	0·8427
	ΔV	—2·0598	—4·9552

Wenn $\eta = 30°$ angenommen wird, so ergibt sich für

	B	*H*
	mm	mm
l	30·8210	27·4721
l'	34·5017	33·2697
ΔV	— 2·0596	— 4·9549

Da für diese Lichtsorten nicht mehr gerade Durchsicht besteht, so wird auch ΔV nicht mehr vollständig unabhängig von η sein. Im vorliegenden Falle sind jedoch die Abweichungen der Werthe für ΔV von den obigen so klein, dass sie noch vollständig innerhalb der Unsicherheitsgrenze der angewandten 6stelligen logarithmischen Rechnung liegen. Vorstehendes Beispiel lässt ersehen, dass ΔV nicht unbeträchtliche Werthe annehmen kann.

Wie aus Gleichung 8) hervorgeht, hängt die Grösse der Verschiebung nicht nur von den Constanten des Prismensatzes, sondern auch von λ ab.

Da

$$\frac{\sin\Gamma}{\sin\beta} = n; \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\delta} = \frac{n}{\nu}$$

ist, und

$$0° < \gamma < 180°$$
$$0 < \varepsilon < 180$$
$$\gamma > \frac{\varepsilon}{2}$$

sein muss, so könnte S, das ist der Factor von λ, nur dann unendlich gross werden, wenn $\beta = 90°$ oder $\delta = 90°$ wäre. β und δ sind jedoch Brechungswinkel und müssen kleiner als 90° sein, damit die Strahlen das Prisma durchsetzen können. S kann sonach als eine durchaus endliche Grösse angesehen werden, und wird nur dann gleich Null, wenn entweder $\sin(\Gamma - \beta) = 0$, oder der in der Klammer befindliche Ausdruck seinem Werthe nach verschwindet.

Wenn aber $\sin(\Gamma - \beta) = 0$ also $\Gamma = \beta$ ist, so muss auch $n = \nu$ sein. Dieser Fall tritt ein, wenn entweder $n = \nu = 1$ oder der Hauptschnitt des gerade Durchsicht gewährenden Prismensatzes ein Rechteck darstellt.

Soll demnach ganz allgemein stets dieselbe Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen eintreten, gleichviel in welchem Punkte des Hauptschnittes die Mittellinie des Strahlenbüschels den Prismensatz trifft, so muss die Gleichung zu Recht bestehen

$$\cos\gamma \cos^2\frac{\varepsilon}{2} \sin(\Gamma - \beta) = \sin\beta . \cos\beta . \sin(\varepsilon - \gamma) \sin(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} - \beta) \quad 9)$$

Ich werde nun die Grösse der Verschiebung bestimmen unter der Voraussetzung, dass die Constanten des Prismensatzes solche Werthe besitzen, dass obige Gleichung erfüllt wird, der Factor von λ sonach der Null gleich wird. Da in diesem Falle

$$\sin\Gamma + \frac{Z}{n} \frac{\cos^2\Gamma \cos\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\beta . \cos\delta \sin(\Gamma - \beta)} - \frac{\cos^2\Gamma \sin\gamma}{n \cos^2\beta . \cos\delta} = 0$$

so folgt, dass

$$\frac{Z . \cos^2\Gamma \cos\frac{\varepsilon}{2}}{n \cos^2\beta . \sin(\Gamma - \beta)} =$$
$$\frac{\cos\delta}{\cos\beta} \left\{ \frac{\cos^2\Gamma \sin\gamma}{n . \cos^2\beta . \cos\delta} - \sin\Gamma \right\} =$$

$$\frac{\sin\beta\cos^2\Gamma\sin\gamma - \sin^2\Gamma.\cos^2\beta.\cos\delta}{\cos^3\beta.\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\sin\beta\cos^2\Gamma(\sin\delta\cos\beta + \cos\delta\sin\beta) - \sin^2\Gamma\cos^2\beta\cos\delta}{\cos^3\beta.\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\cos^2\Gamma\sin\beta.\cos\beta.\sin\delta - \cos\delta(\sin^2\Gamma\cos^2\beta - \cos^2\Gamma\sin^2\beta)}{\cos^3\beta.\sin\Gamma} =$$

$$\frac{\cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta}{\cos^2\beta.\sin\Gamma} - \frac{\cos\delta.\sin(\Gamma-\beta)\sin(\Gamma+\beta)}{\cos^3\beta.\sin\Gamma}$$

Nenne ich nun die Grösse der Verschiebung für diesen Fall V_0, so wird dieselbe, da

$$\tfrac{1}{2}V_0 = c\left\{\sin\frac{\varepsilon}{2} - \frac{Z\cos^2\Gamma\cos\frac{\varepsilon}{2}}{n\cos^2\beta.\sin(\Gamma-\beta)}\right\}$$

bestimmt durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}V_0 = c\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta}{\cos^2\beta.\sin\Gamma} \\ + \frac{\cos\delta\sin(\Gamma-\beta)\sin(\Gamma+\beta)}{\cos^3\beta.\sin\Gamma}\end{array}\right\}$$

Es ist aber $\sin\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\cos^2\Gamma\sin\beta\sin\delta}{\cos^2\beta\sin\Gamma} =$

$$\frac{1}{\cos^2\beta\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{l}\cos^2\beta\sin\Gamma(\sin\gamma\cos\Gamma - \cos\gamma\sin\Gamma) \\ -\sin\beta\cos^2\Gamma(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta)\end{array}\right\} =$$

$$\frac{1}{\cos^2\beta.\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{l}\sin\gamma\cos\Gamma\cos\beta(\sin\Gamma\cos\beta - \cos\Gamma\sin\beta) \\ -\cos\gamma(\sin^2\Gamma\cos^2\beta - \cos^2\Gamma\sin^2\beta)\end{array}\right\} =$$

$$\frac{\sin(\Gamma-\beta}{\cos^2\beta.\sin\Gamma}\{\sin\gamma\cos\Gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin(\Gamma+\beta)\}$$

Die Bestimmungsgleichung für V_0 erhält hiedurch folgende Gestalt:

$$\tfrac{1}{2}V_0 = \frac{c\sin-\beta\Gamma))}{\cos^2\beta\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{l}\sin\gamma\cos\Gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin(\Gamma+\beta) \\ + \frac{\cos\delta\sin(\Gamma+\beta)}{\cos\beta}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{c\sin\gamma.\sin(\Gamma-\beta)}{\cos^2\beta\sin\Gamma}\left\{\begin{array}{l}\cos\Gamma\cos\beta \\ + \frac{\sin\beta.\sin(\Gamma+\beta)}{\cos\beta}\end{array}\right\}$$

woraus man nach einfacher Reduction folgende Formel gewinnt:

$$V_0 = \frac{c \cdot \sin\gamma \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\beta} \{2\operatorname{cotg}\Gamma + \sin 2\beta\} \qquad 10)$$

Wenn also Gleichung 9) erfüllt ist, kann man die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen aus Gleichung 10) berechnen. Wenngleich die Änderungen von V, welche durch kleine Änderungen von λ hervorgerufen werden, im Allgemeinen nicht bedeutend sein werden, so können sie doch unter Umständen hinreichend gross sein, um die Deutlichkeit des Bildes eines monochromatisches Licht aussendenden Gegenstandes ungünstig zu beeinflussen. Von einem solchen Gegenstande würde z. B. das Objectiv eines Fernrohres ein Bild entwerfen, welches in einer zur Fernrohraxe senkrechten Ebene gelegen ist. Das vom Prismensatze gelieferte virtuelle Bild des reellen Fernrohrbildes kann nun letzterem nicht mehr parallel liegen, wenn die Constanten des Prismensatzes die Gleichung 9) nicht erfüllen, kann also auch nicht sich in einer zur Fernrohraxe senkrechten Ebene befinden, sondern muss mehr oder minder aus dieser Ebene herausgedreht erscheinen und zwar im Sinne der Drehung um eine zu den brechenden Prismenkanten parallele Axe. Bei der Betrachtung des Bildes durch ein stark vergrösserndes Ocular können daher auch nicht alle Theile des Bildes gleiche Schärfe bewahren. Wenn jedoch Gleichung 9) erfüllt ist, und mithin die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen durchaus constant wird, so kann das Fernrohrbild durch den Prismensatz betrachtet nur parallel zu sich selbst in der Richtung der Fernrohraxe verschoben erscheinen, und daher selbst bei bedeutender Ocularvergrösserung volle Schärfe bewahren.

Da Gleichung 9) nur drei von einander unabhängige Winkelgrössen, γ, ε, β enthält, mit Bezug auf γ jedoch vom zweiten, mit Bezug auf ε und β aber vom dritten Grade ist, so gestaltet sich die Auflösung der Gleichung am einfachsten, wenn ε und β als ihrem Werthe nach bekannt betrachtet werden dürfen. Wenn man nicht γ, sondern die mit δ bezeichnete Winkelgrösse $\gamma - \beta$ als Unbekannte ansieht, so gelangt man unter Berücksichtigung, dass den Bedingungen der Aufgabe gemäss $\delta < 90°$ sein muss, zu einer einfachen Beziehung zwischen ε und β, welche unter allen

Umständen statthaben muss, damit eine brauchbare Wurzel für δ existiren kann.

Da

$$\Gamma - \beta = \delta - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\gamma = \delta + \beta$$

so kann man Gleichung 9) folgende Form geben

$$\frac{\sin(\delta - \frac{\varepsilon}{2})}{\sin(\delta + \frac{\varepsilon}{2})} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sin(\varepsilon - \beta - \delta)}{\cos(\beta + \delta)}$$

Zum Zwecke der Bestimmung von δ kann man hieraus nachstehende Gleichung ableiten:

$$\operatorname{tg}\delta . \frac{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\frac{\varepsilon}{2} - \beta) - \sin\beta\cos\beta\sin(\frac{\varepsilon}{2} - \beta)}{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta . \cos^2(\frac{\varepsilon}{2} - \beta)} =$$

$$1 + \operatorname{cotg}\frac{\varepsilon}{2} . \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}^2(\frac{\varepsilon}{2} - \beta) . \operatorname{tg}^2\delta$$

Da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen eine unter allen Umständen positive Grösse darstellt, und $\operatorname{tg}\delta$ nicht negativ werden darf, so muss auch

$$\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\frac{\varepsilon}{2} - \beta) > \sin\beta\cos\beta\sin(\frac{\varepsilon}{2} - \beta)$$

sein, damit ein positiver Wurzelwerth für $\operatorname{tg}\delta$ möglich werde.

Wenn man aus gegebenen Glassorten einen Prismensatz construiren will, welcher die durch Gleichung 9) ausgedrückte Eigenthümlichkeit der Constanz der Verschiebung besitzen soll, so besteht die Aufgabe, aus den gegebenen Werthen von n und ν die entsprechenden Werthe von γ und ε zu bestimmen. Die Gleichungen, welche zur Lösung dieser Aufgabe dienen, sind folgende:

$$n\sin\beta = \sin(\gamma - \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\sin(\gamma - \beta) = \frac{\nu}{n}\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\sin(\gamma-\beta-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(\gamma-\beta+\frac{\varepsilon}{2})}\cdot\frac{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\beta.\cos\beta}=\sin\varepsilon-\cos\varepsilon.\operatorname{tg}\gamma \qquad 9)$$

Ich werde vorerst mittelst der ersten zwei Gleichungen die Winkel γ und β als Functionen von n, ν, $\frac{\varepsilon}{2}$ ausdrücken.

$$\operatorname{tg}(\gamma-\beta)=\frac{\nu\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{n^2-(\nu^2-n^2)\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}}$$

Da der Winkel $\gamma-\beta$ im ersten Quadranten liegen muss, so ist die Wurzelgrösse in vorstehender Gleichung stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Diese Wurzelgrösse sei mit dem Buchstaben y bezeichnet, also

$$y=+\sqrt{n^2-(\nu^2-n^2)\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

y ist demnach als eine wesentlich positive Grösse anzusehen. Es ist ferner

$$\cos(\gamma-\beta)=\frac{1}{n}.y\cos\frac{\varepsilon}{2}=\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta$$

$$\sin(\gamma-\beta)=\frac{\nu}{n}\sin\frac{\varepsilon}{2}=\sin\gamma\cos\beta-\cos\gamma\sin\beta$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{1}{n}.y\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\gamma-\frac{\nu}{n}\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\gamma=\sin\beta$$

Da aber auch

$$\sin\beta=\frac{1}{n}\sin(\gamma-\frac{\varepsilon}{2})$$

so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{(\nu-1)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y-1}$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit der folgenden

$$\operatorname{tg}(\gamma-\beta)=\frac{\nu\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}$$

erhält man

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(\nu - y)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\nu(\nu-1)\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} + y^2 - y}$$

Da aber

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{n^2-y^2}{\nu^2-n^2}$$

so lässt sich der Ausdruck für $\operatorname{tg}\beta$ durch Division mit $(\nu - y)$ in folgenden umgestalten:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(\nu^2-n^2)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{n^2(\nu+y) - \nu y - n^2}$$

Es ist daher

$$\frac{1}{\sin\beta\,.\cos\beta\,.\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$\frac{[n^2(\nu+y)-\nu y-n^2]^2+(\nu^2-n^2)^2\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}{(\nu^2-n^2)[n^2(\nu+y)-\nu y-n^2]\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$\frac{[n^2(\nu+y)-\nu y-n^2]^2+(\nu^2-n^2)(n^2-y^2)}{[n^2(\nu+y)-\nu y-n^2](n^2-y^2)} =$$

$$\frac{n^2[n^2(\nu+y)^2-2(\nu+y)(n^2+\nu y)+(\nu+y)^2]}{[n^2(\nu+y)-\nu y-n^2](n^2-y^2)}.$$

oder

$$\frac{1}{(\nu+y)\sin\beta\,.\cos\beta\,.\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{n^2[(n^2+1)(\nu+y)-2\nu y-2n^2]}{[n^2(\nu+y)-\nu y-n^2](n^2-y^2)} \quad 11)$$

Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen lässt sich aber auch durch Transformation der Gleichung 9) als Function von y und den beiden Brechungsexponenten darstellen. Unter Berücksichtigung der Relation

$$\operatorname{tg}(\gamma-\beta) = \frac{\nu\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}$$

erhält man nämlich aus Gleichung 9)

$$\frac{\frac{\nu \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}\cos\frac{\varepsilon}{2} - \sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\nu \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y}\cos\frac{\varepsilon}{2} + \sin\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\beta\,.\cos\beta} =$$

$$2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} - \left(\cos^2\frac{\varepsilon}{2} - \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\gamma$$

oder

$$\frac{\nu - y}{\nu + y} \cdot \frac{1}{\sin\beta\,.\cos\beta} = 2\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} - \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\gamma$$

da

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{(\nu-1)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y-1}$$

so lässt sich obige Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{1}{(\nu+y)\sin\beta\,.\cos\beta\,.\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$\frac{1}{\nu - y}\left\{2 - \frac{(\nu-1)(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2})}{y-1}\right\}$$

Es ist aber

$$1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\nu^2 - 2n^2 + y^2}{\nu^2 - n^2}$$

und daher

$$\frac{1}{(\nu+y)\sin\beta\,.\cos\beta\,.\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$\frac{1}{(\nu-y)(y-1)(\nu^2-n^2)}\{2(y-1)(\nu^2-n^2) - (\nu-1)(\nu^2-2n^2+y^2)\} =$$

$$\frac{1}{(y-1)(\nu^2-n^2)}\{2n^2 - \nu - \nu^2 + (\nu-1)y\}$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung 11) gelangt man sonach zu folgender Gleichung:

$$\frac{n^2[(n^2+1)(\nu+y) - 2\nu y - 2n^2]}{[n^2(\nu+y) - \nu y - n^2](n^2-y^2)} =$$

$$\frac{2n^2 - \nu - \nu^2 + (\nu-1)y}{(y-1)(\nu^2-n^2)}$$

Diese Gleichung ist mit Bezug auf y vom vierten Grade, und lautet, wenn zur Abkürzung

$$\frac{n^2-\nu}{\nu-1} = a$$

$$\frac{\nu^2-n^2}{n^2-\nu} = b$$

gesetzt wird, in entwickelter Form wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} y^4+(2a+b)\,y^3-n^2b(2-a)y^2 \\ -n^2(2\nu-n^2b)y-n^2\nu a = 0 \end{array}\right\} \quad 12)$$

Wenn demnach die Brechungsexponenten der beiden Glassorten, aus welchen ein dreigliedriger Prismensatz mit gerader Durchsicht und constanter Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen hergestellt werden soll, ihrem Werthe nach gegeben sind, so kann man durch Auflösung vorstehender Gleichung leicht den Werth von y finden, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet. Dieser Werth von y muss nämlich reell und positiv sein, und innerhalb der Grenzen o und n liegen, also

$$o \leqq y \leqq n$$

Es ist nämlich

$$y = +\sqrt{n^2-(\nu^2-n^2)\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

und

$$\nu > n$$

Nachdem die Brechungsexponenten der verschiedenen Glassorten so beschaffen sind, dass stets $n^2 > \nu$ also a positiv ist, so kann Gleichung 12) der Natur des Problems entsprechend nur eine einzige reelle, positive Wurzel besitzen, nach deren Auffindung man die Constanten des Prismensatzes durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = +\sqrt{\frac{n^2-y^2}{\nu^2-n^2}}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{(\nu-1)\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{y-1}$$

eindeutig bestimmt erhält.

Die durch den Prismensatz hervorgebrachte Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen ist sodann gegeben durch die Formel:

$$V_0 = \frac{c \cdot \sin\gamma \sin(\Gamma - \beta)}{\cos^3\beta} \{2\operatorname{cotg}\Gamma + \sin 2\beta\}$$

Dass Gleichung 12) zum mindesten eine zwischen den Grenzen o und n gelegene reelle Wurzel besitzen muss, ergibt sich sofort aus den Ausdrücken, auf welche sich die Function

$$f(y) = y^4 + (2a+b)y^3 - n^2b(2-a)y^2 - n^2(2\nu - n^2b)y - n^2\nu a$$

reducirt, wenn für y der Reihe nach die Werthe $0, 1, n, \nu$ eingesetzt werden. Man erhält nämlich:

$$f(0) = -n^2\nu \cdot \frac{n^2-\nu}{\nu-1}$$

$$f(1) = \frac{\nu(n^2-1)^2(\nu^2+1-2n^2)}{(n^2-\nu)(\nu-1)}$$

$$f(n) = \frac{n^2(\nu^2-n^2)(\nu+n)(n-1)^2}{(n^2-\nu)(\nu-1)}$$

$$f(\nu) = \frac{2\nu^2(n^2-1)(\nu^2-n^2)}{\nu-1}$$

Da nun $\begin{matrix} n > 1 \\ \nu > n \end{matrix}$ sein müssen, so wird

$$\text{für } n^2 > \nu \quad \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(n) > 0 \\ f(\nu) > 0 \end{cases}$$

Ob diese Wurzel zwischen 0 und 1 oder zwischen 1 und n liegt, hängt davon ab, ob der Ausdruck $\nu^2 + 1 - 2n^2$ einen positiven oder negativen Werth besitzt. Für die gebräuchlichen Glassorten fällt dieser Werth durchwegs negativ aus, so dass also die Wurzel zwischen 1 und n liegen wird.

Für $n^2 = \nu$ wird

$$y = 0$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}$$

$$\Gamma = 90°$$

Es lässt sich in diesem Falle also kein Prisma construiren.

$$\text{für } n^2 < \nu \text{ wird } \begin{cases} f(0) > 0 \\ f(n) < 0 \\ f(\nu) > 0 \end{cases}$$

Gleichung 12) hätte sonach zwei positive Wurzeln, doch ist wenigstens bei Glassorten n^2 nie kleiner als ν.

Folgende Tafel gibt mit den Argumenten ν und n die Grösse y, sowie die daraus abgeleiteten brechenden Winkel, welche demnach die einen Prismensatz von gerader Durchsicht constituirenden Prismen besitzen müssen, damit Gleichung 12) erfüllt sei.

		$\nu = 1{\cdot}8$	$\nu = 1{\cdot}7$	$\nu = 1{\cdot}6$
$n = 1{\cdot}7$	y	1·66028		
	$\frac{\varepsilon}{2}$	31°41'44"		
	γ	36 48 11		
$n = 1{\cdot}6$	y	1·51457	1·56504	
	$\frac{\varepsilon}{2}$	32° 1'38"	30° 4'27"	
	γ	44 12 6	35 39 19	
$n = 1{\cdot}5$	y	1·31848	1·42097	1·46970
	$\frac{\varepsilon}{2}$	35°42'42"	30°59'17"	28°18'45"
	γ	61 1 24	44 57 41	34 32 4

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass Prismensätze deren Constanten Gleichung 12) erfüllen, keine bedeutende Dispersion besitzen können. Ein Prismensatz, aus den früher erwähnten Glassorten, (Flintglas Nr. 13, Glas von St. Gobin) bestehend, müsste, um für Licht von der Wellenlänge F gerade Durchsicht und constante Verschiebung zu gewähren, den Brechungsexponenten

$$\nu = 1{\cdot}648260$$
$$n = 1{\cdot}595808$$

entsprechend, folgende brechende Winkel besitzen:

$$\frac{\varepsilon}{2} = 29°17'19'47$$

$$\gamma = 32\ \ 7\ 54{\cdot}30$$

Hieraus folgt:

$$\Gamma = 2°50'34'83$$

$$\beta = 1\ 46\ 51{\cdot}97$$

Bezeichne ich die Dispersion innerhalb der Grenzen von B und H mit D, so ergibt sich aus der Dispersionsformel:

$$\frac{1}{2}\cos\Gamma.\cos(\gamma-\beta).D = \cos\beta.\sin\frac{\varepsilon}{2}.d\nu - \sin\gamma.dn$$

da

$$d\nu = \nu_H - \nu_B = 0{\cdot}043313$$

$$dn = n_H - n_B = 0{\cdot}018004$$

für D der Werth

$$D = 1°32'34'$$

welcher mit dem durch directe Rechnung abgeleiteten (1°32'35') fast vollständig übereinstimmt.

Beträgt die Länge der Seiten des mittleren Prisma's wieder 20 Mm., so folgt aus Formel 10)

$$V_0 = 7{\cdot}9632^{mm}$$

Für Licht von anderer Wellenlänge als F verschwindet auch in diesem Falle die Grösse ΔV nicht mehr vollständig, erreicht aber, wie aus folgendem ersichtlich wird, nur kleine Werthe;

$r_1 = 20$ Mm.

$\lambda = 0{\cdot}5^{mm}$	B	H
Γ	2°50'34'83	2°50'34'83
α'	3 32 8·30	1 59 33·09
v	$16{\cdot}943920^{mm}$	$16{\cdot}943920^{mm}$
w	9·809022	9·809022
σ	0·571742	0·415044
l	22·0379	21·6214

		B	*H*
$\lambda' = 8{\cdot}5$	v'	8·953768	8·953768
	w'	10·205817	10·205817
	σ'	8·576191	8·408624
	l'	22·3757	22·0887
$(\sigma'-\sigma)\sin\alpha'$		0·4936	0·2779
ΔV		+0·1558	−0·1894

Ebenso wie in dem früheren Beispiele hat auch hier eine Änderung von η fast gar keinen Einfluss auf den Werth der Grösse ΔV.

Über den Gebrauch des siedenden Sauerstoffs, Stickstoffs, Kohlenoxyds, sowie der atmosphärischen Luft als Kältemittel.

(Mit 1 Tafel.)

Von **Sigmund v. Wroblewski.**

Die Verflüssigung der sogenannten permanenten Gase und die genaue Ermittlung der Verflüssigungsbedingungen hat die Darstellung dieser Gase als Flüssigkeiten in grösseren Mengen und ihre Benützung als Kältemittel möglich gemacht. Hiemit war auch die Möglichkeit geboten, die Temperaturerniedrigungen hervorzubringen, die alle bis jetzt erreichbaren Kältegrade bei weitem übertreffen, uns zu dem Temperaturminimum, welches mit den irdischen Stoffen überhaupt zu erreichen ist, führen und uns nur unweit von dem absoluten Nullpunkt stehen lassen.

In der vorliegenden Abhandlung will ich einen Theil der Methoden der Darstellung und Benützung dieses Kältemittels so vollständig beschreiben, dass Jeder im Stande sein wird, diese Versuche nachzumachen und sich dieser neuen Kältequelle zu bedienen. Ich thue es nicht etwa desshalb, weil ich der Meinung wäre, den Gegenstand vollständig erschöpft zu haben. Ich zeige vielmehr im §. 9 die neuen Wege, auf welchen ich diese Untersuchungen weiter führen will. Die hier mitzutheilenden Methoden bilden aber ein bereits so weit ausgearbeitetes und in sich selbst abgeschlossenes Ganzes, dass obgleich sie permanente Gase als Flüssigkeiten nicht literweise — wie man es vielleicht erwartet hat — liefern, in einer Unzahl von Fällen die praktische Anwendung dieses Kältemittels und gleichzeitig die Untersuchung einer unabsehbar grossen Anzahl von physikalischen und chemischen Problemen bei ganz neuen Bedingungen gestatten.

Gleichzeitig gebe ich eine neue Methode an, mit welcher die niedrigen Temperaturen zu messen sind.

§. 1.

Allgemeine Bemerkungen über das Giessen der verflüssigten Gase.

Ich beginne mit einigen Bemerkungen über das Giessen der verflüssigten Gase im Allgemeinen und des Äthylens insbesondere, da die Erscheinungen, die hier auftreten, massgebend für die in dieser Abhandlung mitzutheilenden Methoden sind. Es versteht sich von selbst, dass diese Betrachtungen nur für Gase gelten, welche beim Uebergange aus dem Recipienten,[1] in welchem sie flüssig gehalten werden, unter den atmosphärischen Druck, nicht erstarren.

Soll ein verflüssigtes Gas als Kältemittel benützt werden und sollen die Vorgänge in dem mit Hilfe dieses Gases abzukühlenden Apparate direct mit dem Auge verfolgt werden, so muss dieser Apparat in einem Glasgefäss sich befinden, in welches auch das verflüssigte Gas als Kältemittel hineinkommt. Dies bedingt schon eine gewisse Beschränkung der Aufgabe, da man dem Glasgefässe nicht eine beliebige Grösse geben kann. Je breiter das Gefäss ist, desto grösser ist die Gefahr des Zerspringens beim Giessen des Gases in Folge der ungleichmässigen Abkühlung des Glases. Ausserdem vergast in diesem Falle der aus dem Recipienten austretende Strahl des verflüssigten Gases, ehe er die Wand des Gefässes erreicht, auf welcher er herunterfliessen kann.

Die bequemste Form für das Gefäss, welches das verflüssigte Gas als Kältemittel aufnehmen soll, ist die Form eines breiten Reagensgläschens.[2]

---

[1] Der Kürze wegen werde ich hier immer unter dem Recipienten die Condensationsflasche von der Natterer'schen Pumpe verstehen, in welcher Gase wie Kohlensäure, Stickstoffoxydul und Äthylen flüssig gemacht und im flüssigen Zustand gehalten werden können.

[2] In der Fig. 1 ist ein solches Gefäss *a* schematisch dargestellt, *b* ist das Kupferröhrchen, welches von dem das flüssige Gas enthaltenden Recipienten ausgeht, *c* ist eine feine seitlich angebrachte Öffnung, durch welche der flüssige Strahl heraustritt. Der Kautschukpfropfen *d* mit der Öffnung *e* ist punktirt angegeben.

Die Menge des Gases, welche aus dem eine bestimmte Menge Flüssigkeit enthaltenden Recipienten in ein solches Gefäss hineingegossen werden kann, hängt in erster Linie von der Temperatur ab, bis auf welche das verflüssigte Gas in diesem Recipienten abgekühlt ist. Je mehr diese Abkühlung sich der Temperatur nähert, welche das verflüssigte Gas beim Heraustreten aus dem Recipienten unter dem atmosphärischen Druck annimmt, desto grösser ist die Menge, welche in das Gefäss hineingegossen werden kann. Anderseits hängt diese Menge wesentlich von der Form und der Tiefe des Gefässes, sowie von dem Umstande ab, ob das Gefäss oben mehr oder weniger offen ist.

Von dem Nachtheil einer zu grossen Breite war schon die Rede. Ist das Gefäss zu eng, so wird die an seinem Boden sich sammelnde Flüssigkeit durch den spiralförmig an der Wand herunterfliessenden Strahl herausgeblasen und dies geschieht auch in dem Falle, wenn der aus dem Recipienten heraustretende Strahl annähernd senkrecht auf die Wand des Gefässes gerichtet ist. Für Versuche mit dem Äthylen ist die beste Breite 5 bis 6 Ctm. Je tiefer das Gefäss, desto weniger Flüssigkeit wird durch das Herausblasen verloren. Die im Gefäss sich sammelnde Flüssigkeit kann aber ein gewisses Niveau nicht übersteigen. Kommt nämlich das Niveau des hineingegossenen Gases in die Distanz von einigen Centimetern von der Öffnung, aus welcher der flüssige Strahl austritt, so wird jede weiter hinzukommende Flüssigkeit herausgeblasen.

Einen sehr wesentlichen Einfluss hat der Umstand, ob das Gefäss oben ganz oder nur theilweise offen ist. Bleibt das Gefäss oben offen, so ist der Flüssigkeitsverlust beim Giessen in Folge der Vergasung und des Herausblasens sehr gross. Ist das Gefäss durch einen mit einem Loch versehenen Kautschukpropfen verschlossen, so ist der Verlust schon geringer. Muss aber das aus der Flüssigkeit entstehende Gas noch durch eine ein paar Meter lange Bleiröhre hindurchgehen, ehe es in die Atmosphäre kommt, so erreicht der Verlust sein Minimum, da in diesem Falle der flüssige Strahl beim Heraustreten aus dem Recipienten unter einem etwas grösseren Druck als der atmosphärische sich befindet.

Auch die Geschwindigkeit, mit welcher der flüssige Strahl aus dem Recipienten heraustritt, ist hier nicht ohne Einfluss, da bei zu geringer Geschwindigkeit die Gefahr der Vergasung, bei zu grosser die Gefahr des Herausblasenwerdens eintritt. Diese Geschwindigkeit muss durch das Drehen der Ablassschraube im Recipienten regulirt werden und dies lässt sich nur dann erfolgreich machen, wenn man den heraustretenden Strahl sieht. Aus diesem Grunde ist es fast unmöglich, das verflüssigte Gas in ein Metallgefäss hineinzugiessen und dieser Umstand bildet eine von den Haupteinschränkungen der Methode.

Gehen wir jetzt zu den sogenannten permanenten Gasen, das heisst zu Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd und atmosphärische Luft über, so ist ihre Darstellung im flüssigen Zustande fest an die Benützung des Äthylens als Kältemittel gebunden. Obgleich Raoul Pictet den Sauerstoff in den Zustand einer statischen Flüssigkeit mit Hilfe der im Vacuum verdampfenden Kohlensäure gebracht hat,[1] so wird man doch dazu immer das Äthylen vorziehen, einmal weil man mit diesem Gase bei weitem niedrigere Temperaturen als mit der Kohlensäure erzielt und folglich die Verflüssigung des Sauerstoffes unter bedeutend niedrigerem Drucke zu Stande bringt und zweitens, weil die Verflüssigung der anderen permanenten Gase mittelst der Kohlensäure unmöglich ist.

Es wird mithin durch die Bedingungen, unter welchen allein das Hineingiessen des Äthylens in ein Glasgefäss möglich ist, die Menge eines permanenten Gases, welche verflüssigt werden kann, erheblich eingeschränkt.

Anderseits hat der Versuch ergeben, dass wenn die Verflüssigung eines permanenten Gases in einer Glasröhre stattfindet, welche von dem unter der Wirkung der Luftpumpe siedenden Äthylen abgekühlt ist, die Säule des flüssigen Gases das Niveau des Äthylens nie mehr als ein paar Centimenter überragen kann. Der Grund dieser Erscheinung liegt darin, dass während der

[1] Vrgl. meine Bemerkungen über R. Pictet's Versuche in Wied. Ann. 20. p. 868—870, 1883, auch in Ann. de chim. et de phys. (6) 2, p. 320—321, 1884. Das Verdampfen der Kohlensäure im Vacuum hat vor ein paar Monaten Dewar zur Verflüssigung des Sauerstoffes erfolgreich angewendet. Vergl. phil. Mag. (5) 18, p. 210, 1884.

Theil der Glasröhre, welcher in dem Äthylen eingetaucht ist, die Temperatur des Äthylens hat, der oberhalb dieser Flüssigkeit befindliche Theil in dem Grade höhere Temperatur aufweist, in welchem man sich von der Oberfläche des Äthylens entfernt. In der Distanz von einem paar Centimeter hat die Röhre bereits die Temperatur, welche für das verflüssigte Gas die kritische ist und über diese Stelle steigt die Säule des verflüssigten Gases nicht empor.

Wenn man dabei noch berücksichtigt, dass etwa ein Drittel des Äthylens mittelst der Luftpumpe verdampft werden muss, ehe die Verflüssigung eines permanenten Gases beginnt, so kommt man zur Überzeugung, dass die verflüssigbare Gasmenge keine sehr grosse ist und dass bei der auf diesem Wege erzielten Verflüssigung keine Rede vom Übergiessen der permanenten Gase aus einem Apparate in den andern sein kann. Denn man ist nicht im Stande, mit der verflüssigten Gasmenge erst Zuleitungsröhren und den Apparat, in welchen das betreffende Gas als Kältemittel gelangen soll, abzukühlen und dann noch eine hinreichende Menge vom flüssigen Gase hineinzugiessen.

Aus diesem Grunde wurde folgender Weg[1] gewählt: Der Sauerstoff oder ein anderes permanentes Gas soll in das Gefäss, in welchem es als Kältemittel benützt wird, nicht hineingegossen, sondern erst in ihm verflüssigt werden. Dadurch kommen alle Ausgaben für die Abkühlung des Apparates, in welchem er eingeschlossen ist, in Wegfall. Dafür aber wird der Massstab des Versuches in hohem Grade eingeschränkt. Da die Verflüssigung der permanenten Gase bei der Benützung des Äthylens als Kältemittel erst bei ziemlich hohen Drucken stattfindet, so ist es unmöglich, sehr breite Glasröhren zu nehmen, weil sie bei diesen Drucken nicht fest genug wären. Daraus folgt die Nothwendigkeit, die Verflüssigung der permanenten Gase bei möglichst niedriger Temperatur und demzufolge bei möglichst niedrigem Druck zu bewerkstelligen, damit die Glasröhre möglichst breit und die verflüssigte Gasmenge möglichst gross ist.

---

[1] v. Wroblewski, Compt. rend. 97, p. 1553. 1883.

§. 2.

Eintheilung der Aufgabe. Das Comprimiren, Reinigen und Aufbewahren der comprimirten Gase.

Die Darstellung der permanenten Gase als Flüssigkeiten in grösseren Mengen zerfällt in drei Aufgaben: 1. die Comprimirung und Aufbewahrung des comprimirten Gases, welches nachher in den erforderlichen Quantitäten unter dem Verflüssigungsdruck in die Verflüssigungsapparate geführt wird; 2. die Verflüssigung des so comprimirten Gases durch die Erniedrigung seiner Temperatur und 3. die Überführung des so verflüssigten Gases unter den atmosphärischen Druck.

Die Erledigung der ersten Aufgabe setzt eine gute Compressionspumpe voraus. Als solche benütze ich die vom Mechaniker A. Schultz in Wien construirte Natterer'sche Pumpe. Bei der neuesten im verflossenen Sommer zu Stande gebrachten Construction sind alle im Laufe der letzten Zeit gemachten Erfahrungen berücksichtigt worden. Mit dem für mich vorzüglich ausgeführten Exemplar, welches speciell zum Motorbetrieb und für hohe Drucke eingerichet ist, hat Herr Schultz, indem er einen etwas mit Wasser benetzten Asbestkolben benützte, die Luft in einer auf 300 Atmosphären geprüften Stahlflasche bis auf den Druck von circa 280 Atmosphären gebracht.[1] Mein Assistent, Herr Kosminski, brachte wiederholt den Wasserstoff bei der Benützung des Knochenöls als Schmieröl bis auf den Druck von über 200 Atmosphären.

Bei den alten Natterer'schen Pumpen hatte der Kolben eine Lederkappe, welche fest an die Wände des Kolbencylinders andrückt. Dieser Umstand führte zu grossen Unannehmlichkeiten, besonders beim Comprimiren des Sauerstoffes. War nämlich die Lederkappe mit Öl befeuchtet, so folgte bei höherem Drucke bei jedem Pumpenschlag eine kleine Explosion, da die Öldämpfe sich in dem comprimirten Sauerstoff entzündeten. Ich musste desshalb

[1] Da das Ventil der Pumpe aus Metall ist, so ist es keine leichte Aufgabe, zu bewirken, dass es einen solchen Druck aushält. Der Ventilkegel muss während des Versuches wiederholt mit fein gesiebtem, gestossenem Bimsstein nachgeschliffen werden.

fast ganz trockene Lederkappen nehmen, wobei ihre Abnützung so rasch war — sie waren ganz schwarz und zerplatzten schliesslich — dass man oft 6 bis 7mal die Lederkappe wechseln musste, wenn der Sauerstoff auf den Druck von 120 Atmosphären gebracht werden sollte.

Die Ersetzung der Lederkappe durch den Asbest erwies sich als sehr vortheilhaft und hat die Arbeit wesentlich erleichtert. Der gut eingerichtete Asbestkolben hält sehr hohe Drucke aus. Ist er undicht geworden, so wird die kleine Mutter, welche den Astbest zusammenpresst, etwas losgeschraubt, ein wenig Astbest dazugewickelt und die Mutter nach und nach etwas fester nachgeschraubt. Der Kolben wird sehr wenig mit Knochenöl befeuchtet, beim Sauerstoffcomprimiren fast trocken gehalten.

Die Pumpe wird mittelst einer Transmission durch einen zweipferdigen Gasmotor in Gang gehalten. Für gewöhnlich macht der Kolben 60 bis 65 Hin- und Herbewegungen in einer Minute, beim Comprimiren des Sauerstoffs 45. Der Cylinder der Pumpe ist kurz. Die Hubhöhe beträgt nur 29 Ctm.[1]

Zur Aufbewahrung der comprimirten Gase dient folgender nach meinen Angaben durch Herrn Schultz construirter Apparat: *a* und *b* (Fig. 2) sind zwei eiserne auf 150 Atmosphären Druck geprüfte Compressionsflaschen von der Natterer'schen Pumpe, eine jede von circa 600 CC. Inhalt. Jede Flasche hat ausser dem gewöhnlichen Schraubenhahn *ef* noch einen anderen an den Boden der Flasche angebrachten *cd*. Beide Flaschen sind mit dem abschraubbaren Kopfstück nach unten gekehrt und mittelst des Kupferrohres *gg* mit einander und mit dem Metallmanometer *h* verbunden. Sie sind mit Hilfe einer Metallleiste *i* in einem starken Kasten von Zinkblech *k* befestigt. Der Boden des Kastens ist mit zwei sechskantigen Öffnungen versehen, in welche die gleichfalls sechskantig geformten Kopfstücke der Flaschen hineingehen. Soll das Comprimiren des Gases bei niedriger Temperatur vorgenommen werden, so kann der Boden

[1] Die Pumpe dient auch zum Verflüssigen des Äthylens. Um etwa 270 Grm. zu verflüssigen, braucht man zwei Stunden. Die Condensationsflaschen werden nicht direct an den Pumpenkopf angeschraubt, sondern mittelst einer Kupferröhre, deren Abzweigung zu einem Manometer führt, mit der Pumpe verbunden.

durch entsprechend geformte Lederstücke wasserdicht gemacht und dann der ganze Kasten mit Eis gefüllt werden. *l* ist ein kupfernes, etwa 3 Meter langes Rohr, welches zu der Natterer'schen Pumpe führt. Die Flaschen können mittelst der Schraubenhähne *cdef* sowohl von der Pumpe wie von einander und von dem Manometer getrennt werden. Der ganze Apparat lässt sich mit grösster Leichtigkeit in einzelne Theile auseinandernehmen. Als Material zur Dichtmachung dient überall Blei.

Der Schraubenhahn *e* ist mittelst der Kupferröhre *m* mit dem Stahlstück *n* verbunden, welches das Innere des Compressionsapparates sowohl mit dem Apparate, in welchem das permanente Gas verflüssigt wird, wie mit einem Luftmanometer *o* in Verbindung zu setzen gestattet.[1] Der Schraubenhahn *p* dient zum Absperren des Manometers. Damit das Stahlstück *n* unbeweglich bleibt, wird es mittelst einer eisernen Stange *q* an den Tisch fest angeschraubt.

In die erste Flasche *a* wird das Gas nur bis zu dem Verflüssigungsdruck gepumpt, welcher für alle permanenten Gase — mit Ausschluss des Wasserstoffes — nicht grösser als 40 Atmosphären zu sein braucht. In der zweiten Flasche *b*, welche als Vorrathsflasche für die erstere dient, wird das Gas bis zu dem Drucke von 100 bis 120 Atmosphären comprimirt.[2]

Atmosphärische Luft und Sauerstoff und besonders der letztere, wenn sie so comprimirt werden, enthalten Spuren von Kohlensäure und Wasserdampf, welche beim langsamen Verbrennen der Öldämpfe während des Pumpens entstehen. Soll der Sauerstoff zur Abkühlung der Gegenstände, die durchsichtig bleiben müssen, wie zum Beispiel Glasröhren, benützt werden, so ist die Anwesenheit der Kohlensäure sehr störend, da beim raschen Verdampfen des flüssigen Sauerstoffes auf den abzukühlenden Gegenständen ein undurchsichtiger fester Niederschlag sich bildet. Das Gas muss desshalb noch nach der Compression gereinigt werden. Dies erreiche ich dadurch, dass ich in jede von den Flaschen *a* und *b* ein kleines cylindrisches mit Ätzkali

[1] In der Figur ist nur das Zuleitungsrohr zum Manometer angegeben.

[2] Will man mit sehr grossen Gasmengen operiren, so wird noch eine dritte Flasche als Reserve — in der Figur nicht angegeben — genommen. Für gewöhnliche Versuche reichen aber zwei Flaschen vollständig aus.

und Chlorcalcium gefülltes Gefäss aus Drahtnetz hineinlege und das Gas erst mehrere Stunden nach der Compression zu den Versuchen benütze.

§. 3.

Temperaturen, die man mit Hilfe des Äthylens hervorbringt.

Aus dem Vorhergehenden ist es klar, dass die ganze Frage sich jetzt um die Erniedrigung der Siedetemperatur des Äthylens dreht. Bei den Versuchen, welche ich in der Abhandlung „Über die Verflüssigung des Sauerstoffs, Stickstoffs und Kohlenoxyds“ [1] beschrieben habe, diente eine alte nach dem Princip Bianchi's construirte Luftpumpe, die ich bei der Übernahme des physikalischen Instituts in Krakau in der Sammlung vorfand. Mit dieser Pumpe, wenn sie nur mit dem Manometer verbunden war, konnte man im besten Falle die Verdünnung von 1 Ctm. Quecksilberdruck erreichen. Verdampfte man das Äthylen, so blieb noch immer die Dampfspannung von 2·5 bis 3 Ctm. übrig. Über diese Grenze war unmöglich hinauszukommen, wenn man auch der Pumpe 60 bis 80 Umdrehungen in der Minute gab. Die Temperatur, welche dann das Äthylen zeigte, war — wie man weiss — 136° C.

Verglich man dieses Ergebniss mit den von Pictet bei seinen Versuchen erzielten Resultaten, so musste man beim ersten Augenblicke darüber erstaunt sein, dass Pictet durch Verdampfen der Kohlensäure und des Stickstoffoxyduls eine fast gleiche Temperaturerniedrigung hervorzubringen im Stande war, obgleich die von ihm benützten Gase viel leichter als das Äthylen zu verflüssigen sind und folglich beim Verdampfen eine viel geringere Kälte geben können. Bei den Pictet'schen Versuchen betrug aber die Dampfspannung der Kohlensäure und des Stickstoffoxyduls nur 0·8 bis 1·2 Ctm.[2] Danach konnte man erwarten, dass die Siedetemperatur des Äthylens bei weitem tiefer werde herunter sinken müssen, wenn man nur im Stande wäre, ein besseres Vacuum zu erzeugen.

---

[1] v. Wroblewski und Olszewski. Wied. Ann. 20, p. 243—257, 1883.

[2] R. Pictet. Ann. de Chim. et de phys. (5) 13, p. 210. 1878.

In der ersten Linie war also geboten an die Anschaffung geeigneterer Pumpen zu denken. Bis ich aber solche Pumpen erlangen konnte, suchte ich durch die Anwendung der Dämpfe des Äthylens zur Kühlung der dampferzeugenden Flüssigkeit die Siedetemperatur des Äthylens herunter zu bringen.

Wie man sich erinnern wird, bestand das in der bereits citirten Abhandlung beschriebene, zur Aufnahme des Äthylens bestimmte Gefäss aus einem Reagenzgläschen, welches in einem etwas Chlorcalcium enthaltenden Cylinder luftdicht sass. Das verdampfende Äthylen wurde durch eine Glasröhre, welche durch den das Reagenzgläschen verschliessenden Kautschukpfropfen hindurchging, herausgepumpt. Es ist klar, dass bei dieser Versuchsanordnung von der niedrigen Temperatur der Äthylendämpfe gar kein Gebrauch gemacht wird. Da anderseits das Reagenzgläschen von dem warmen Glascylinder umschlossen bleibt, ist der Einfluss der Wärmestrahlung viel zu gross, um das Sinken des Dampfdruckes des Äthylens über einen gewissen Grad sowie die entsprechende Abnahme der Temperatur zuzulassen.

Die im folgenden Paragraphen beschriebene Form des Apparates gestattet sowohl die Umhüllung wie das Gefäss mit dem flüssigen Äthylen durch die Äthylendämpfe abzukühlen.[1] Der Einfluss dieser Abänderung zeigte sich so gross, dass die Siedetemperatur des Äthylens bei der Benützung der alten Pumpe gleich auf —144° C. herunterging.

Unterdessen hat Herr P. Stückrath, Mechaniker in Berlin, sowohl die alte Pumpe, wie eine zweite ebenso mangelhafte, die mir zu den Versuchen diente, als jene den Dienst gänzlich versagte, umgearbeitet, mit den Babinet'schen Hähnen versehen und zum Motorbetrieb eingerichtet. Ich halte es für eine angenehme Pflicht hervorzuheben, dass Herr Stückrath den an ihn gestellten Forderungen zu meiner vollständigen Befriedigung

[1] Das Princip dieses Apparates habe ich gelegentlich in einem Aufsatz über die Eigenschaften des flüssigen Sumpfgases, welcher in Comptes Rendus vom 21. Juli 1884 erschienen ist, auseinandergesetzt. Aus dem Septemberheft von Philosophical Magazine (5) 18, p. 210 ersehe ich, dass Dewar bei den Demonstrationen der Verflüssigung des Sauerstoffes in Royal Institution auf denselben Gedanken gekommen ist. Bei seinen Versuchen sank die Temperatur des Äthylens auf —140° C.

entsprochen und dadurch zur Lösung der von mir verfolgten Aufgabe beigetragen hat.

Die beiden Pumpen[1] sind nebeneinander aufgestellt und werden durch den Gasmotor jede besonders in Gang gehalten. Die Transmission ist so eingerichtet, dass die Pumpen mit ungleicher Geschwindigkeit gehen. Auf 20 Umdrehungen einer Pumpe kommen 21 der anderen. Die 13 Mm. im Lichten haltenden kurzen Schläuche $y'z'$ beider Pumpen vereinigen sich zu einem Rohr unweit vom Apparate.

Am Regulator des Motors habe ich einen Hebel anbringen lassen, welcher mit Gewichten belastet werden kann, wodurch man im Stande ist, die Geschwindigkeit des Motors in sehr weiten Grenzen zu variiren. Sie kann von 120 bis auf 220 Umdrehungen per Minute gebracht werden. Beim Normalgang macht der Motor 180 Umdrehungen. Dank diesem Umstande kann auch der Gang der Pumpen entsprechend geändert werden.

Bei der Benützung beider Pumpen zugleich[2] sinkt die Dampfspannung des Äthylens auf 1 bis 0·95 Ctm. und seine Temperatur bis auf —152° C.

Durch diese Temperaturerniedrigung ist es möglich geworden Stickstoff, Kohlenoxyd und atmosphärische Luft direct mit Hilfe des Äthylens und ohne Zuhilfenahme eines schwieriger verflüssigbaren Gases, wie zum Beispiel Sauerstoff — wie ich es früher gemacht habe[3] — zu verflüssigen, da die kritische Temperatur dieser Gase[4] oberhalb dieses Minimums sich befindet.

§. 4.

Der Verflüssigungsapparat.

Leider gehört das Glas nicht zu den Körpern von hoher Festigkeit. Die Erfahrungen scheinen dafür zu sprechen, dass

---

[1] Der Durchmesser des Pumpenstiefels beträgt 6·2 Ctm., die Hubhöhe 26·2 Ctm.

[2] Der Babinet'sche Hahn erwies sich bei diesen Versuchen als unbrauchbar, da das Anwachsen des Druckes durch Verdampfung des Äthylens schneller vor sich geht, als die Wirksamkeit der Pumpen, wenn der Hahn nach Babinet's Art gestellt wird.

[3] v. Wroblewski, Compt. rend. 98, p. 982—985. 1884.

[4] Näheres darüber in §. 7.

wenn eine gewisse Breite bei der Glasröhre überschritten wird, die Wandstärke ohne Einfluss auf den Widerstand der Röhre gegen Druck ist. Ich habe viele traurige Erfahrungen in dieser Hinsicht noch im Jahre 1881 gemacht, als ich meinen Apparat zum Studium der Absorption der Gase durch die Flüssigkeiten unter hohen Drucken in Paris baute.[1] Ich bin damals bei den Röhren aus französischem Krystallglas (Bleiglas) von 15 Mm. im Lichten und circa 4 Mm. Wandstärke stehen geblieben. Solche Röhren halten den Druck von 60 Atmosphären gut aus. Ich habe sie desshalb auch für den Verflüssigungsapparat genommen. Da sie sich aber beim Verblasen schwärzen, so habe ich sie später durch Röhren aus Thüringer Glas ersetzt, welche etwa 13 Mm. im Lichten und 4 Mm. Wandstärke haben. Solche Röhren halten selten den Druck von 60 Atmosphären aus. Die meisten von ihnen zerplatzen bereits unter dem Druck von 50 Atmosphären.

Der Verflüssigungsapparat besteht aus einer solchen Röhre *r*, welche dem Bedürfnisse des Versuches entsprechend 42 bis 46 Ctm. lang, unten zugeschmolzen und oben in eine Messingfassung *s* eingekittet ist. Die Fassung ist mit einer konischen Vertiefung versehen, zu welcher ein messingener Deckel *t* mit dem konischen Ansatz genau passt und mit Hilfe von vier Schrauben *uu* luftdicht angelegt werden kann. Der Deckel enthält je nach Bedürfniss zwei oder mehrere Löcher zum Durchlassen des das Gas zuleitenden Rohres, des Thermometers und des abzukühlenden Apparates. In der Figur sind der Einfachheit der Zeichnung wegen nur zwei solche Löcher angegeben. Das eine *v* setzt mittelst des Kupferröhrchens *w* das Innere des Apparates mit dem Apparate zum Aufbewahren des comprimirten Gases in Verbindung. Das zweite *x* lässt ein thermoelektrisches Paar hindurch. Die Röhre *r* ist in den zum Hineingiessen des Äthylens bestimmten Apparat hineingesetzt, welcher in erster Linie aus einer 55 bis 60 Ctm. langen, 6 bis 6·5 Ctm. im inneren Durchmesser und 0·2 Ctm. in der Wandstärke haltenden Glasröhre *y* besteht. Diese Röhre ist von beiden Enden ein wenig erweitert und mit schwach konischen 4·5 Ctm. hohen Pfropfen

[1] v. Wroblewski, Wied. Ann. 17, p. 107, 1882.

aus grobkörnigem wenig weichem Kautschuk z und a' luftdicht verschlossen.[1]

Der obere Pfropfen hat zwei Löcher; durch das eine geht das Rohr r luftdicht hindurch, durch das andere ein kurzes Glasröhrchen b', welches dazu dient, das Kupferröhrchen c' aufzunehmen, das aus dem Recipienten d' das flüssige Äthylen zuführt. Soll gleichzeitig mit anderen Versuchen die Temperatur des Äthylens gemessen werden, so gehen die Drähte von dem dazu bestimmten thermoelektrischen Paar zwischen der Glasröhre b' und der Kautschukwand hindurch.[2]

Der untere Propfen a' hat ebenfalls zwei Löcher. Durch das eine seitlich angebrachte Loch e' geht das zum Abführen der Äthylendämpfe dienende Glasrohr f'. Das andere Loch, welches nur gerade eng genug ist, um den starken Stahldraht g' hindurchzulassen, ist durch die Mitte des Pfropfens geführt, erweitert sich oben ein wenig und enthält in der Erweiterung ein dünnes Glasröhrchen h' mit ein Paar Tropfen Knochenöl.

Dieses Röhrchen dient als Schmiervorrichtung für den Draht g' und macht möglich, dass man ihn — obgleich er luftdicht durch den Pfropfen geht — mittelst des Griffes i' hinauf und hinunter schieben kann. Unweit von seinem oberen Ende ist dieser Draht mit einem Kreuz k' aus dünnem aber festem Messingstreifen versehen, welches ihm nicht gestattet aus der centrischen Lage herauszukommen. An seinem oberen Ende trägt der Draht ein 1 Ctm. langes cylindrisches Stück von Ebonit l'. Der Zweck dieses Stückes wird gleich erläutert werden.

Das eigentliche zur Aufnahme des flüssigen Äthylens dienende Gefäss ist das 34 bis 38 Ctm. lange, unten geschlossene Glasrohr m'. Es ist von sehr dünnwändigem Glas gemacht und sein Durchmesser ist so gewählt, dass zwischen ihm und der

[1] Die Herstellung dieser Röhren ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden, da fast alle, nachdem sie abgekühlt worden sind, gleich oder einige Tage nachher an der erweiterten Stelle der Länge nach sich spalten. Sie wurden zuletzt in der Glashütte angefertigt, zweimal geglüht, mit glühendem Sand ganz bedeckt und so zwei Tage lang im geschlossenen Raume abgekühlt.

[2] In diesem Falle muss die Stelle, wo die Drähte aus dem Pfropfen z herausragen, sorgfältig mit dem Kitt zugeschmiert werden, damit der Verschluss luftdicht bleibt.

äusseren Röhre y eine Distanz von 2 Mm. frei bleibt. Dieses oben sorgfältig abgeschliffene Rohr ruht nur auf dem soeben beschriebenen Ebonitstück. Damit keine Berührung zwischen dieser Röhre und der Röhre y möglich ist, werden auf die Röhre m' an zwei Stellen, welche in der Figur punktirt sind, zwei Ringe aus dünnem Messingblech — jeder Ring mit vier Flügeln — geschoben.

Damit zwischen dem Rohr m' und dem Pfropfen z ein möglichst guter Verschluss sei, hat man in dem Pfropfen eine kreisförmige 5 Mm. tiefe und 3 Mm. breite Rinne ausgebrannt und dann mit Äther ausgewaschen. Das Rohr m' passt in diese Rinne genau, und wenn man den Draht g' nach oben schiebt, so wird er in ihr festgehalten. Damit die Äthylendämpfe Platz zum Entweichen haben, ist oben bei n' in dem Glasrohr m' ein 9 Mm. im Durchmesser haltendes Loch ausgebohrt und mit einem 5 Mm. hohen aus sehr dünnem Messingblech gemachten Ring versehen.

Der Apparat wird folgender Weise zusammengesetzt. Nachdem alle Glastheile mit peinlichster Sorgfalt gereinigt worden sind, wird zuerst der Pfropfen z mit der Röhre b' auf die Röhre r hinaufgeschoben und die Röhre r nochmal mit Fliesspapier gereinigt. Dann schiebt man die Röhre y auf denselben Pfropfen, legt die Röhre m' und das kleine Drahtgefäss o' mit frisch getrocknetem Chlorcalcium hinein und zuletzt fügt man den Pfropfen a' mit allem, was er enthält, hinzu. Dann wird das Rohr b' mit einem Stöpsel vorläufig geschlossen, f' in Verbindung mit den Luftpumpen gebracht und beide Pfropfen durch Luftdruck in die Röhre y hineingezogen.[1]

Ist Alles vollständig luftdicht, so befestigt man den ganzen Apparat auf dem schweren Dreifuss p' und legt um den Apparat einen aus gefirnisster Pappe angefertigten, mit zwei langen Glasfenstern versehenen und unten und oben sich eng an die Röhre y anschliessenden Kasten q'. Im unteren Theile des Kastens befinden sich zwei halbkreisförmige Pappträge und in dem oberen

[1] An der Stelle, wo der Contact zwischen Glas und Kautschuk stattfindet, werden die Pfropfen z und a' ein wenig mit Vaseline befeuchtet. Damit die Pfropfen beim Giessen des Äthylens aus der Röhre nicht herausgeworfen werden, bindet man sie mittelst eines 0·9 Mm. dicken, längs der Röhre y geführten Kupferdrahtes aneinander.

zwei Drahtnetzgefässe mit frisch getrocknetem Chlorcalcium.[1] Der Pappkasten hat zum Zweck, keine Feuchtigkeit auf die äussere Fläche der Röhre *y* zuzulassen und die Wärmestrahlung von aussen abzuhalten. Der Versuch hat gezeigt, dass dieser Zweck erreicht wird, wenn der Kasten etwa 15 Ctm. im Durchmesser beträgt.

Ist man so weit mit der Zusammenstellung, so wird der Deckel *t*, mit allem, was zu ihm gehört, auf seinen Platz angelegt und mit den Schrauben *uu* luftdicht befestigt, der Stöpsel aus der Röhre *b'* herausgenommen und an seine Stelle das Kupferrohr *c'* mittelst eines auf ihm befindlichen Stückes von Kautschukschlauch luftdicht befestigt. Dieses Kupferrohr ist 3 Met. lang und spiralförmig zweimal zusammengewickelt. Es befindet sich in einem mit Doppelwand versehenen, zur Aufnahme der festen Kohlensäure und des Äthers bestimmten Blechgefässe *r'*. Das andere Ende dieser Spirale gabelt sich und führt zu den beiden[2] das flüssige Äthylen enthaltenden Recipienten *d'*, von denen jeder in einem Blechgefässe mit Eis und Kochsalz sich befindet. Die in den Recipienten enthaltene Menge Äthylen beträgt 500 bis 540 Grm.

Nachdem der Apparat so zusammengestellt worden ist, wird er 20- bis 30mal leer gepumpt und mit trockener Luft angefüllt. Zum Einlassen der trockenen Luft dient der Hahn *s'*.

Ist man mit allen diesen Vorbereitungen zu Ende, so wird das Blechgefäss *r'* mit fester Kohlensäure und Äther so gefüllt, dass die Kohlensäure wie Brei dick ist.[3] Dann wird durch die passende Stellung des Hahnes *t'* das Innere des Apparates in Verbindung mit der Atmosphäre gebracht und das Äthylen zuerst aus dem einem Recipienten und dann aus dem anderen herausgelassen. Die Flüssigkeit sammelt sich im Rohr *m'*, die Dämpfe gehen durch die Öffnung *n'* und dann zwischen den Wänden beider Gefässe ins Rohr *f'* zu dem Hahn *t'*. Beim zu schnellen Giessen geht auch etwas Flüssigkeit durch das Loch *n'* und fällt tropfenweise auf den Pfropfen *a'*. Um diesen Verlust auf das

---

[1] In der Figur nicht angegeben.

[2] In der Figur ist nur ein Recipient gezeichnet.

[3] Zu diesem Zwecke reicht ein Recipient mit 500—600 Grm. flüssiger Kohlensäure aus. In der im 20. Band, Wied. Ann., p. 250 publicirten Abhandlung ist gesagt, dass für jeden dort beschriebenen Versuch 400 Grm. fester Kohlensäure genügten. Es soll heissen flüssiger Kohlensäure.

Minimum zu bringen, sitzt im Loch n' der bereits erwähnte Blechring und zwingt die Flüssigkeit wieder herunter zu fliessen. Das Heruntertropfen des Äthylens hat übrigens keine üblen Folgen, und wenn das Rohr m' 34 Ctm. lang ist, so kann mit Leichtigkeit eine Äthylensäule von 25 Ctm. Höhe hineingegossen werden.

Das flüssige Äthylen in einer solchen Menge zeigt alle Eigenschaften einer sehr stark überhitzten Flüssigkeit und beim kleinsten Anlass wird es nach oben geworfen und durch das Loch n' herausgegossen. Es genügt die geringste Berührung zwischen dem Rohr m' und der äusseren Röhre y, um das ganze Äthylen ins gewaltsame Kochen zu bringen. Zuerst als der Pappkasten nur 10 Ctm. im Durchmesser hatte, war schon eine Berührung des Glasfensters mit der Hand genügend, um sofort das Emporschleudern des Äthylens in die Höhe zu veranlassen. Die unangenehmsten Folgen hatte jedoch früher der Umstand, dass der Stahldraht g' oben nicht mit Ebonit versehen war. Das Äthylen kam fast nie aus dem heftigen Kochen und bei der Berührung des Drahtes mit der Hand wurde es in die Höhe geschleudert. Erst die Erweiterung des Kastens bis 15 Ctm. im Durchmesser und die Benützung des Ebonits setzten den Explosionen ein Ziel.

Es kommt oft vor, dass, wenn das Äthylen hineingegossen worden ist, von der Röhre r Luftbläschen aufsteigen. In diesem Falle wird später beim Pumpen fast alles Äthylen herausgeworfen, da dann die Blasen sehr gross werden und die ganze Flüssigkeit emporschleudern. Um dies zu vermeiden, verfahre ich auf folgende Weise. Es wird zuerst Äthylen nur etwa bis 5 Ctm. Höhe eingegossen, der Apparat durch passende Stellung des Hahnes t' von der Atmosphäre getrennt und die Flüssigkeit vorsichtig gepumpt. Nach ein paar Minuten hört die Blasenbildung auf. Jetzt kann man ruhig — nachdem man in dem Apparat durch den Hahn s' die trockene Luft eingelassen und die Verbindung mit der Atmosphäre mittelst des Hahnes t' wieder hergestellt hat — den ganzen Inhalt aus beiden Recipienten hineingiessen. Die Blasenbildung wird nur im oberen Theil der Flüssigkeitssäule eine Zeit fortdauern, was ohne Nachtheil für den Versuch ist.

Das Äthylen wird zuerst nur mit einer Pumpe gepumpt, welche blos circa 30 Umdrehungen per Minute macht. Beginnt das Manometer u' zu sinken, so wird die zweite Pumpe in Gang

gesetzt und dann durch entsprechende Änderungen am Regulator des Gasmotors die Geschwindigkeit allmälig bis 60 Umdrehungen per Minute gesteigert.

Ist ein Drittel von der Äthylenmenge verdampft, so hat man schon eine Abkühlung, welche für Verflüssigung des Sauerstoffs hinreichend ist. Will man mit flüssigem Stickstoff operiren, so muss etwa die Hälfte des Äthylens verdampft werden.

§. 5.

Die Verflüssigung des Gases und seine Überführung unter den atmosphärischen Druck.

Ist die Temperatur des Äthylens hinreichend gesunken und kann die Verflüssigung beginnen, so setzt man die Flasche *a* in Verbindung mit dem Inneren des Verflüssigungsapparates und lässt das Gas unter dem Drucke von 40 Atmosphären ein. In dem Grade, wie es sich verflüssigt und der Druck abnimmt, wird das Gas aus der zweiten Flasche *b* zugelassen. Steht das verflüssigte Gas etwas höher oder auf demselben Niveau wie das Äthylen, so wird die Flasche *a* abgesperrt. Auf diese Weise kann mit Leichtigkeit eine Flüssigkeitssäule von 10 bis 12 Ctm. Höhe erhalten werden.

Jetzt handelt es sich darum, das verflüssigte Gas unter den atmosphärischen Druck zu bringen und es unter diesem Drucke möglichst lang zu erhalten. Öffnet man den Hahn v', so verdunstet die Flüssigkeit sehr schnell, da der Unterschied zwischen der Temperatur des Äthylens und der Siedetemperatur des Gases sehr gross ist. Das verflüssigte Gas muss desshalb — nachdem es unter den atmosphärischen Druck übergeführt worden ist — der erwärmenden Einwirkung des flüssigen Äthylens entzogen werden. Dies suchte ich zuerst dadurch zu erreichen, dass ich den Draht g' und zugleich die auf ihm ruhende Röhre m' nach unten gezogen hatte, ohne dabei an der Arbeit der Pumpen irgend etwas zu ändern und erst dann den Hahn v' aufmachte. Die gewählte Construction des Apparates hatte zum Zweck, diese Manipulation zu ermöglichen. Der Versuch hat aber ergeben, dass dadurch sehr wenig erreicht wird, da die erwärmende Einwirkung der Glasröhre *r* selbst noch viel zu stark ist. Es musste desshalb noch diese Einwirkung beseitigt werden.

Ich habe dies dadurch erreicht, dass in die Glasröhre *r* eine zweite aus dem dünnsten Reagenzglase geblasene unten spitzig zugeschmolzene Glasröhre gelegt wurde. Diese Röhre ist 10 bis 15 Ctm. lang und ihr Durchmesser ist so gewählt, dass sie nirgends an die Wand der Röhre *r* sich anlegt, wozu der am oberen offenen Ende etwas nach aussen umgebogene Rand beiträgt. Sie ruht desshalb nur auf der Spitze und auf irgend einem Theile des Randes. Verflüssigt man das permanente Gas, so füllt sich mit ihm sowohl diese Röhre, wie der Zwischenraum zwischen ihr und der Röhre *r*. Wird der Hahn *r'* vorsichtig aufgemacht, so verdampft zuerst die Flüssigkeit, welche im Zwischenraume zwischen beiden Röhren sich befindet. Dadurch wird die dünnwandige Röhre mit der Flüssigkeit von der Röhre *r* isolirt. Die Flüssigkeit wird der erwärmenden Einwirkung der Röhre *r* entzogen und nachdem sie sich abgekühlt hat, verdampft sie jetzt nur sehr langsam.

Auf diese Weise kann die in der dünnwandigen Röhre enthaltene Sauerstoffmenge eine Viertelstunde lang nicht nur unter dem atmosphärischen Druck, sondern — wie man weiter sehen wird — im Vacuum erhalten werden. Bei der Überführung unter den atmosphärischen Druck geht gewöhnlich die Hälfte des verflüssigten Gases verloren.

Diese Methode macht das Herunterziehen der Röhre *m'* mit Äthylen überflüssig.

Ist das verflüssigte Gas verdunstet, so kann der Versuch wiederholt werden, so lange der Vorrath des comprimirten Gases es gestattet. Das einmal abgekühlte Äthylen verdampft nachher sehr langsam und kann als Verflüssigungsmittel ein bis zwei Stunden dienen.

Zum Schusse eine Bemerkung als Warnung. Obgleich die Röhre *r* noch vor dem Gebrauch auf den Widerstand gegen Druck geprüft wird, so ist doch jeder Verflüssigungsversuch in hohem Grade gefährlich und kann bedenkliche Explosionen zur Folge haben.[1] Aus diesem Grunde sind alle Vorsichtsmassregeln

[1] Von den zahlreichen Explosionen, bei welchen ich zweimal verletzt gewesen bin, will ich nur die eine anführen, welche in diesem Winter stattfand. Es wurde das Verhalten des Sauerstoffes bei sehr hohen Drucken studirt. Der Versuch, welcher meist eine oder anderthalb Stunden dauert,

geboten und sowohl meine Assistenten, die Herren Aleksandrowicz, Kosminski und Novak, wie auch ich selbst, bedienen uns stets bei jedem Versuche der den ganzen Kopf bedeckenden Drahtmasken. Ich benutze diese Gelegenheit, um den genannten Herren, die mir bei diesen Untersuchungen geholfen, meinen besten Dank auszusprechen.

§. 6.

Die Methode, die niedrigen Temperaturen zu messen.

Schon bei den ersten Bestimmungen der Verflüssigungsdrucke bei dem Sauerstoffe zeigte sich, dass das Wasserstoffthermometer bei solchen Versuchen nur im beschränkten Masse benutzt werden kann. Die Angaben dieses Thermometers sind nur dann sicher, wenn die Temperatur des zu untersuchenden Mediums hinreichend lang constant bleibt. Diese Bedingung ist bei den verflüssigten Gasen sehr schwer zu erreichen. So zum Beispiel zeigt das flüssige Äthylen selbst, wenn es in beträchtlicher Quantität in ein Glasgefäss hineingegossen worden ist, kleine Temperaturschwankungen, die nicht ohne Einfluss auf die vorzunehmende Messung sind und nicht rasch genug mit einem Wasserstoffthermometer verfolgt werden können. Noch schwieriger werden die exacten Messungen dort, wo die verflüssigte Gasmenge klein ist und wo man die Thermometerkugel auch klein machen muss. In diesem Falle treten noch andere Fehlerquellen hervor, wie zum Beispiel die Unsicherheit in der Bestimmung der

---

näherte sich zu Ende. Ich sass wie gewöhnlich die ganze Zeit hindurch dicht vor dem Apparate, der von hinten mit einer Kerze beleuchtet war, beobachtete die Vorgänge in der Röhre und legte den Commutator des Galvanometers um, während meine Assistenten, durch Bretterwände gedeckt, auf das von mir gegebene Zeichen Ablesungen am Galvanometer und Manometer machten. Ich erhob mich von dem Sitze, um eine Anordnung zu treffen, und kaum war ich vier Schritte von dem Apparate entfernt, als in Folge der Explosion der Sauerstoffröhre das Äthylen sich anzündete. Die Explosion schleuderte mich zur Seite und als ich mich umwandte, sah ich von dem Verflüssigungsapparate nichts mehr, eine Menge Nebenvorrichtungen und Instrumente, wie Manometer, Galvanometer u. s. w. zerschlagen oder beschädigt, das ganze Zimmer mit Glasstaub bedeckt, 16 Fensterscheiben zerschlagen.

Temperatur der Capillare, welche die Thermometerkugel mit dem Manometer des Thermometers verbindet und die Unsicherheit der Einstellung des Quecksilberfadens auf die Marke. Man kann diese Thermometer nicht mit einer Glasspitze versehen, auf die man das Quecksilberniveau immer einstellen könnte, wie dies zum Beispiel beim Jolly'schen Luftthermometer der Fall ist. Bei den ersten Thermometern, welche ich bei den ersten Versuchen mit dem flüssigen Sauerstoff benutzte, war auf dem mit dem Manometer verbundenen Schenkel der Capillare eine einfache Marke angebracht und der Quecksilberfaden immer auf diese Marke gestellt. Eine solche Einstellung ist sehr unsicher, da man nur mit dem Finger an der Capillare zu klopfen braucht, um die Lage des Quecksilberfadens sofort zu verändern. Ganz unbrauchbar ist das Wasserstoffthermometer dort, wo die Temperatur sich rasch ändert.

Aus diesem Grunde habe ich mich entschlossen, an die Stelle des Wasserstoffthermometers ein Thermoelement zu setzen.

Die von mir gewählte Methode beruht auf der Benutzung eines aperiodischen, sehr empfindlichen Spiegelgalvanometers von hohem Widerstande. Ist der Widerstand in dem Schliessungsbogen im Vergleich zu demjenigen des Galvanometers verschwindend klein, so sind die Angaben des Galvanometers direct proportional der durch die Temperaturdifferenz der beiden Lothstellen hervorgerufenen elektromotorischen Kraft. Kennt man einmal den Zusammenhang zwischen der elektromotorischen Kraft und der Temperatur bei dem gewählten Paare, so hat man ein Mittel zur Messung jeder Temperatur gefunden.

Als thermoelektrisches Paar habe ich galvanoplastisches Kupfer und Neusilber gewählt. Zur Wahl dieses Paares hat mich nicht sowohl seine Stellung in der thermoelektrischen Reihe, als vielmehr der Umstand bewogen, dass hier die elektromotorische Kraft zwischen +100 und 0° C. fast genau der Temperaturdifferenz der beiden Lothstellen proportional ist. Die Versuche ergaben, dass bei den niedrigeren Temperaturen die elektromotorische Kraft langsamer als die Temperaturdifferenz wächst. Dessenungeachtet bleibt auch hier der Zusammenhang zwischen diesen beiden Grössen so regelmässig, dass man im Stande ist, wie man es gleich sehen wird, mit Hilfe der empirischen Gleichung, welche diesen Zusammenhang zwischen +100 und —130° C. darstellt,

noch die in der Nähe von —200° C. befindlichen Temperaturen mit Sicherheit aus den Angaben des Galvanometers abzuleiten.

Bei den ersten Versuchen wurde die Empfindlichkeit des Galvanometers so gewählt, dass, während eine Lothstelle im Eis und die andere im Wasser von der Temperatur von + 99·21° C. sich befand, der Scalenausschlag des Galvanometers im Mittel 14·164 Ctm. betrug. Um zu sehen, inwieweit die Angaben des benutzten Galvanometers der elektromotorischen Kraft proportional sind, wurde ein dreifaches Paar genommen. Der Scalenausschlag war in diesem Falle genau dreimal so gross und dadurch wurde die vollständige Proportionalität innerhalb der angegebenen Grenzen zwischen der elektromotorischen Kraft und dem Scalenausschlag bewiesen.

Diejenige Stellung des Galvanometerspiegels, bei welcher die beiden Lothstellen im Eise sich befanden, wurde als Null angenommen. Die Ausschläge im Sinne der höheren Temperaturen als 0° wurden positiv, dagegen die entgegengesetzten negativ gerechnet. Als Vergleichstemperaturen zwischen dem Wasserstoffthermometer und Galvanometer zur Feststellung der Temperaturgleichung wurden zuerst folgende vier Temperaturen gewählt:

1. Die Siedetemperatur des Wassers;

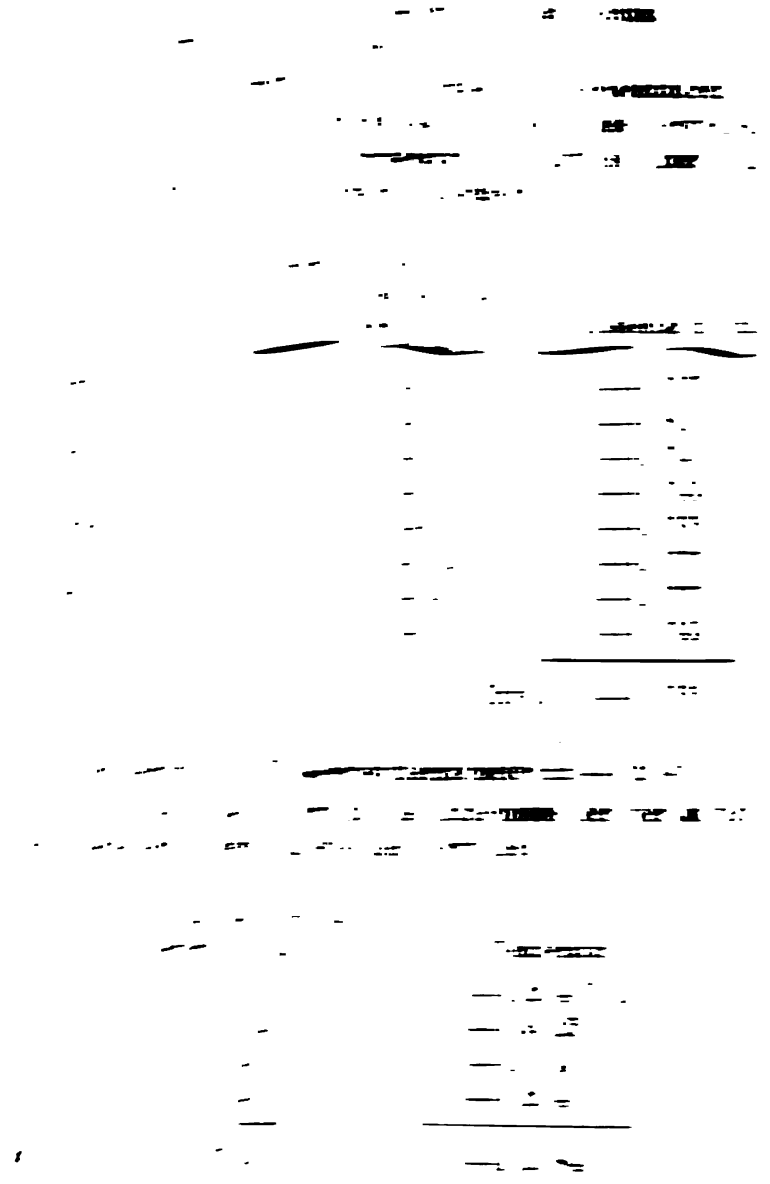
2. die Schmelztemperatur des Eises;

3. die Siedetemperatur des Äthylens unter dem atmosphärischen Druck, und

4. die Siedetemperatur des Äthylens unter dem Druck von etwa 3 Ctm. Quecksilberdruck.

Das Kugelgefäss des Wasserstoffthermometers hatte cylindrische Form und fasste bei 0° C. 260·838 Grm. Quecksilber, die Capillare dagegen nur 0·66 Grm. Das Verhältniss des Volumens der Capillare zu demjenigen des Kugelgefässes betrug also nur 0·00253.

Zu den Versuchen mit dem Äthylen wurden zwei thermoelektrische Paare benutzt, von denen das eine an den oberen und das andere an den unteren Theil des Kugelgefässes durch Seidenfäden befestigt war. Ein besonders dazu eingerichteter Commutator gestattete, die Angaben der beiden Paare gleich nacheinander abzulesen. Dadurch war es möglich sich zu überzeugen, ob das



enthält die Ergebnisse der Versuche
des Äthylens unter dem Drucke von etwa

Ausschlag des Galvanometers in Ctm.	Temperatur
—12·86	—130·1° C.
—12·89	—131·2
—12·875	—130·9
—12·88	—131·2
—12·755	—131·2
—12·86	—130·9
—12·88	—131·4
Mittel ... —12·857	—130·986

Stellt man Alles zusammen, so hat man:

Ausschlag des Galvanometers in Ctm.	Temperatur
+14·164	+ 99·21
± 0	± 0
—10·763	—102·94
—12·857	—130·986

woraus die Lagrange'sche Interpolationsformel liefert:

$$\theta = 7 \cdot 3256\, w - 0 \cdot 12749\, w^2 + 0 \cdot 0073998\, w^3$$

wo θ die Temperatur und w den Ausschlag bedeuten.

Diese Gleichung gilt selbstverständlich zuerst nur für den Temperaturintervall von 230° zwischen +99 und —131. Die Bestimmung der Siedetemperatur des flüssigen Sauerstoffes und Stickstoffes unter dem atmosphärischen Druck zeigte aber, dass die nach dieser Gleichung gerechnete Temperatur noch bei —193° C. identisch ist mit der am Wasserstoffthermometer abgelesenen.

Diess ergab sich aus folgenden Versuchen. Beobachtete ich den Ausschlag des Galvanometers, während eine Lothstelle im Eis und die andere in dem unter dem atmosphärischen Drucke siedenden Sauerstoff oder Stickstoff sich befand, so lieferte die obige Interpolationsformel folgende Temperaturen:

Sauerstoff		Stickstoff	
Ausschlag d. Galvanometers in Ctm.	Temperatur	Ausschlag d. Galvanometers in Ctm.	Temperatur
—16·27	—184·8	—16·74	—193·0
—16·27	—184·8	—16·78	—193·7
—16·17	—183	—16·74	—193·0
—16·22	—183·9	—16·74	—193·0
Mittel..	—184·1	Mittel..	—193·2

Die directe Bestimmung dieser Temperaturen mittelst Wasserstoffthermometers ergab genau dieselben Werthe.[1]

Diese Thermometerversuche wurden auf folgende Weise ausgeführt.

Durch ein drittes Loch in dem Deckel des Verflüssigungsapparates wurde von unten eine sehr feine Capillare von 60 Ctm. Länge durchgeführt. Am unteren Ende war sie zugeschmolzen und zu einem länglichen starkwändigen Thermometergefäss aufgeblasen. Das Volumen dieses Gefässes betrug 0·358 CC. Die Wandstärke wurde so gewählt, dass das Thermometer nicht zerdrückt werden konnte. Der obere Theil der Röhre wurde nachher zweimal umgebogen, die ganze Röhre mit Wasserstoff gefüllt und dann mit dem Schlauch des Jolly'schen Thermometers verbunden. Als Einstellungsmarken dienten zwei in verschiedener Höhe angebrachte Ringe. Man konnte das Quecksilber auf beide Marken einstellen und daraus den Einfluss der unentbehrlichen Correction auf das Resultat der Messung berechnen. Hatte man alle Correctionen angebracht, so stimmte das Resultat überein.

Diese merkwürdige Übereinstimmung ist aus doppeltem Grunde wichtig. Erstens zeigt sie, dass der Wasserstoff bis zur Temperatur von —193° C. noch als thermometrische Substanz benutzt werden kann. Zweitens ergibt sich, dass wir in einem Kupferneusilberpaar ein äusserst feines Messinstrument besitzen, welches das Wasserstoffthermometer innerhalb der angegebenen Grenzen vollständig ersetzt. Und da diese Übereinstimmung sich

[1] Der zu diesen Versuchen benutzte Sauerstoff war durch Luft verunreinigt. Der Siedepunkt des stickstofffreien Sauerstoffs (§. 7) liegt bei etwa —181·5° C.

auf einen so grossen Temperaturintervall wie +100° und —193° C. erstreckt, so scheint mir die Schlussfolgerung nicht unberechtigt zu sein, dass bei noch niedrigeren Temperaturen, bei welchen das Wasserstoffthermometer seine Dienste zu versagen beginnt,[1] die aus den Angaben des zwischen +100° und —193° C. calibrirten Kupferneusilberpaares gerechnete Temperatur den Angaben eines mit einem idealen Gase gefüllten Thermometers entspricht.

Ich benutze jetzt zum Calibriren des Thermoelements folgende vier Temperaturen: Schmelzpunkt des Eises und Siedepunkt des Wassers, Äthylens und Stickstoffs — Alles unter dem atmosphärischen Druck.[2]

§. 7.

Der kritische Zustand und die Spannkraftscurven der Dämpfe des flüssigen Stickstoffs, Kohlenoxyds und Sauerstoffs. Das Verhalten der atmosphärischen Luft.

Es wurde bereits im §. 1 erwähnt, dass die Säule des verflüssigten Gases nicht über eine gewisse, höchstens 1—2 Ctm. von dem Niveau des Äthylens entfernte Stelle gehen kann, da an dieser Stelle die Glasröhre r eine Temperatur hat, welche für das betreffende Gas die kritische ist. Je schwieriger verflüssigbar das Gas ist, desto näher von dem Niveau des Äthylens befindet sich diese Stelle. Sucht man durch Vergrösserung des Druckes, unter welchem das Gas sich befindet, die Flüssigkeitssäule zu erhöhen, so wird der Meniscus flacher, dann verschwommen und zuletzt verschwindet er. Macht man jetzt den Druck durch Herauslassen von Gas etwas kleiner, so kommt der Meniscus nahezu an derselben Stelle, auf welcher er verschwunden war, wieder zum Vorschein.

---

[1] Näheres darüber in §. 8.

[2] Da das Neusilber von verschiedenen Qualitäten im Handel vorkommt, so beabsichtige ich demnächst das thermoelektrische Verhalten von verschiedenen Sorten dieses Metalls in meinem Institut untersuchen zu lassen, um das geeigneteste Material für die thermoelektrischen Temperaturbestimmungen zu ermitteln.

Da ich in einer besonderen Abhandlung die Erscheinungen, welche die Gase beim Übergange durch den kritischen Punkt darbieten, zu behandeln beabsichtige, so will ich hier nur anführen, dass das Verschwinden des Meniscus in dem soeben beschriebenen Falle lediglich eine optische Erscheinung ist und nur dadurch entsteht, dass die Dichtigkeit des Gases in der unmittelbar auf der Flüssigkeit liegenden Schicht sich der Dichtigkeit der obersten Schicht der Flüssigkeit nähert. Das Verschwinden des Meniscus ist, wie gesagt, nicht momentan. Er wird zuerst verschwommen und undeutlich, und nachdem er verschwunden ist, kann noch die Stelle, wo er sich befindet, leicht mit blossem Auge erkannt werden, wenn man hinter dem Apparate eine angezündete Kerze hat, dann das Auge etwas unter- oder oberhalb der Meniscusstelle hält und durch diese Stelle nach oben oder nach unten sieht. Wird der Versuch in meinem alten Apparate[1] in der engen Glasröhre gemacht, so sieht man es noch besser, da in Folge der verschiedenen Lichtbrechung die Röhre oberhalb und unterhalb dieser Stelle einen anderen scheinbaren inneren Durchmesser hat. Erst nachdem der Gasdruck um ein paar Atmosphären grösser geworden, ist nichts zu unterscheiden. Wir haben nichtsdestoweniger unten die Flüssigkeit, deren Dichte mit der Höhe der Säule von Schicht zu Schicht abnimmt, dann an einer Stelle der Röhre eine Schicht, wo die Flüssigkeit wahrscheinlich continuirlich in das Gas übergeht und schliesslich das Gas mit der von Schicht zu Schicht abnehmender Dichtigkeit. Die Abnahme der Dichtigkeit im Gas ist durch die Temperaturvertheilung in der Röhre r veranlasst.

Aus diesem Grunde ist eine exacte Ermittlung des kritischen Druckes von grosser Schwierigkeit und viel schwieriger als diejenige der kritischen Temperatur.

Das zu den definitiven Versuchen benutze Manometer wurde von Herrn Alvergniat in Paris nach dem Princip des bei meinen Untersuchungen über das Hydrat der Kohlensäure benutzten Manometers[2] geblasen und von mir mit grösster Sorgfalt calibrirt. Die Länge der in Millimeter getheilten Capillare

---

[1] v. Wroblewski und Olszewski. Wied. Ann. 20, p. 246. 1883.
[2] v. Wroblewski. Wied. Ann. 17, p. 111. 1882.

betrug 80·92 Ctm. Das Volumen des unteren, fünfmal olivenförmig aufgeblasenen Theiles der Röhre entsprach einer Länge von 848·7 Ctm. Hiermit functionirte das ganze Manometer wie ein 9·296 M. langes Rohr und gestattete, die Messungen von 13 Atmosphären aufwärts vorzunehmen. Als Mass des Druckes diente der auf 0° reducirte umgekehrte Werth des Volumens einer Luftmenge, indem das Volumen dieser Menge bei dem Druck einer Atmosphäre = 1 gesetzt wurde. Bei der Berechnung des Druckes im Apparat wurde die Höhe der Quecksilberkuppe in der Manometerröhre über dem Quecksilberniveau in dem mit dem Manometer communicirenden Gefäss, sowie die Capillardepression in der Manometerröhre berücksichtigt. Das Manometerrohr wurde vom Wasser umgeben, in welchem ein empfindliches Thermometer hing. Das Manometer gestattete also unter dem Drucke von 30 Atmosphären noch $^1/_{100}$ Atmosphäre direct abzulesen.

Dem Galvanometer wurde eine solche Empfindlichkeit gegeben, dass sein Ausschlag im kochenden Wasser von 99·65° C. +23·305 Ctm., im Äthylen bei —103·03° C. —17·723 Ctm. und im siedenden Stickstoff —27·944 Ctm. betrug. Die Temperatur des Äthylens wurde direct mit dem Wasserstoffthermometer ermittelt, diejenige des Stickstoffs den früheren Bestimmungen entsprechend gleich —193° C. gesetzt. Sollte sich vielleicht später ergeben, dass diese letzte Temperatur um einen Bruchtheil eines Grades unrichtig ist, so gebe ich hier an, dass diese Messung bei dem Barometerstand von 74·195 Ctm. geschah und damit wird man im Stande sein, alle hier mitzutheilenden Temperaturen zu corrigiren. Zur Berechnung der Temperatur diente die Gleichung

$$\vartheta = 4{\cdot}5749\,w - 0{\cdot}046357\,w^2 + 0{\cdot}0013272\,w^3$$

wo ϑ die Temperatur und w den Ausschlag des Galvanometers bedeuten. Man konnte also etwa einen Zehntel Grad direct ablesen. Die Messungen geschahen auf folgende Weise.

Dem thermoelektrischen Paar wurde eine solche Länge und Lage gegeben, dass die Löthstelle in der Glasröhre r nur etwa $^1/_2$ Ctm. vom Boden der Röhre entfernt war und nirgends die Wand berührte. Nachdem man durch Vorversuche eine Vorstellung von der kritischen Temperatur des zu untersuchenden

Gases sich verschafft hatte, wurde der Gang der Pumpen so lange regulirt, bis das Äthylen eine nicht stark davon verschiedene Temperatur hatte. Jetzt wurde das Gas unter etwas grösserem Druck als der kritische eingelassen, und nachdem es sich hinreichend abgekühlt hatte, durch eine kleine Expansion verflüssigt. War die Flüssigkeitssäule um ein Beträchtliches zu gross, so wurde mittelst des Hahnes v' ein Theil des Gases langsam herausgelassen und die Flüssigkeit dadurch so weit verdampft, dass die ganze Flüssigkeitssäule nicht mehr als 1 bis 1·5 Ctm. hoch war, mit anderen Worten, dass die Entfernung des Flüssigkeitsniveau von der eingetauchten Löthstelle nicht mehr als $^1/_2$—1 Ctm. betrug.

Wollte man den unteren Theil der Spannkraftcurve studiren, so wurde entweder der Gang der Pumpen beschleunigt, oder der kleine Hahn v' weniger fest zugemacht, damit das Gas aus dem Apparate sehr langsam entweichen konnte. Der Hahn v' wurde gewöhnlich so gestellt, dass das Quecksilber im Manometer per Minute um ein paar Millimeter herunterging, mit anderen Worten, dass der Druck höchstens um ein paar Zehntel Atmosphäre per Minute sich änderte. Wollte man den oberen Theil der Curve studiren, so wurde der Hahn v' fest zugemacht und der Pumpengang verlangsamt, ja sogar eine Pumpe ausgeschaltet. Genügte dies nicht, so wurde das Gas langsam aus der Flasche a zugelassen. Es versteht sich von selbst, dass nur denjenigen Bestimmungen Zutrauen geschenkt wurde, bei welchen das Äthylenniveau hoch über dem Niveau des verflüssigten Gases stand.

Der Verlauf des Versuches wurde gleichzeitig von vier Beobachtern verfolgt, während der Gehilfe die ausgerufenen Zahlen notirte. Während ich dicht am Apparate sitzend die Vorgänge in der Röhre r beobachte und den Commutator umlegte, las Herr Novak auf ein von mir durch die Glocke gegebenes Zeichen den Galvanometer und Herr Kosminski das Manometer ab, während Herr Aleksandrowicz den Druck regulirte.

Jede Ablesung am Galvanometer wurde mit zwei nächstfolgenden combinirt und daraus der Ausschlag berechnet. Um einen Begriff von dem Gange der Beobachtung zu geben, schreibe ich hier den Anfang des Protokolls eines Versuches aus. Dazu wähle ich

Versuche mit Stickstoff.

Stickstoff wurde aus der atmosphärischen Luft mit Hilfe der in Glühhitze erhaltenen Kupferspäne bereitet. Die ersten Versuche lieferten viel höhere Drucke als die in dieser Abhandlung mitgetheilten, bis mich eine Bemerkung Jolly's[1] belehrte, dass die Fehlerquelle in dem durch die Kupferspäne absorbirten Wasserstoffgase lag. Diese Fehlerquelle wurde beseitigt und das Gas wurde zuerst nur in die dritte (in der Figur nicht angegebene) und zweite Flasche des Condensationsapparates gepumpt, in welche man frisch getrocknetes, noch heisses Chlorcalcium vorher hineingelegt hatte. Nachdem das Gas die übrig gebliebene etwaige Feuchtigkeit dort zurückgelassen hatte, wurde es in die erste Flasche *a* geleitet, welche Natrium in Stücken enthielt. Dort konnte es die etwaigen Spuren von Sauerstoff abgeben.

Aus dem nachfolgenden Anfang des Protokolls eines Versuches kann man sich eine genaue Vorstellung von der ganzen Methode verschaffen.

Ablesung am Galvanometer in Ctm.	Der aus drei Ablesungen berechnete Ausschlag in Ctm.	Der mittlere Ausschlag in Ctm.	Entsprechende Temperatur in Graden Celsius	Ablesung am Manometer in Ctm.	Entsprechender Druck in Atmosphären	Der mittlere Druck in Atmosphären
59·54				52·10	30·84	
13·25	23·135			52·05	30·80	
59·50	23·133			52·00	30·76	
13·22	23·143	23·143	—147·2	51·95	30·71	30·704
59·51	23·15			51·90	30·65	
13·20	23·153			51·84	30·60	
59·50	23·155			51·78	30·53	
13·18	23·165			51·72	30·47	
59·52	23·165	23·161	—147·4	51·66	30·40	30·408
13·20	23·16			51·60	30·34	
59·52	23·16			51·54	30·30	
13·20	23·168			51·49	30·23	
59·55	23·17			51·42	30·17	
13·22	23.163	23·175	—147·5	51·35	30·09	30·102
59·54	23·178			51·30	30·03	
13·15	23·198			51·24	29·99	

u. s. w.

[1] v. Jolly. Wied. Ann. 6, p. 529. 1879.

Von den nachfolgenden Zahlen bildet eine jede — mit Ausnahme der Zahlen, welche den kritischen Zustand charakterisiren — den Mittelwerth aus zehn nacheinander folgenden Ablesungen — wo nicht das Entgegengesetze bemerkt ist — bei sehr langsam herunterfallendem Drucke. Der horizontale Strich zwischen den Zahlen bedeutet, dass der Versuch an dieser Stelle entweder unterbrochen, oder dass eine neue Flüssigkeitsmenge zur Beobachtung genommen wurde, oder auch dass die neue Reihe von einem anderen Beobachtungstage herrührt.

Kritischer Zustand.

Hat man das Gas bei etwa —146 verflüssigt und dann durch den höheren Gasdruck die Flüssigkeit unsichtbar gemacht, so wird bei sehr langsamer Abnahme des Druckes der Meniscus sichtbar bei der Temperatur von —146·25 bis —146·45 und unter dem Druck von 32·29 bis 32·73 Atmosphären. Beim Hinzulassen des Gases wird der Meniscus undeutlich bei den Drucken von 33 bis 34 Atmosphären. Man erkennt aber das Vorhandensein der Flüssigkeit noch unter dem Drucke von 35 Atmosphären. Die Temperatur steigt dann bis —145·5.

Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes.

Temperatur	Druck in Atmosphären
—146·35	32·08
— 146·45	32·40
146·55	32·28
146·5	32·14
146·7	31·98
— 146·81	31·25
147·0	30·905
147·45	30·59
147·65	30·305
147·72	30·025
— 146·85	31·47
147·3	30·556

Temperatur.	Druck in Atmosphären.	
— 147·67	29·945	
148·02	29·322	
148·205	28·657	
148·91	27·465	
149·15	26·867	
— 149·925	26·414	
150·05	25·93	
150·4	25·093	
— 150·9	24·896	
151·01	24·465	
151·2	23·578	
151·55	23·217	
— 151·79	23·087	
151·925	22·877	
— 153·24	21·462	
153·46	21·103	
153·67	20·672	
153·95	19·521	
154·15	19·027	
154·35	18·693	
— 154·85	18·573	
155·04	18·193	
— 157·675	15·46	Beobachtungen beim aufsteigenden Druck.
158·125	15·26	
158·85	14·93	
159·61	14·48	
160·22	14·09	
— 157·54	15·395	
158·57	15·00	
159·51	14·605	
160·06	14·07	

Die Zahlen für Spannkräfte, welch man beim aufsteigendem Drucke erhält, das heisst wenn die Flüssigkeit wärmer wird, sind ein wenig grösser, wie man es aus der nachfolgenden Reihe sieht:

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
— 147·5	30·845
147·45	30·945
147·35	31·04
147·2	31·145

Bei einem Versuche konnte die Auflösung der Flüssigkeit in Gas sehr scharf beobachtet werden. Die Flüssigkeit wurde unweit unterhalb von — 146 erhalten und dann durch Verlangsamung des Ganges der Pumpen und Hinzulassung des Gases immer wärmer gemacht. Nachdem der Galvanometer — 145·2 und das Manometer 33·7 Atmosphären zeigten und die Flüssigkeit nur durch die Lichtbrechung erkannt werden konnte, wurde der Hahn v' so gelassen, dass der Druck ganz langsam abnahm, während die Temperatur der Flüssigkeit in Folge der erwärmenden Einwirkung des Äthylens noch immer stieg. Nun wurde beobachtet:

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
— 145·2° C.	33·67
145·15	33·62
144·9	33·55
	33·47

Von der Flüssigkeit sah man dann nichts. Einen Augenblick nachher ging durch den Theil der Röhre, welcher die Flüssigkeit enthielt ein Schimmer, der Meniscus wurde deutlich, das Niveau der Flüssigkeit sank tief herunter, indem der grösste Theil in eine dicke Dampfwolke verwandelt wurde. Das Manometer zeigte 33·33 Atmosphären. Die ganze Umwandlung vollzog sich also ohne Druckänderung. Sofort begonnene Bestimmungen zeigten, dass die Temperatur des übrig gebliebenen Restes der Flüssigkeit sank und man beobachtete weiter:

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
— 145·2° C.	33·3
145·1	33·28

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
145·2	33·27
145·25	33·25
145·3	33·24
145·55	33·21
145·85	33·34

bis zuletzt gleich nach der letzten Ablesung alle Flüssigkeit verdampft war.

Die kleinen Abweichungen zwischen den einzelnen Versuchen werden wohl ihren Grund — abgesehen von der eventuellen ungleichen Verunreinigung des Gases — in dem Umstande finden, dass man nicht immer mit einer gleich grossen Menge der Flüssigkeit zu thun hat und dass demzufolge die Druckänderung und die Änderung der Temperatur nicht immer mit der gleichen Geschwindigkeit vor sich gehen. Die definitive Feststellung der Spannkraftscurve muss desshalb einer künftigen Untersuchung vorbehalten werden.

Versuche mit Kohlenoxyd.

Das Kohlenoxyd wurde durch Erhitzen der Ameisensäure mit der concentrirten Schwefelsäure erhalten. Dieses Gas verflüssigt sich leichter als der Stickstoff.

Der kritische Zustand.

Bei sehr langsamer Abnahme des Druckes wurde der Meniscus sichtbar bei — 141·1 und unter dem Drucke von 34·6 bis 35·2 Atmosphären. Beim Hinzulassen des Gases konnte die Flüssigkeit durch Lichtbrechung erkannt werden und verschwand zuletzt unter dem Drucke von 39 Atmosphären, wobei der Galvanometer — 140·2 zeigte.

Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes.

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
— 141·26	34·42
141·53	33·67
142·1	32·97
142·62	32·00
143·2	31·31
143·55	30·63

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
— 143·87	29·99
144·47	29·27
145·17	28·09
145·55	27·42
— 146·08	26·55
146·53	25·12
147·50	24·1
147·73	23·58
148·25	22·97
148·63	22·38
149·1	21·92
149·25	21·6
149·63	20·84
150·03	20·80
150·38	20·48
150·85	19·98
151·15	19·74
151·29	19·39
151·6	18·91
151·95	18·6
— 154·73	16·21
154·84	16·12
155·10	15·87
155·35	15·70
155·80	15·54
156·31	15·19
156·58	14·83
156·78	14·65
157·43	14·38
157·96	13·95
158·23	13·47
159·15	13·14
159·7	12·80

Das Kohlenoxyd siedet unter dem atmosphärischen Druck bei — 190° C.

Versuche mit Sauerstoff.

Die exacte Ermittelung der Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes beim Sauerstoff ist mit viel grösseren Schwierigkeiten als diejenige des Stickstoffes verbunden, da man den reinen Sauerstoff viel schwieriger als den reinen Stickstoff erhält. Denn der Sauerstoff wird durch die Spuren der Luft, welche im Wasser des Gasometers bleiben und durch eventuelle undichte Verschlüsse viel mehr als der Stickstoff verunreinigt. Durch diese Verunreinigung wird die Spannkraft des Dampfers erhöht. Aus diesem Grunde ist auch der Siedepunkt des Sauerstoffes unter dem atmosphärischen Drucke viel grösseren Schwankungen als derjenige des Stickstoffes unterworfen und eignet sich viel weniger zur Vornahme der Calibrirung eines Thermoelementes als derjenige des Stickstoffs. Verflüssigt man den durch die Luft auf ungleiche Weise verunreinigten Sauerstoff, so erhält man eine ganze Reihe von Curven, die um so mehr sich derjenigen der Luft nähern, je unreiner das Gas ist.

Die nachstehenden Zahlen beziehen sich auf den Theil der Curve zwischen — 123·7 und — 145·89° C. Den übrigen Theil werde ich demnächst in einem Nachtrag zu dieser Abhandlung veröffentlichen.

Der kritische Druck beim Sauerstoff liegt, wie ich bereits früher angegeben habe, bei 50 Atmosphären, die kritische Temperatur in der Nähe von — 118.[1]

Spannkraftscurve des gesättigten Dampfes.

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
— 123·7	43·5
124·3	42·4
124·85	41·47
125·2	41·15
125·4	40·75

[1] v. Wroblewski Compt. rend. 97, p. 309—310. 1883. Ich habe dort die kritische Temperatur als erste Näherung zu — 113° C. angegeben. Der Fehler der Bestimmung lag in dem bereits in Wied. Ann. 20, p. 255, 1883, angegebenen Grunde, und zwar darin, dass das Wasserstoffthermometer ausserhalb des Verflüssigungsapparates im Äthylen sich befand. Mit demselben Fehler sind die dort mitgetheilten Verflüssigungsdrucke behaftet.

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
— 125·55	40·34
125·9	39·91
126·3	39·41
126·8	39·09
127·1	38·68
127·5	38·25
127·85	37·94
128·0	37·53
128·6	37·03
— 129·0	36·61
129·2	36·22
129·3	35·91
129·5	35·55
129·8	35·28
130·1	34·86
130·05	34·65
130·8	34·32
131·1	34·07
131·45	33·75
131·7	33·49
131·8	33·19
132·0	32·94
132·3	32·65
132·6	32·4
— 133·2	31·675
134·1	30·51
135·1	29·46
135·85	28·395
136·8	27·35
137·65	26·45
138·15	25·65
138·7	25·04
140·46	23·28
140·69	22·09
— 141·17	21·21

Temperatur.	Druck in Atmosphären.
141·58	20·63
142·48	19·97
142·97	19·39
143·27	19·10
143·85	18·61
144·17	18·22
144·4	17·98
144·63	17·74
144·97	17·38
145·2	17·20
145·3	17·02
145·52	16·83
145·72	16·62
145·89	16·37

Der Sauerstoff siedet unter dem atmosphärischen Druck beim Barometerstand = 74 Cm.) bei — 181·5° C.

In Bezug auf die Siedetemperatur der permanenten Gase unter dem atmosphärischen Druck ist dieselbe Bemerkung zu machen, welche ich in Bezug auf das Äthylen bereits gemacht habe.[1] Hat man nämlich das verflüssigte permanente Gas unter den atmosphärischen Druck gebracht, so ist die Siedetemperatur im erste Augenblicke tiefer als im weiteren Verlaufe des Versuches.

Die hier angegebenen Siedetemperaturen beziehen sich immer auf das erste Stadium des Versuches.

Das Verhalten der atmosphärischen Luft.

Bei der oberflächlichen Betrachtung verhält sich die atmosphärische Luft wie ein einfaches Gas. Ihr gesättigter Dampf scheint seine eigene Spannkraftscurve zu haben, die der Zusammensetzung der Luft entsprechend viel näher an die Curve des Stickstoffs als an diejenige des Sauerstoffs kommt und sich nur wenig von derjenigen des Kohlenoxyds unterscheidet. Die nähere Betrachtung zeigt aber, dass hier viel complicirtere Erscheinungen auftreten, deren Beschreibung ich mir für eine besondere Publication vorbehalte.

[1] v. Wroblewski und Olszewski. Wied. Ann. 20, p. 251. 1883.

Unter dem atmosphärischen Druck siedet die Luft nicht so ruhig wie Sauerstoff und Stickstoff, und die rasche Änderung der Siedetemperatur deutet darauf hin, dass die Flüssigkeit immer stickstoffärmer wird.

Diess sieht man am besten aus folgenden zwei Versuchen.

Barometerstand = 74·11 Cm.

Ablesung am Galvanometer in Cm.	Der aus drei Ablesungen berechnete Ausschlag in Cm.	Entsprechende Temperatur.
11·70		
67·42	27·79	— 191·4
11·98	27·69	190·4
67·30	27·68	190·3
12·08	27·61	189·6
67·30	27·59	189·4
12·18	27·54	188·9
67·22	27·52	188·7
12·18	27·52	188·7
67·22	27·51	188·6
12·22	27·49	188·4
67·18	27·47	188·2
12·25	27·45	188·0
67·10	27·40	187·45
12·35	27·37	187·1
67·08		
	Zweiter Versuch.	
11·60		
67·20	27·73	— 190·8
11·90	27·62	189·7
67·10	27·57	189·2
12·00	27·54	188·9
67·06	27·50	188·5
12·10	27·47	188·15
67·04	27·47	188·15
12·10	27·47	188·15
67·04	27·47	188·15
12·10	27·46	188·05
67·00		

Ist die Luft nicht kohlensäurefrei oder haben sich beim vorhergehenden Verdampfen der Luft die Kohlensäurekrystalle auf dem Boden der Verflüssigungsröhre gebildet, so schäumt die flüssige Luft unter dem atmosphärischen Druck ganz gewaltig und wird in Folge der in der ganzen Flüssigkeit stattfindenden Schaumbildung vollständig undurchsichtig.

§. 8.

Die Erscheinungen im Vacuum. Erstarrbarkeit der Gase. Die Grenze für die Brauchbarkeit des Wasserstoffthermometers.

Lässt man die permanenten Gase unter der Luftpumpe verdampfen, so sinkt ihre Siedetemperatur — wie ich es bereits früher gezeigt habe[1] — unter —200° C. Zu diesem Zwecke wird zuerst das Luftmanometer o abgesperrt und dann der kleine Hahn v' mit dem Dreiweghahn w' durch ein breites Bleirohr verbunden. Durch die passende Stellung des Hahnes w' wird die zweite Bianchi'sche Pumpe von dem Apparate mit dem Äthylen getrennt.

Während auf diese Weise die erste Pumpe immer das Äthylen verdampft, kann die zweite zum Verdampfen des permanenten Gases benutzt werden. Man hat dazu nur den Hahn v' vorsichtig aufzumachen. Nach einigen Pumpenumdrehungen sinkt die Spannkraft des permanenten Gases auf ein paar Centimeter Quecksilberdruck. Zur Messung dieses Druckes dient das zweite kleine Manometer x', welches ganz nahe am Apparate angebracht ist.

Folgende Tabelle enthält

Versuche mit Sauerstoff.

Spannkraft in Cm.	Temperatur.
74·0	— 181·5
16·0	190
14·0	190·05
10·0	190·5
9·0	190·8

[1] v. Wroblewski, Compt. rend. 98, pag. 985. 1884.

Spannkraft in Cm.	Temperatur.
8·6	191·35
8·4	191·6
8·2	191.88
8·0	191·98
7·8	192·13
7·7	192·3
7·6	192·31
7·4	192·53
7·1	192·71
6·8	193·1
6·4	193·58
6·2	194·2
6·0	194·4
5·9	195·13
5·8	195·3
5·6	195·44
5·4	195·5
5·2	196·0
5·0	196·2
4·7	196·3
4·4	196·6
4·2	197·5
4·0	197·7
3·8	198·0
3·6	198·3
3·2	198·7
3·0	198·7
2·8	199·25
2·6	199·4
2·2	199·95
2·0	200·4

Das Gas bis zu diesen Verdünnungen behält den flüssigen Zustand und bleibt, sofern es durch Kohlensäure nicht verunreinigt ist — durchsichtig. Das lebhafte Sieden und Blasenbilden hört bei sehr niedrigen Drucken ganz auf und die Flüssigkeit verbleibt ganz ruhig. Es unterliegt keinem Zweifel,

dass bei weiterer Evacuirung die Temperatur des Sauerstoffes noch um ein paar Grad sinken wird.

Diese Versuche schliessen nicht die Möglichkeit der von Pictet behaupteten Erstarrbarbeit des Sauerstoffes aus.[1]

Folgende Tabelle enthält die Resultate der

Versuche mit Stickstoff.

Spannkraft in Cm.	Temperatur.
74·0	— 193° C.
12·0	201
10·0	201·25
8·0	101·7
7·0	202·5
6·0	204
4·2	206

Bei dem Drucke von 7 bis 6 Cm. und bei der Temperatur von etwa — 203° C. erfolgt die Erstarrung des Stickstoffes. Die Erstarrung geht vor sich nicht immer auf ein und dieselbe Weise. Manchmal bilden sich zuerst auf der Oberfläche der Flüssigkeit die Krystalle, welche gleich nach dem Boden der Röhre herunter sinken. Ein anderes Mal bildet sich auf der Oberfläche auf einmal eine feste Kruste, während der Stickstoff unterhalb dieser Kruste noch flüssig bleibt. Beim weiteren Evacuiren wird die Kruste durch den Dampfdruck von unten zerrissen und die übrig gebliebene Flüssigkeit zerspritzt.[2]

Noch leichter lässt sich das Kohlenoxyd durch Evacuiren zum Erstarren bringen. Die nachstehende Tabelle gibt die Übersicht der Erscheinungen.

---

[1] Pictet, Ann. de Chim. ch. et phys. (5) 13, p. 214, 1878.

[2] Die Stickstoffkrystalle habe ich früher bei einer anderen Gelegenheit beobachtet. Der Stickstoff wurde in einer sehr dünnwändigen engen Glasröhre dem Drucke von 215 Atmosphären ausgesetzt und durch die Sauerstoffexpansion abgekühlt. In dem Augenblicke, wo die Verflüssigung vor sich ging, wurde er plötzlich vom Drucke befreit. Ein Theil Stickstoff wurde dabei fest. Die herabfallenden Krystalle konnte ich nicht für Wasserdampfkrystalle halten, da die charakteristische Form des sechsseitigen Sternes fehlte. Bei der Wiederholung des Versuches ging der Apparat durch Explosion in Trümmer. Ich habe diese Versuche der hohen Gefährlichkeit wegen nicht weiter fortgesetzt, um so mehr, als durch andere Versuche die Erstarrbarkeit des Stickstoffs ausser Zweifel gestellt wurde.

Versuche mit Kohlenoxyd.

Spannkraft in Cm.	Temperatur.
73·5	— 190
16·0	197·5
14·0	198·4
12·0	198·5
11·2	198·75
10·0	198·83
6·0	201·5
4·0	201·6

Vor dem Erstarren wird das Kohlenoxyd zähe, dickflüssig und trüb. Bei dem Druck von 10 bis 9 Cm. und bei der Temperatur von etwa —199° C. erfolgt die Erstarrung dadurch, dass zuerst eine feste Kruste auf der Oberfläche der Flüssigkeit sich bildet. Dann wird die Kruste zerrissen, die ganze Flüssigkeit zerspritzt und in einen Haufen von Krystallen verwandelt. Trennt man jetzt den Apparat von der Pumpe und lässt man das gasförmige Kohlenoxyd ein, so schmelzen die Krystalle.

Es ist in höchstem Grade interessant, dass das Wasserstoffthermometer, dessen Angaben mit denjenigen des gewählten thermo-elektrischen Elementes bis —193° C. übereinstimmen, hier bereits abzuweichen beginnt. Misst man die Erstarrungstemperaturen des Stickstoffs und Kohlenoxyds mit dem Wasserstoffthermometer, so erhält man viel niedrigere Werthe. Dieser Umstand deutet darauf hin, dass man sich hier der Verflüssigungstemperatur des Wasserstoffes nähert. Das die Thermometerkugel ausfüllende Gas zieht sich stärker zusammen, als es die auf dem Mariotte-Gay Lussac'schen Gesetze basirte Thermometergleichung voraussetzt.

Der directe Versuch bestätigt diese Folgerung.

Die auf die Überführung des Wasserstoffes in den flüssigen Zustand bezüglichen Versuche durch Anwendung des Sauerstoffes und Stickstoffes als Kältemittel, wie auch die zur Ermittelung der Siedetemperatur des flüssigen Wasserstoffes angestellten Versuche, werde ich in einer besonderen Abhandlung publiciren und die dazu construirten Apparate beschreiben.

§. 9.

Schlussbemerkungen. Die Methoden der Zukunft.

Ich erlaube mir noch ein paar Bemerkungen.

Die in dieser Abhandlung beschriebenen Methoden sollen den Ausgangspunkt für eine Reihe von Untersuchungen auf dem ganzen Gebiete der Physik und Chemie bilden. Die Erscheinungen, mit welchen sich diese beiden Zweige der Naturwissenschaften beschäftigen, sind bis jetzt nur bei gewöhnlichen oder in einzelnen Fällen bei sehr hohen Temperaturen studirt worden. Es eröffnet sich jetzt für die Forschung die Möglichkeit, die meisten dieser Erscheinungen bei niedrigen Temperaturen zu studiren. Und während die Temperaturscala nach oben uns vorläufig keine Einschränkung bietet, eröffnet sich hier nach unten die Möglichkeit, die Erscheinungen bis zu einem Stadium studiren zu können, welches durch die Natur der Stoffe, aus welchen unsere Erdkugel besteht, eine Grenze für unsere Wissenschaft bildet. In dieser Richtung kann also unser Wissen bis zu einem abgeschlossenen Ganzen gebracht werden. Denn über das Temperaturminimum, welches mit Hilfe des siedenden Wasserstoffes erreicht werden kann, werden wir nie herunter kommen können.

Die in dieser Abhandlung beschriebenen Methoden sind aus der Nothwendigkeit entsprungen, das ganze Gebiet zuerst mit möglichst geringen Mitteln abzusuchen, um erst nach der Feststellung des Sachverhaltes die Versuche in grösserem Massstab durchführen zu können. Diese Methoden reichen, wie gesagt, vollständig aus, um eine Menge von Erscheinungen zu untersuchen. Sie sind aber nicht die Methoden der Zukunft. Sie sind noch viel zu complicirt und an eine Reihe von einschränkenden Bedingungen gebunden. Der in dieser Abhandlung beschriebene Apparat gestattet unter der Luftpumpe ein paar Cubikcentimeter Sauerstoff eine Viertelstunde lang oder Stickstoff minutenlang zu haben. Durch passende Wahl von Glasröhren wird man diese Menge vielleicht um noch ein paar Cubikcentimeter vergrössern können. Aber weiter kommt man sicher in dieser Hinsicht nicht.

Im ersten Augenblick scheint es, dass man einen Schritt vorwärts würde machen können, wenn man das Äthylen durch

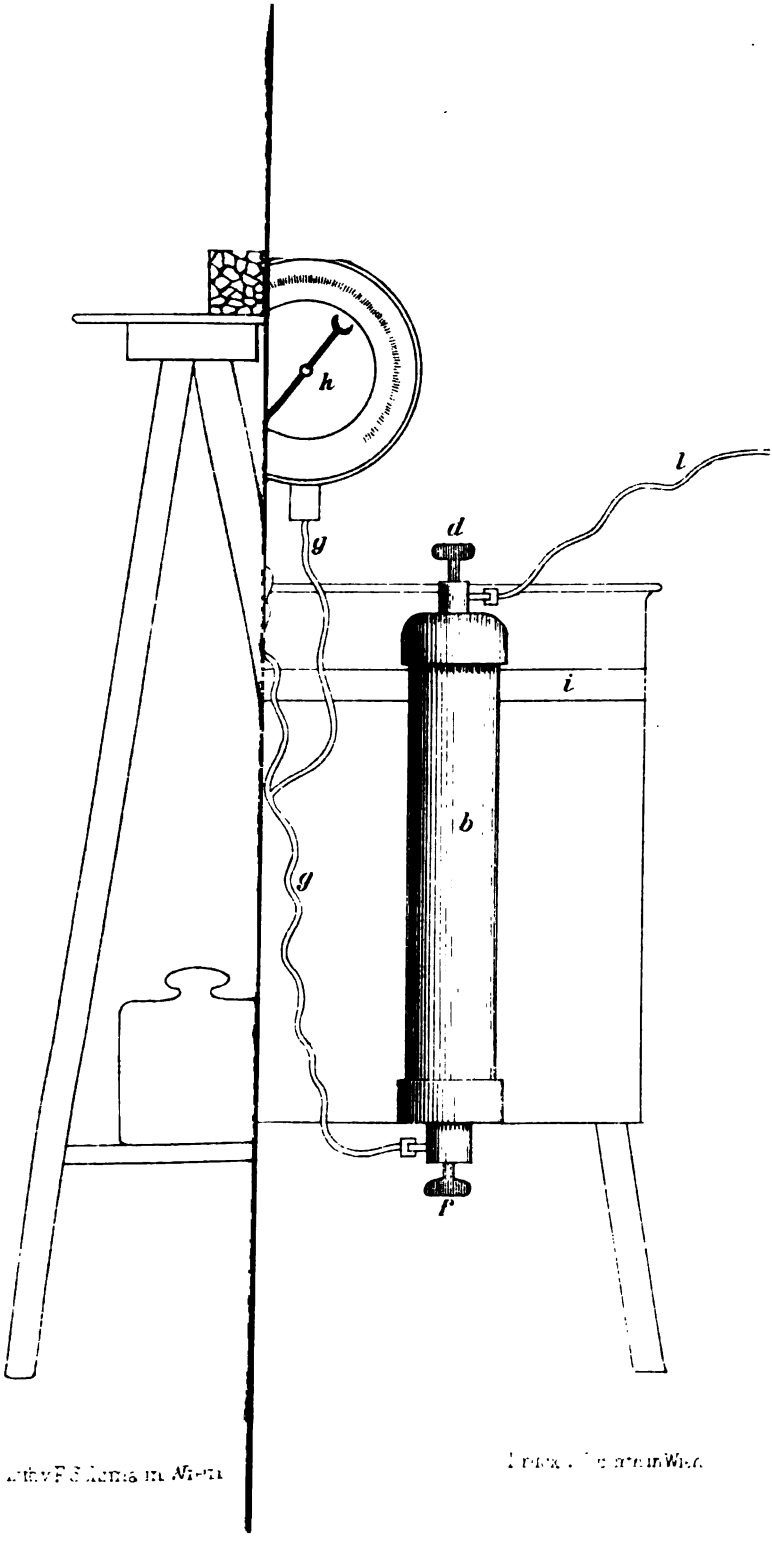
Sumpfgas ersetzen könnte.[1] Die Siedetemperatur des Sumpfgases unter dem atmosphärischen Druck beträgt nach meinen Messungen —155 bis —160° C. Könnte man dieses Gas in so grossen Mengen, wie das Äthylen flüssig erhalten, so würde man bedeutend weitere Röhren für Sauerstoff oder Stickstoff nehmen können, ohne die Gefahr des Zerspringens der Röhre zu befürchten. Leider ist die Darstellung des Sumpfgases aus Zinkmethyl viel zu theuer und die Darstellung aus essigsaurem Natron und Natronkalk liefert für Verflüssigungszwecke viel zu unreines Gas. So lange neue und billigere Methoden, das vollständig reine Sumpfgas zu liefern, nicht gefunden worden sind, kann keine Rede von Versuchen in grösserem Massstab mit diesem Gase sein. Dazu darf nicht vergessen werden, dass zur Verflüssigung des Sumpfgases das flüssige Äthylen oder wenigstens die im Vacuum verdampfende Kohlensäure nöthig sind. Das Verfahren wird desshalb nicht einfacher, sondern noch complicirter.[2]

Der wesentliche Schritt vorwärts, welcher in Hinsicht der Erweiterung der Methode zu thun wäre, ist, sie so weit abzuändern, dass man im Stande wäre, den Sauerstoff so zu giessen, wie man heutzutage das Äthylen giesst. Dass der Sauerstoff gegossen werden kann, dafür sprechen sowohl die Versuche von Pictet, wie die meinigen, die ich in dieser Richtung bis jetzt allerdings nur in allerkleinstem Massstab durchführen konnte und die ich bei einer anderen Gelegenheit beschreiben werde.

---

[1] Aus der bereits citirten Abhandlung Dewar's ersehe ich, dass er den Vorschlag, Sumpfgas als Kältemittel zu benutzen, noch im Herbst 1883 auf der Versammlung von British Association gemacht hat. Ob er seither zu irgend einem praktischen Resultate gelangt, ist mir nicht bekannt.

[2] Daher muss ich die Anpreisungen dieses Mittels durch Cailletet (Compt. rend. 98, pag. 1565, 1884) für stark übertrieben halten, worauf ich in der demnächst zu publicirenden Abhandlung über die Eigenschaften des flüssigen Sumpfgases zurückkommen werde. Die von Herrn Cailletet hieran angeknüpften persönlichen Angriffe (Compt. rend. 99, pag. 213, 1884) will ich jetzt nicht beantworten. Ebenso wenig will ich an diesem Orte auf die jedes Mass der wissenschaftlichen Polemik überschreitenden Ausfälle des Herrn Jamin (Revue de deux Mondes vom 1. September 1884) eingehen, welchen die Lösung dieser Probleme durch die nichtfranzösischen Gelehrten zu verdriessen scheint. Übrigens wird sich mir demnächst die Gelegenheit darbieten, in einer besonderen Publication auf diesen Gegenstand ausführlich zurückzukommen.


h
l
d
g
i
b
g
f

Die Sache wird aber meiner Überzeugung nach nur dann mit Erfolg durchzuführen sein, wenn man zu den Pictet'schen Methoden zurückkommen wird, das heisst, wenn man continuirlich wirkende Apparate benutzen und durch den Kreislauf von mehreren verflüssigten Gasen eine Cascade von den Temperaturen herstellen wird, von denen die letzte Stufe der Strom des flüssigen Sauerstoffs bildet.

Zum Schluss sei es mir gestattet, noch ein Wort des Dankes denen auszusprechen, die die Ausführung dieser Untersuchung ermöglicht haben. Diese Untersuchung ist nicht auf einmal entstanden, sondern stellt das Resultat zweijähriger ununterbrochener Arbeit dar. Es würde zu weit führen anzugeben, wie die Methoden allmälig zur Ausarbeitung kamen, wie die Apparate wiederholentlich verworfen und umgebaut werden mussten, bis die passendsten Bedingungen für den Versuch herausgesucht waren. Der Gegenstand war so neu, dass auch Kleinigkeiten, von welchen ja der Erfolg des Versuches so oft abhängt, erst durch Versuche selbst ermittelt werden mussten. Schliesslich erwies sich das Experiment erst dann wahrhaft erfolgreich, als an die Stelle der menschlichen Hand die kostspieligen Maschinen traten. Diess Alles forderte Mittel, welche bei weitem die Mittel eines kleinen, erst im Entstehen begriffenen Instituts übersteigen. Es sei mir desshalb gestattet, für die wohlwollende Unterstützung, welche meinem Institute von Seite des k. k. österreichischen Ministeriums für Cultus und Unterricht zu Theil wurde, Seiner Excellenz dem Herrn Minister Freiherr Conrad v. Eybesfeld und dem Herrn Referenten Ministerialrath Benno Ritter v. David meinen tiefgefühlten Dank auszusprechen.

Experimentaluntersuchung über die Dielektricitätsconstante einiger Gase und Dämpfe.

Von Dr. **Ignaz Klemenčič**,
Privatdocent und Assistent an der Universität Graz.

(Mit 1 Tafel.)

Einleitung.

In Folge der mächtigen Anregung, welche die Forschungen auf dem Gebiete der Dielektricität durch die elektromagnetische Lichttheorie Maxwell's erfuhren, wurden im Verlaufe der letzten 15 Jahre vielfache Bestimmungen der Dielektricitätsconstante fester und flüssiger Körper gemacht. Weniger beschäftigte man sich mit den Gasen, obwohl bereits Herr Professor Boltzmann in seiner Abhandlung „Experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstante einiger Gase" (Wiener Sitzber. Bd. 69 1874) auf die günstigen Eigenschaften hinwies, welche die Gase vor den festen Körpern auszeichnen und sie zu einer Prüfung jener Theorie besonders geeignet machen. Freilich sind die Schwierigkeiten einer solchen Untersuchung nicht gering, und es dürfte dies ein Grund sein, dass wir im Verlaufe von 11 Jahren, seit dem Erscheinen jener ersten diesbezüglichen Abhandlung, nur noch eine diesen Gegenstand betreffende Arbeit von den Herren Ayrton und Perry[1] zu verzeichnen haben.[2]

---

[1] „On the Specific Inductive Capacity of Gases". Paper read before the Asiatic Soc. of Japan April 18, 1877 und Gordon „A physical treatise on electr. and magn." Vol. I, pag. 130.

[2] Zu erwähnen wäre auch ein vorläufiger Bericht des von der British. Assoc. eingesetzten Comités zum Zwecke einer genauen Messung

Was nun die Resultate der soeben genannten Beobachter anbelangt, so stimmen sie insofern überein, als beide Untersuchungen bei sämmtlichen untersuchten Gasen für die Dielektricitätsconstante Werthe ergaben, die nahezu gleich der Einheit sind; eine Thatsache, die bekanntlich schon Faraday beobachtete. Vergleicht man jedoch die gefundenen Dielektricitätsconstanten mit den Lichtbrechungsexponenten, gemäss der von der elektromagnetischen Lichttheorie aufgestellten Relation, so findet man sofort einen wesentlichen Unterschied in den beiderseitigen Bestimmungen. Während nämlich bei Professor Boltzmann die Quadratwurzeln aus den Dielektricitätsconstanten mit den Lichtbrechungsexponenten eine schöne Übereinstimmung zeigen, ist das bei den von den Herren Ayrton und Perry erhaltenen Werthen nicht der Fall. Dieser Umstand, sowie die Wichtigkeit solcher Bestimmungen nach verschiedenen Methoden mögen die Vornahme dieser Experimentaluntersuchung rechtfertigen.

Bezüglich der hier angewandten Methode muss erwähnt werden, dass sie sich in manchen Punkten von den früheren unterscheidet. Die Herren Boltzmann, dann Ayrton und Perry bestimmten die Änderung der Capacität eines Condensators, welche durch eine Änderung der Dichte des dielektrischen Mittels hervorgebracht wurde, mittelst Potentialmessungen am Elektrometer. Der Verfasser beobachtete die Capacitätsänderung galvanometrisch, indem er einen grossen Condensator[1] durch eine Batterie von mehreren Elementen 64mal in der Secunde lud und eben so oft durch ein Galvanometer entlud. In jenem Falle war also die Ladung des Condensators eine langdauernde, hier eine sehr kurze. Die Frage, ob nicht etwa beim Einlassen des Gases in den Condensator durch Reibung Elektricität erzeugt werde, welche die Richtigkeit des Resultates stören könnte, kommt hier gar nicht in Betracht.

---

der Dielektricitätsconstante des Sprengel'schen Vacuums. Report of the British. Assoc. 1880, pag. 197. Die Versuche dieses Comités scheinen jedoch zu keinem definitiven Abschlusse gelangt zu sein.

[1] Wo hier von einem Condensator gesprochen wird, ist darunter ein Condensator zu verstehen, bei dem das dielektrische Mittel aus einem Gase besteht, dessen Dichte innerhalb gewisser Grenzen geändert werden kann.

Ein besonderer Vortheil dieser Methode besteht darin, dass man von einer guten und sorgfältigen Isolirung bei Weitem nicht so abhängt, wie bei den elektrometrischen Messungen. Demgemäss entfällt auch ein grosser Theil der Schwierigkeiten, welche jene Methoden darboten und es wird auf diesem Wege hoffentlich gelingen in diese Bestimmungen jene Sicherheit zu bringen, durch welche sich jetzt die Messungen des Lichtbrechungsexponenten auszeichnen.

Die nachfolgend beschriebenen Versuche erstreckten sich auf 12 Gase und Dämpfe; nämlich auf die sieben bereits von Herrn Boltzmann untersuchten Gase und auf die Dämpfe des Schwefelkohlenstoffes, der schwefeligen Säure, des Äthers, des Chloräthyls und des Bromäthyls. Die gefundenen Werthe der Dielektricitätsconstante der sieben Gase und des Schwefelkohlenstoffdampfes stimmen sehr gut mit den diesbezüglichen Zahlen von Boltzmann und mit der elektromagnetischen Lichttheorie; die übrigen Dämpfe zeigen diese Übereinstimmung nicht.

Beobachtungsmethode.

Ein Plattencondensator von der Beschaffenheit, dass die Dichte des zwischen den Platten befindlichen Mittels, als welches wir irgend ein Gas voraussetzen wollen, innerhalb gewisser Grenzen geändert werden kann, werde durch eine Batterie mehrmals in der Secunde geladen und ebenso oft durch ein Galvanometer entladen. Ist die Anzahl der Entladungen während einer Schwingungsdauer der Galvanometernadel eine ziemlich beträchtliche, dann erscheint diese constant abgelenkt. Die Ablenkung selbst, die wir mit Φ bezeichnen wollen, ist bekanntlich ein Mass für die Capacität des Condensators. Haben wir daher an der ganzen Anordnung nichts geändert, sondern nur die Dichte des zwischen den Condensatorplatten befindlichen Mittels variirt und dabei am Galvanometer eine Änderung des Φ beobachtet, so müssen wir daraus schliessen, dass die Capacität des Condensators eine andere geworden ist, und dass das dielektrische Mittel bei verschiedenen Dichten auch verschiedene Dielektricitätsconstanten besitzt.

Unter sonst ganz gleichen Umständen, stehe das Gas im Condensator einmal unter dem Drucke H und dann unter h. Die

Dielektricitätsconstanten seien in den beiden Fällen D_H und D_h; die Capacitäten C_H und C_h, dann ist

$$\frac{C_H}{C_h} = \frac{D_H}{D_h} = \frac{\Phi + a}{\Phi}$$

wenn wir mit a die Änderung des Φ bezeichnen, wobei a positiv oder negativ sein kann.

Da a für Druckdifferenzen innerhalb einer Atmosphäre nur einen geringen Bruchtheil von Φ ausmacht, so muss man natürlich trachten, Φ sehr gross zu machen. Dies erreicht man durch ein sehr empfindliches Galvanometer, durch einen Condensator von sehr grosser Capacität, durch eine starke Ladungsbatterie und durch eine grosse Zahl von Ladungen und Entladungen in der Secunde, was man mit einer elektromagnetisch anregbaren Stimmgabel am besten bewerkstelliget.

Unter solchen Umständen wird jedoch Φ zu gross, um mit Spiegel, Fernrohr und Scala beobachtet zu werden, man muss daher eine Compensationsmethode anwenden, indem man die Galvanometernadel einer zweiten gleich grossen, aber entgegengesetzten Einwirkung aussetzt, so dass sie unter dem gleichzeitigen Einflusse beider aus ihrer gewöhnlichen Ruhelage gar nicht abgelenkt erscheint.

Die Compensation könnte in der Weise wie beim Differentialgalvanometer oder wie bei der Wheatstone'schen Brücke durchgeführt werden; allein mit Rücksicht auf die nothwendige Ausnützung der Empfindlichkeit des Galvanometers und auch noch aus anderen Gründen empfiehlt sich eine von diesen Methoden nicht. Praktischer wäre die Compensation so zu machen, dass man einen zweiten, gleich grossen Condensator entgegensetzt und dann beide gleichzeitig durch das Galvanometer entladet, eine Methode ähnlich der von den Herren Ayrton und Perry befolgten. Ich werde auf dieselbe noch am Schlusse zu sprechen kommen.

Hier wurde die Compensation in der Weise hergestellt, dass eine kleine Batterie (Compensationsbatterie) durch einen grossen Widerstand und durch dieselbe Galvanometerrolle derart geschlossen wurde, dass der in diesem Kreise circulirende Strom die Galvanometernadel nach entgegengesetzter Richtung als die

Condensatorentladungen abzulenken strebte. Die Stärke des Stromes konnte mittels des eingeschalteten Widerstandes so regulirt werden, dass die Galvanometernadel durch den Einfluss beider Einwirkungen ihre gewöhnliche Ruhelage gar nicht verliess.

Angenommen, es wäre eine solche Compensation der Condensatorentladungen für einen Druck $= h$ des dielektrischen Mittels erreicht, dann kommen sowohl vom Condensator, als auch von der Batterie in der Zeiteinheit gleiche Elektricitätsmengen in Bewegung. Wird nun die Dichte des Mittels geändert und der Druck $= H$ gemacht, so bemerken wir am Galvanometer sofort einen Ausschlag, der daher rührt, dass das betreffende Gas bei der zweiten Dichte eine andere Dielektricitätsconstante und infolge dessen der Condensator eine andere Capacität besitzt. Vom Condensator aus wird jetzt mehr oder weniger Elektricität in Bewegung gesetzt wie früher, und die Compensation ist gestört. Die jetzt beobachtete Ablenkung ist jedoch nicht die oben mit a bezeichnete Änderung des Φ, da ein Theil der vom Condensator kommenden Elektricität seinen Weg durch den Compensationskreis und nicht durch das Galvanometer nimmt.

Bezeichnet δ die beobachtete Ablenkung, so ist $a = q\delta$ wo q einen zu bestimmenden Reductionsfactor bezeichnet. Wir haben also:

$$D_B = \frac{D_H}{D_h} = 1 + \frac{q\delta}{\Phi}$$

Darin ist $B = H - h$ angenommen, es bedeutet also D_B das Verhältniss der Dielektricitätsconstanten eines Gases bei zwei verschiedenen, einer Druckdifferenz B entsprechenden Dichten.

Es hat sich bei allen untersuchten Gasen herausgestellt, dass δ positiv ist für $H > h$, d. h. die Dielektricitätsconstante wächst mit der Dichte. Beobachtungen bei verschiedenen B haben gezeigt, dass δ der Druckdifferenz B proportinal zunimmt; diesbezügliche ausführliche Versuche wurden namentlich mit der athmosphärischen Luft angetellt. Haben wir daher für ein gewisses B ausgedrückt in Mm. Quecksilber einen Ausschlag δ beobachtet, so ist für die Druckdifferenz von 760 Mm. Quecksilber:

$$D_{760} = 1 + \frac{q\delta\frac{760}{B}}{\Phi}$$

Nehmen wir ferner an, dass die Temperatur nur insofern die Dielektricitätsconstante des betreffenden Mittels beeinflusst, als sie dessen Dichte ändert, so können wir alle Beobachtungen auf die Temperatur von 0° beziehen, indem wir schreiben

$$D = 1 + \frac{q\delta \frac{760}{B}}{\Phi}(1 + \alpha t)$$

wo α den Ausdehnungscoefficienten der Gase bezeichnet.

Hier bedeutet D das Verhältniss der Dielektricitätsconstanten eines Gases bei 0° Temperatur und zwei verschiedenen einer Druckdifferenz von 760 Mm. Quecksilber entsprechenden Dichten.

Da alle Beobachtungen nahezu bei gleicher Temperatur (15°) gemacht wurden, so wäre es namentlich mit Rücksicht auf die Dämpfe correcter gewesen, gar nicht auf 0° zu reduciren und die Dielektricitätsconstanten einfach auf die der Luft zu beziehen, wie dies Mascart bei seinen Untersuchungen über den Lichtbrechungsexponenten der Gase und Dämpfe gemacht hat. Ich habe mich jedoch in dieser Beziehung meinen Vorgängern angeschlossen und bemerke nur, dass die Umrechnung der Resultate leicht ausgeführt werden kann.

Anordnung der Apparate.

Fig. 1 zeigt die Anordnung der Apparate. Von den Platten des Condensators C war immer eine isolirt und die unmittelbar benachbarten zur Erde abgeleitet. Die isolirten Platten waren mit den Quecksilbernäpfchen 3 und 4 leitend verbunden. Die Stimmgabel S besorgte in der bekannten bereits beschriebenen[1] Weise die Ladung und Entladung des Condensators. Vom Quecksilbernäpfchen 1 ging eine Leitung zum Galvanometer und vom Näpfchen 2 eine solche zur Ladungsbatterie LB. Der zweite Pol dieser Batterie war zur Erde abgeleitet. Der eine Pol der Compensationsbatterie CB stand mit der Erde, der andere durch den grossen Widerstand W mit dem Galvanometer in Verbindung. Ein Ende der Galvanometerrolle war ebenfalls zur Erde abgeleitet. Der Condensator, respective die Ladungs- und Compensationsbatterie waren derart eingeschaltet, dass sie die Galvano-

[1] Wiener Sitzber. Bd. 83 und 89.

meternadel nach entgegengesetzten Seiten abzulenken suchten; durch Veränderungen am Widerstande W konnte die Stärke des Compensationsstromes so regulirt werden, dass sich die beiden Wirkungen gerade aufhoben. Den Widerstand W bildeten ein Breguet'scher Widerstandskasten mit 100000 Ohm (Unterabtheilungen 50000, 20000, 20000, 10000) und ein Etalon von Siemen's mit 10000 S. E. (Kleinste Unterabtheilung = 1). Neben der *CB* war noch ein Leitungskreis mit zwei Widerständen w_1 und w_2 und der Quecksilbernäpfchen 5, 6 und 7 angebracht. Wurden die beiden Näpfchen 6 und 7 überbrückt, so war die *CB* in sich geschlossen. Zog man nun den Erdleitungsdraht aus dem Näpfchen 5 heraus und legte ihn in das Näpfchen 7, so wirkte jetzt zwischen denselben Galvanometerenden, wo früher die elektromotorische Kraft E der *CB* thätig war, nur die elektromotorische Kraft e. Bezeichnet ρ den Widerstand der *CB*, so verhält sich

$$\frac{e}{E} = \frac{w_2}{w_1 + w_2 + \rho}$$

Es war $w_1 = 969$ S. E., $w_2 = 5{\cdot}52$ S. E. — Als *CB* dienten vier Dan. Elemente (bei einigen Beobachtungen nur eins); der innere Widerstand dieser beträgt noch nicht 1 S. E. und kann gegen w_1 vernachlässigt werden. Wir haben also

$$\frac{e}{E} = 176{\cdot}6.$$

Als Ladungsbatterie verwendete ich kleine Bunsen'sche Elemente (Lösung von dopp. chroms. K. statt der Salpetersäure). Hin und wieder wurden auch 12 Leclanché Elem. zu Hilfe genommen und nur in einigen wenigen Fällen benützte ich eine gewöhnliche, aus 10 Elem. bestehende Tauchbatterie (Zink-Kohle in Lös. von dopp. chroms. K.).

In Ermangelung eines sehr empfindlichen aperiodischen Galvanometers neuerer Construction wurde ein Meyerstein'sches mit einer feindrahtigen Rolle verwendet; bei demselben musste die Ruhelage immer erst aus drei oder vier Umkehrpunkten abgeleitet werden. Die Galvanometernadel war astatisch und hatte eine Schwingungsdauer von 11·4 Secunden. Um die Empfindlichkeit möglichst zu erhöhen, stellte ich die Scala in

einer Distanz von 6·4 Metern vom Galvanometerspiegel auf. Natürlich musste in dem Falle auch ein sehr gutes stark vergrösserndes Fernrohr zur Beobachtung genommen werden, um die Millimeter an der Scala deutlich zu unterscheiden und noch Zehntel derselben schätzen zu können. Spiegel und Fernrohr waren in der That vortrefflich. Obwohl das Galvanometer mit einem hölzernen Kasten umgeben war, so schien es mir doch vortheilhaft, dasselbe in einem Nebenzimmer aufzustellen, um es auf diese Weise noch besser vor Störungen zu schützen. Die Beobachtung mit dem Fernrohr geschah durch eine Nische in der Wand.

Das Innere des Condensators communicirte zunächst mit einem Manometer M, ferner mit zwei grossen Glasballons G_1 und G_2 von je 50 Cm. Durchmesser und mit einer Luftpumpe. Bei o konnten die zu untersuchenden Gase eingelassen werden. h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 sind Glashähne, die theils während der eigentlichen Beobachtung benützt wurden, theils aber auch nur dazu dienten, um undicht gewordene Stellen leichter ausfindig zu machen.

Der Condensator.

Der Condensator (Fig. 2) bestand aus 30 kreisförmigen, mit Nickel überzogenen Messingplatten, welche auf einem Teller übereinander gelagert und durch kleine Hartgummischeibchen getrennt waren. Die Platten hatten einen Durchmesser von 25·76 Cm. und waren ungefähr 0·5 Cm. dick; jede war an ihrem Umfange mit einer kleinen Klemmschraube versehen. Die unterste sowie jede zweite darauffolgende war mit den Metallbestandtheilen des Tellers verbunden und dieser zur Erde abgeleitet. Unter der ersten Platte, unmittelbar ober der Ausmündung des Tellercanals war noch eine kleinere Metallplatte angebracht, gegen welche das in den Condensator einströmende Gas strich. Diese Vorsicht wurde geübt, um jede Deformation der untersten Condensatorplatte durch das einströmende Gas zu vermeiden. Es sei schon hier erwähnt, dass ich bei den ersten Versuchen mit der Luft, diese direct gegen die unterste Condensatorplatte streichen liess und erst später die kleinere Platte dazwischen legte; es konnte jedoch ein Unterschied der Resultate in den beiden Fällen nicht constatirt werden.

Bei einer späteren Reihe von Versuchen wurde die Distanz der Condensatorplatten vergrössert und der Condensator nur aus 22 solchen aufgebaut.

Unmittelbar um den Condensator war ein cylindrischer Mantel *Z* angebracht; dieser bestand aus zwei concentrischen Zinkblechröhren, deren Zwischenraum mit Paraffin ausgegossen war. Der Mantel überragte den Condensator etwas an Höhe und war mit einer kreisförmigen Zinkplatte überdeckt. Mantel und Zinkplatte waren mit den zur Erde abgeleiteten Platten verbunden. Diese Umhüllung des Condensators schützte ihn vor äusseren elektrischen Einflüssen und verminderte den vom Gase erfüllten Raum unter der Glasglocke, die über das Ganze gestülpt war. Den letzteren Zweck erfüllte auch eine dem oberen Theile der Glasglocke angepasste Paraffinform *P*. Die Glasglocke war natürlich auf die am Teller angekittete Glasplatte aufgeschliffen und überhaupt Alles luftdicht schliessend gemacht.

Bei der kleineren Plattendistanz waren die Hartgummischeibchen kreisförmig, hatten eine Dicke von 0·089 Cm. und einen Durchmesser von 0·5 Cm. Durch Vergleich mit einem anderen, sogenannten absoluten Condensator wurde die Capacität des Condensators und der Zuleitungsdrähte = 13604 Cm. nach mechanischem Maasse gefunden. Auf einen kleinen Theil dieser Gesammtcapacität hat jedoch die Änderung der Dielektricitätsconstante des zwischen den Platten befindlichen Mittels keinen Einfluss. Die Capacität der Zuleitungsdrähte wird nicht geändert, wenn man die Dichte des dielektrischen Mittels variirt; dann aber bleibt auch jener Theilconstant, der auf die Oberfläche der Condensatorplatten entfällt, welche von den Hartgummiplättchen gedeckt wird. Dieser Theil lässt sich ungefähr berechnen. Man findet, dass er sich zur Gesammtcapacität verhält wie 0·66 : 165·9, das ist ungefähr 0·4%, wenn man die Dielektricitätsconstante des Hartgummis mit 3·5 (nach Boltzmann) annimmt. Die Capacität der Zuleitungsdrähte wurde experimentell bestimmt. Wird die Gesammtcapacität durch 37400 ausgedrückt, so macht die der Zuleitungsdrähte 106 aus, das ergibt 0·28%. Wir haben daher im Ganzen 0·68% von der Gesammtcapacität, auf welche eine Änderung der Dichte des dielektrischen Mittels keinen Einfluss üben kann.

Im zweiten Falle, wo der Condensator bei vergrösserter Plattendistanz nur aus 22 Platten gebildet wurde, verhielt sich die Capacität der Zuleitungsdrähte zur Gesammtcapacität wie 117 : 8457, das macht 1·4%.

Die Hartgummiplättchen, die hier benützt wurden; waren quadratisch und hatten ungefähr 0·09□Cm. Fläche; dieser Theil macht also 0·57%.

Es entfallen daher 1·97% der Gesammtcapacität auf den veränderlichen Theil.

Zwei Umstände müssen noch berücksichtigt werden; nämlich dass die Capacität des Condensators bei zwei verschiedenen Drücken beeinflusst wird erstens durch die cubische Compressibilität der Platten und Hartgummischeibchen, und zweitens durch das einströmende, zuweilen sehr stark abgekühlte Gas insofern, als durch dasselbe eine Temperaturänderung in den Condensatorbestandtheilen hervorgebracht wird.

Was den ersten Punkt betrifft, so ergibt eine Betrachtung des cubischen Compressibilitätscoefficienten des Messings (0·000001106 für den Druck eines Kilogramms auf □Cm. nach Wertheim), dass der Theil der Capacitätsänderung, welcher auf die Änderung der Plattenoberfläche entfällt, sehr klein ist und ganz vernachlässigt werden kann. Ein Fehler in entgegengesetztem Sinne entsteht ferner dadurch, dass infolge der Zusammendrückbarkeit des Hartgummis mit dem Drucke auch die Plattendistanz ein wenig geändert wird. Dieser Fehler mag immerhin einen kleinen Einfluss auf das Resultat haben, dessen Eliminirung erwünscht wäre; aber selbst dann, wenn man die cubische Compressibilität des Hartgummis jener des Wassers (0·000048 nach Grassi) gleichsetzt, beträgt dieser Fehler bei der atmosphärischen Luft nur etwa 2%.

Bezüglich des zweiten Punktes ist zu bemerken, dass namentlich die Dämpfe sehr stark abgekühlt im Condensator anlangten. Bedenkt man jedoch, dass die Condensatorplatten eine Metallmasse von mehr als 60 Kilogramm repräsentirten, so ist es begreiflich, dass die geringen Gasmengen sofort die Temperatur der sie umgebenden Platten annehmen mussten, ohne die der letzteren wesentlich zu alteriren.

Unter diesen Umständen konnte auch die Temperatur der Hartgummischeibchen[1] nicht merklich geändert werden. Besser als diese Erwägungen zeigte jedoch ein Versuch mit der schwefeligen Säure, dass Störungen von dieser Seite nicht zu befürchten waren.

Vorgang bei der Beobachtung.

Etwa eine Stunde vor Beginn der Beobachtungen wurden die zur *LB* und *CB* verwendeten Elemente in das Beobachtungszimmer gebracht, damit sie ihre Temperatur mit der des Zimmers ausglichen. Bei der äusserst feinen Compensation war es eben nothwendig, alle Änderungen der elektromotorischen Kräfte und Widerstände thunlichst abzuhalten.

Die zwei grossen Glasballons und der Condensator wurden ausgepumpt und hierauf die Hähne h_1 und h_2 geschlossen. Der Recipient mit dem zu untersuchenden Gase wurde mittelst eines dicht schliessenden Kautschukschlauches mit der Mündung *o* verbunden.

War das Gas noch zu reinigen und zu trocknen, so wurden dazwischen die entsprechenden Apparate eingeschaltet. — Im Glasrohre zwischen *o* und dem Hahne h_o war ein Baumwollpropf als Filter angebracht. Nun wurden der Condensator und seine Verbindungscanäle mit dem zu untersuchenden Gase ausgewaschen, indem man das ganze System auspumpte, hierauf das Gas einliess und wieder auspumpte. Diese Manipulation wurde, je nachdem es nothwendig erschien, mehrmals wiederholt, bis man annehmen konnte, dass vom vorhergehend untersuchten Gase im Condensator nur mehr unmerkliche Spuren vorhanden sind. Hierauf wurde durch Regulirung des Widerstandes *W* die Compensation am Galvanometer hergestellt. Es sei bemerkt, dass nicht immer eine genaue Zurückführung der Galvanometernadel auf die Ruhelage angestrebt wurde; man begnügte sich zumeist mit einer Compensation bis auf 10 Sctl. was natürlich vollkommen ausreichte. Nur in einigen wenigen Fällen war die Compensationsdifferenz etwas grösser, da es

[1] Der Wärmeausdehnungscoefficient des Hartgummi ist nach Kohlrausch (Pogg. A. 149) zwischen 16·7° und 25·3° = 0·000077.

infolge einer Lücke in W nicht möglich war genauer zu compensiren.[1]

War die Compensation erreicht, so begann die eigentliche Beobachtung. Ein Gehilfe wurde bei den Hähnen postirt und hatte dieselben auf Commando zu öffnen und zu schliessen. Die Galvanometer- und Manometerablesungen wurden von einer Stelle mittels verschiedener Fernrohre gemacht. Die Beobachtung begann immer bei einem niederen Drucke im Condensator. War der Stand Galvanometernadel bei diesem Drucke abgelesen, so wurde vom Gehilfen der Hahn h_0 geöffnet und das in der Untersuchung befindliche Gas in den Condensator eingelassen; dann wurde der Hahn h_0 wieder geschlossen, der Stand des Manometers notirt und die Galvanometerbeobachtung gemacht. Hierauf wurde der Hahn h_1 geöffnet und das Gas aus dem Condensator in den ausgepumpten Ballon G_1 geleitet. Hatte sich zwischen Condensator und Glasballon das Gleichgewicht hergestellt, so wurde h_1 geschlossen und h_2 geöffnet, dadurch wurde der schon theilweise evacuirte Condensator noch besser entleert. Nachdem auch der Hahn h_2 wieder geschlossen und die Manometerablesung gemacht war, wurde abermals bei diesem niederen Drucke der Stand der Galvanometernadel bestimmt. Darauf wurde wieder Gas eingelassen u. s. f. bis man im ganzen 7 oder 9 Beobachtungen und zwar abwechselnd bei niederem und hohen Drucke hatte. Eine solche Beobachtungsreihe dauerte 10—15 Minuten und wurde stets bei einem niederen Drucke angefangen und beendigt.

Der soeben dargestellte Beobachtungsvorgang musste eingeschlagen werden, um die Fehler möglichst zu eliminiren, welche aus einer beständigen Wanderung der Ruhelage der Galvanometernadel eintreten konnten. Während der lange dauernden Beobachtungsreihe konnten ja verschiedene Umstände die Compensation stören. — Eine minimale Alteration des Widerstandes W und des Ganges der Stimmgabel, die geringste Änderung der elektromotorischen Kraft der CB und LB waren genügend, um die Galvanometernadel in Bewegung zu setzen. Diese Bewegung war in den weitaus meisten Fällen eine gleich-

[1] Da der eine Widerstandskasten Ohm, der andere S. E. hatte und bei einem die kleinste Unterabth. = 10000 Ohm war.

mässige und keine rasche, so dass infolge der Differenzbeobachtungen die Richtigkeit des Resultates nicht beeinträchtigt wurde. In einigen besonders günstigen Fällen war jedoch eine solche Bewegung gar nicht vorhanden und die Nadel machte nur jene Ruhelagenverschiebungen, welche durch die Capacitätsänderung des Condensators bedingt waren.

Trotzdem ich das von der Luft erfüllte Volumen im Condensator durch verschiedene, bereits erwähnte Ballaststücke möglichst reducirte, so war darin immerhin noch ein 4—5 Liter fassender Raum vorhanden und es wurden für jede solche Beobachtungsreihe circa 15—20 Liter Gas von normaler Dichte gebraucht, wobei man den Condensator jedesmal ungefähr bis zum Atmosphärendrucke füllte. Bei den Dämpfen konnte dieser natürlich nicht erreicht werden, theils weil bei einigen die Spannung bei etwa 16° zu gering ist, theils aber auch weil die Verdampfung zu langsam vor sich ging.

Alle untersuchten Gase wurden in Recipienten unter Wasser aufgefangen.

Nach Beendigung einer solchen Beobachtungsreihe wurde Φ bestimmt und schliesslich das Gas auf seine Leitungsfähigkeit geprüft, d. h. es wurde untersucht, ob ein Galvanometerausschlag bemerkbar war, wenn man die beiden Pole der *LB* mit den beiden Belegungen des Condensators verband und in diesen Kreis auch das Galvanometer einschaltete. Wäre eine solche Leitungsfähigkeit vorhanden gewesen, dann hätte offenbar die Dielektricitätsconstante zu klein ausfallen müssen. Es sei schon jetzt bemerkt, dass bei keinem Gase ein Galvanometerausschlag constatirt werden konnte; nur bei der atmosphärischen Luft war in einem später zu besprechenden Falle ein beobachtbares Leitungsvermögen zu constatiren.

An einem in der Nähe des Condensators aufgehängten Thermometer wurden die Temperaturen abgelesen. Im Interesse einer sehr genauen Messung wäre es natürlich wünschenswerth, die Temperatur der Condensatorplatten direkt zu bestimmen und diese als die Temperatur des untersuchten Gases anzunehmen. Vielleicht gelingt es bei späteren Bestimmungen auch in dieser Richtung eine Verbesserung anzubringen.

Bestimmung von Φ.

War eine Serie von Beobachtungen gemacht, so wurde die Stimmgabel arretirt, die beiden Näpfchen 5 und 6 überbrückt, der Erdleitungsdraht aus dem Näpfchen 5 gezogen und in das Näpfchen 7 gesteckt. Das Galvanometer war also jetzt durch den grossen Widerstand W mit zwei Punkten eines Stromkreises verbunden, zwischen denen die Potentialdifferenz e herrschte, wo

$$e = \frac{w_2}{w_1 + w_2} E$$

ist und die Buchstaben die bekannte Bedeutung haben. Es wurde der Galvanometerausschlag φ beobachtet. Während der Condensatorentladung war jedoch zwischen denselben Punkten der Galvanometerleitung die gesammte elektromotorische Kraft E thätig. Bezeichnen wir die Ablenkung der Galvanometernadel in diesem Falle mit Ψ, so ist

$$\Psi = \frac{w_1 + w_2}{w_2} \varphi = 176 \cdot 6\, \varphi^1$$

Ψ ist der Ausschlag, welcher der Gesammtcapacität des Condensators und der Zuleitungsdrähte entspricht. Davon ist der unveränderliche Theil abzuziehen. Wir bekommen also den Ausschlag Φ, welcher der Berechnung der Dielektricitätsconstante zu Grunde gelegt werden muss, wenn wir setzen für die kleinere Plattendistanz

$$\Phi = \Psi(1 - 0 \cdot 0068)$$

und für die grössere

$$\Phi = \Psi(1 - 0 \cdot 0197)$$

Bestimmung von q.

Der kleine Ausschlag δ, welchen man am Galvanometer beobachtet, entspricht nicht ganz der Änderung der Condensatorcapacität, da ein Theil der aus dem Condensator kommenden Elektricität durch den Widerstand W und die Compensationsbatterie zur Erde abfliesst. Dieser kleine Theil lässt sich leicht

---

[1] Unter Berücksichtigung, dass w_2 sehr klein gegen W ist.

berechnen, und es ist klar, dass der Coefficient q mit dem wir δ multipliciren müssen, um den der Änderung der Capacität wirklich entsprechenden Ausschlag α zu bekommen, gegeben ist durch die Relation:

$$= \frac{W+r}{W}$$

wo r den Widerstand der Galvanometerrolle bedeutet.

Es wäre demnach für $W = 100000$ Ohm, $q = 1{\cdot}0453$, da die Galvanometerrolle einen Widerstand von 4530 Ohm hatte. Dies gilt aber streng genommen nur für einen constanten Strom; die experimentelle Bestimmung des q mit Hilfe eines constanten Stromes lieferte auch wirklich den Werth $q = 1{\cdot}0449$. Bei der Condensatorentladung sprechen jedoch neben den Widerständen auch die Inductionscoefficienten mit und in der That ergab die Beobachtung mit der Condensatorentladung:

$$q = 1{\cdot}042 \text{ für } W = 100000 \text{ Ohm}$$

und $$q = 1{\cdot}040 \quad „ \quad „ \quad = 109430 \quad „$$

Diese Werthe wurden dann stets der Berechnung zu Grunde gelegt.

Die Bestimmung geschah in der Weise, dass der Condensator nur zu einem sehr niederen Potentiale (etwa $^1/_3$ Dan. E) geladen und die Galvanometerablenkung beobachtet wurde, einmal wenn die Leitung durch den grossen Widerstand geschlossen und dann wenn sie offen war. Natürlich wurde in diesem Falle die Compensationsbatterie ausgeschaltet.

Beobachtungsresultate.

In den nachfolgenden Tabellen sind die mit den einzelnen Gasen und Dämpfen erhaltenen Resultate angeführt. Darin ist bezeichnet mit

LB die Ladungsbatterie,
CB die Compensationsbatterie,
W der in der Compensationsleitung enthaltene Widerstand in Ohm,
T die Temperatur,
φ der Ausschlag, wenn das Galvanometer sammt W in einem Nebenzweig der *CB* eingeschaltet war,

$\Phi = 176 \cdot 6\, \varphi\, (1 — 0 \cdot 0068)$ für die kleinere, und
$= 176 \cdot 6\, \varphi\, (1 — 0 \cdot 0197)$ für die grössere Plattendistanz,
D das Verhältniss der Dielectricitätsconstanten eines Gases bei 0° Temperatur und zwei verschiedenen einer Druckdifferenz von 769 Mm. Quecksilber entsprechenden Dichten,
b der Druck unter welchem das Gas im Condensator stand in Millimetern Quecksilber,
R die beim betreffenden Drucke bestimmte Ruhelage der Galvanometernadel
δ und B die Differenz der aus den einzelnen übereinander stehenden Ruhelagen und Drücken abgeleiteten Mittel-
$a = 1 \cdot 042\, \delta$ respective $1 \cdot 040\, \delta$
B. E. = Bunsen'sches Element (mit Lösung von doppelchromsauren Kali statt Salpetersäure),
L. E. = Leclanché Element,
D. E. = Daniell'sches Element.

1. Atmosphärische Luft.

Zu Beginn dieser Bestimmungen wurden die untersuchten Luftmengen dem Beobachtungslocale entnommen und hatten vor dem Eintritte in den Condensator einen Trocknungsapparat zu passiren. Es stellte sich jedoch sehr bald ein eigenthümlicher Übelstand ein. Da nämlich die Beobachtungsscala nicht gerade gegen ein Fenster gekehrt war und sich die Wintertage überhaupt durch keine sonderliche Helligkeit auszeichnen, so musste die Scala mit zwei Gasflammen beleuchtet werden, die mit geringen Unterbrechungen den ganzen Tag brannten; zu diesen kamen bei eintretender Dunkelheit noch einige hinzu. Es zeigte sich nun, dass die Abends gemachten Bestimmungen gewöhnlich kleinere Werthe für die Dielektricitätsconstante lieferten, als die Vormittags. Löschte ich die meisten Flammen aus und lüftete das Zimmer einige Zeit hindurch, so bekam ich wieder bessere Resultate. Hiedurch wurde es wahrscheinlich gemacht, dass die Luft durch die Gasflammen in irgend einer Weise verunreinigt wird. Ich untersuchte, nachdem ich den Condensator mit solcher Luft gefüllt hatte, dieselbe in Bezug auf ihre Leistungsfähigkeit in der schon beschriebenen Weise und bekam in der That beim

Schlusse des Kreises eine Ablenkung der Galvanometernadel um einige Scth.

Unter dem Einflusse von Gasflammen erlangt also die Luft eine ziemlich beträchtliche Leitungsfähigkeit; eine Erscheinung, die bereits Herr W. Giese[1] untersucht hat.

Um derartigen Störungen der Beobachtungen zu entgehen, wurde bei den weiteren Versuchen die Luft direct aus dem Freien in den Condensator geleitet. Von den Beobachtungsreihen, welche mit der Zimmerluft gemacht wurden, sind in den Tabellen I—V jene angeführt, welche an den Vormittagen zuerst gemacht wurden, bei denen sich also der störende Einfluss der Flammen noch nicht bemerkbar machen konnte.

LB 22 *B. E.* — *CB.* 4 *D. E.*

I.

W 97520, $T = 17°$, $\varphi = 212 \cdot 5$

b		R	
18·5		455·8	
	726.5		434·7
44·0		451·6	
	733·5		433·0
48·8		449·8	
	733·5		433·1
61·0		451·1	
43·1	734·5	452·1	433·6

$\delta = 18 \cdot 5$, $B = 691 \cdot 4$
$a = 19 \cdot 28$
$\Phi = 37290$
$D = 1 \cdot 000603$

[1] Wied. Ann. Bd. XVII.

II.

$W = 95910$, $T = 16{\cdot}9$, $\varphi = 214{\cdot}4$

b		R		
12·6		410·2		
	729·5		430·0	$\delta = 18{\cdot}5$, $B = 692{\cdot}1$
34·6		412·1		$a = 19{\cdot}28$
	727·9		432·9	$\Phi = 37620$
44·2		415·6		$D = 1{\cdot}000597$
	727·9		434·8	
54·0		417·8		
36·3	728·4	413·9	432·4	

III.

$W = 96010$, $T = 17{\cdot}1$, $\varphi = 214{\cdot}0$

b		R		
15·6		416·5		
	727·9		397·1	$\delta = 17{\cdot}9$, $B = 689{\cdot}2$
36·4		414·3		$a = 18{\cdot}66$
	727·9		395·5	$\Phi = 37550$
47·0		412·6		$D = 1{\cdot}000581$
	727·9		396·9	
56		414·2		
38·7	727·9	414·4	396·5	

IV.

$W = 95840$, $T = 17{\cdot}2$, $\varphi = 213{\cdot}3$

b		R		
21·0		452·2		
	729·9		470·2	$\delta = 18{\cdot}2$, $B = 689{\cdot}3$
38·0		452·8		$a = 18{\cdot}97$
	729·9		472·5	$\Phi = 37430$
47·0		453·0		$D = 1000593$
	729·9		469·8	
56·6		452·5		
40·6	729·9	452·6	470·8	

V.

$W = 100846$, $T = 17{\cdot}2$, $\varphi = 209{\cdot}2$

b		R		
181·0		456·5		
	735·0		473·2	$\delta = 13{\cdot}7$, $B = 534{\cdot}8$
197·0		461·9		$a = 14{\cdot}3$
	735·0		478·2	$\Phi = 36700$
207·0		468·7		$D = 1{\cdot}000588$
	735·0		483·6	
216·0		471·1		
200·2	735·0	464·6	478·3	

VI.

$W = 99250$, $T = 16°$, $\varphi = 212{\cdot}4$

b		R		
21·2		531·8		
	721·5		547·9	$\delta = 17{\cdot}55$, $B = 671{\cdot}0$
38·0		525·8		$a = 18{\cdot}29$
	721·5		540·5	$\Phi = 37270$
53·6		522·3		$D = 1{\cdot}000588$
	721·5		542·0	
63·6		521·9		
	721·5		535·4	
76·2		517·7		
50·5	721·5	523·9	541·45	

VII.

$W = 99390$, $T = 16°$, $\varphi = 211{\cdot}8$

b		R		
24·6		565·4		
	721·7		551·0	$\delta = 17{\cdot}1$, $B = 672{\cdot}1$
37·0		572·4		$a = 17{\cdot}83$
	721·7		558·6	$\Phi = 37170$
48·4		576·7		$D = 1{\cdot}000574$
	721·7		561·6	
61·6		583·0		
	721·7		565·2	
76·2		583·6		
49·6	721·7	576·2	559·1	

VIII.

$W = 100000 \quad T = 16°, \quad \varphi = 211{\cdot}0$

b		R		
18·6		494·1		
	725·2		476·8	$\delta = 17{\cdot}5, \quad B = 675{\cdot}4$
40·0		494·6		$a = 18{\cdot}25$
	726·5		478·4	$\Phi = 37020$
51·6		497·4		$D = 1{\cdot}000587$
	726·5		480·7	
64·8		498·6		
	726·5		482·8	
79·0		501·1		
50·8	726·2	497·2	479·7	

IX.

$W = 100000, \quad T = 16°, \quad \varphi = 210{\cdot}5$

b		R		
18·6		617·3		
	726·5		632·7	$\delta = 17{\cdot}2, \quad B = 675{\cdot}8$
43·4		613·5		$a = 17{\cdot}93$
	727·1		628·5	$\Phi = 36940$
51·6		609·9		$D = 1{\cdot}000577$
	727·1		626·6	
64·2		608·2		
	727·1		624·6	
78·2		605·7		
51·2	727·0	610·9	628·1	

X.

$W = 100000, \quad T = 16, \quad \varphi = 209{\cdot}9$

b		R		
16·6		545·8		
	727·5		529·0	$\delta = 17{\cdot}1, \quad B = 674$
48·8		547·0		$a = 17{\cdot}83$
	727·5		530·1	$\Phi = 36840$
53.6		549·0		$D = 1{\cdot}000575$
	725·5		532·6	
67·8		549·2		
81·4	727·5	550·1	532·6	
53·5	727·5	548·2	531·1	

XI.

$W = 100000$, $T = 16{\cdot}4$, $\varphi = 210{\cdot}0$

b		R		
220		559·4		
	727·6		547·4	$\delta = 13{\cdot}04$, $B = 494{\cdot}5$
219·4		561·1		$a = 13{\cdot}59$
	727·6		548·3	$\Phi = 36850$
230·4		562·0		$D = 1{\cdot}000600$
	727·6		549·3	
243·8		562·1		
	727·6		548·7	
252·0		562·7		
233·1	727·6	561·46	548·42	

XII.

$W = 100000$, $T = 16{\cdot}4$, $\varphi = 210$

b		R		
212·8		564·7		
	728·0		549·2	$\delta = 13{\cdot}1$, $B = 482{\cdot}2$
240·2		563·4		$a = 13{\cdot}65$
	728·0		550·7	$\Phi = 36850$
249·6		564·2		$D = 1{\cdot}000618$
	728·4		551·9	
258·6		564·0		
	728·4		553·7	
268.8		566·1		
246·0	728·2	564·5	551·4	

XIII.

$W = 10000$, $T = 16{\cdot}4$, $\varphi = 209{\cdot}7$

b		R		
216·0		565·5		
	727·9		579·8	$\delta = 14{\cdot}0$, $B = 488{\cdot}2$
231·8		568·3		$a = 14{\cdot}58$
	728·1		580·6	$\Phi = 36790$
240·8		565·6		$D = 1{\cdot}000653$
	728·1		578·6	
250·4		566·9		
	728·5		579·5	
260.4		561·5		
240·0	728·2	565·6	579·6	

XIV.

$W = 100000, \quad T = 16{\cdot}4, \quad \varphi = 209{\cdot}7$

b		R		
222·4		564·8		
	728·3		577·9	$\delta = 12{\cdot}55, \quad B = 475{\cdot}6$
247·8		563·4		$a = 13{\cdot}08$
	728·3		577·1	$\Phi = 36790$
255·6		564·4		$D = 1{\cdot}000601$
	728·5		576·4	
264·0		564·8		
	728·9		571·6	
274·6		558·6		
252·9	728·5	563·2	575·75	

XV.

$W = 100470, \quad T = 16{\cdot}4, \quad \varphi = 209{\cdot}0$

b		R		
204·2		541·9		
	727·3		557·5	$\delta = 13{\cdot}2, \quad B = 476{\cdot}5$
238·4		548·2		$a = 13{\cdot}75$
	727·3		560·7	$\Phi = 36670$
248·8		549·2		$D = 1{\cdot}000633$
	727·3		564·0	
275·8		552·2		
	727·3		569·0	
286·8		556·4		
250·8	727·3	549·6	562·8	

XVI.

$W = 100376, \quad T = 16{\cdot}7, \quad \varphi = 209{\cdot}0$

b		R		
408·2		542·9		
	726·8		535·9	$\delta = 9{\cdot}1, \quad B = 290$
437·2		545·0		$a = 9{\cdot}48$
	726·8		536·1	$\Phi = 36670$
440·8		546·2		$D = 1{\cdot}000718$
	726·8		535·9	
446·0		542·9		
	726·8		532·5	
451·0		544·1		
436·8	726·8	544·2	535·1	

XVII.

$W = 100376$, $T = 16{\cdot}7$, $\varphi = 209$

b		R		
400		544·7		
	727·0		541·7	$\delta = 6{\cdot}6$, $B = 292{\cdot}3$
435·6		551·1		$a = 6{\cdot}88$
	727·2		541·8	$\Phi = 36670$
440·8		548·2		$D = 1{\cdot}000478$
	727·2		542·2	
446·4		549·4		
	727·2		541·8	
451·8		549·1		
434·9	727·2	548·5	541·9	

XVIII.

$W = 100534$, $T = 16{\cdot}6$, $\varphi = 208{\cdot}0$

b		R		
390·4		555·0		
	725·8		564·1	$\delta = 7{\cdot}9$, $B = 298{\cdot}7$
428·6		555·6		$a = 8{\cdot}23$
	725·8		563·7	$\Phi = 36500$
434·0		555·4		$D = 1{\cdot}000602$
	725·8		563·3	
438·4		555·4		
	726·2		562·8	
444·4		556·0		
427·2	725·9	555·6	563·5	

XIX.

$W = 1000534$, $T = 16{\cdot}6$, $\varphi = 208{\cdot}0$

b		R		
404·0		554·8		
	725·8		564·5	$\delta = 8{\cdot}0$, $B = 297{\cdot}5$
427·2		555·9		$a = 8{\cdot}33$
	726·8		564·4	$\Phi = 36500$
432·0		456·6		$D = 1{\cdot}000618$
	726·8		563·0	
437·4		556·0		
	726·8		563·6	
444·0		556·3		
429·0	726·5	555·9	563·9	

XX.

$W = 100514, \quad T = 16 \cdot 7, \quad \varphi = 208 \cdot 1$

b		R		
412·6		559·8		
	726·4		551·1	$\delta = 7 \cdot 67, \quad B = 296 \cdot 0$
428·4		558·5		$a = 7 \cdot 99$
	725·8		551·9	$\Phi = 36520$
432·0		559·9		$D = 1 \cdot 000596$
	726·8		554·1	
437·0		561·4		
	726·8		552·3	
442·0		560·2		
430·4	726·4	560·0	552·33	

XXI.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Werthe von D übersichtlich zusammengestellt

B	D	Mittel D
691·4	1.000603	
692·1	597	
689·2	581	1·000592
689·3	593	
534·8	583	
671·0	1·000588	
672·1	574	
675·4	587	1·000580
675·8	577	
674·0	575	
494·5	1·000600	
482·2	618	
488·2	653	1·000621
475·6	601	
476·5	633	
290·0	1·000718	
292·3	478	
298·7	602	1·000602
297·5	618	
296·0	596	

Die aus den Beobachtungen bei verschieden grossen B abgeleiteten Werthe von D zeigen, dass die Änderung der Grösse $D-1$ proportional geht mit der Änderung der Dichte der Luft.

Da mit abnehmendem B auch δ abnimmt, und selbes bei den Beobachtungen der Gruppe IV etwa nur 8 Scth. ausmachte, so ist es erklärlich, dass die Zahlen der zwei letzten Gruppen nicht jene Übereinstimmung unter einander zeigen können, wie die der zwei ersten.

Es empfiehlt sich demgemäss als den richtigen Werth der Dielektricitätsconstante der Luft den Mittelwerth aus den zwei ersten Gruppen d. i.

$$D = 1 \cdot 000586$$

anzunehmen.

2. Wasserstoff.

Der Wasserstoff wurde aus Zink und verdünnter Schwefelsäure entwickelt und mittels einer Lösung von hypermangansaurem Kali, ferner einer Silbernitratlösung gewaschen und schliesslich vor dem Einlassen in den Condensator durch Schwefelsäure getrocknet.

LB 33 *B. E.* — *C. B.* 6 *D. E.*

XXII.

$W = 101400, \quad T = 16 \cdot 7, \quad \varphi = 306 \cdot 0$

b		R		
24·6		455·9		
	720·0		446·7	$\delta = 11 \cdot 7 \quad B = 678 \cdot 9$
38·0		461·8		$a = 12 \cdot 19$
	724·0		453·2	$\Phi = 53670$
48·0		466·0		$D = 1 \cdot 000269$
	720		453·7	
59·2		467·9		
42·4	721·3	462·9	451·2	

XXIII.

$W = 101350$, $T = 16{\cdot}7$, $\varphi = 305{\cdot}7$

b		R	
20·6		447·6	
	706		460·8
38·0		445·2	
	710		456·8
49·0		445·2	
35 9	708·0	446·1	458·8

$\delta = 12{\cdot}7$, $B = 672{\cdot}1$
$a = 13{\cdot}23$
$\Phi = 53620$
$D = 1{\cdot}000295$

XXIV.

$W = 101350$, $T = 16{\cdot}7$, $\varphi = 316{\cdot}2$

b		R	
27·6		463·5	
	715·0		479·8
34·0		475·6	
	719·0		479·8
44·0		466·1	
	698·0		478·5
57·2		466·7	
40·7	710·7	468·0	479·4

$\delta = 11{\cdot}4$, $B = 670{\cdot}0$
$a = 11{\cdot}88$
$\Phi = 55430$
$D = 1{\cdot}000257$

XXV.

LB 22 *B. E.* — *CB* 4 *D. E.*

$W = 100430$, $T = 163$, $\varphi = 209{\cdot}1$

b		R	
10·6		507·8	
	717·5		514·8
40·0		507·8	
	728·3		514·0
49·8		506·3	
	735·5		514·2
62·6		505·3	
40·8	727·1	506·8	514·3

$\delta = 7{\cdot}5$, $B = 686{\cdot}3$
$a = 7{\cdot}83$
$\Phi = 36680$
$D = 1{\cdot}000251$

XXVI.

$W = 100530, \quad T = 16{\cdot}3, \quad \varphi = 208{\cdot}9$

b		R		
20·4		531·0		
	736·5		524·1	$\delta = 7{\cdot}3, \quad B = 679{\cdot}9$
39·0		533·2		$a = 7{\cdot}60$
	734·5		528·0	$\Phi = 36680$
49·6		536·0		$D = 1{\cdot}000246$
	724·7		528·8	
63·0		535·8		
	722·3		528·7	
76·2		537·6		
49·6	729·5	534·7	527·4	

Es ergeben sich aus den einzelnen Beobachtungen folgende Werthe:

$D = 1000269$
295
257
251
246

Legt man jedem dieser Werthe ein der Anzahl der Beobachtungen der betreffenden Reihe und ein der Grösse von δ entsprechendes Gewicht bei, so bekommt man als schliesslichen Werth für den Wasserstoff

$$D = 1{\cdot}000264$$

3. Kohlensäure.

Dargestellt aus Marmor und Salzsäure, gewaschen mittels einer Lösung von doppelkohlensaurem Natron und getrocknet durch Schwefelsäure.

LB 22 *B. E.* — *CB* 4 *D. E.*

XXVII.

$W = 95760$, $T = 16{\cdot}2$, $\varphi = 213{\cdot}4$

b		R		
25·6		567·9		
	706·0		597·1	$\delta = 28{\cdot}1$, $B = 635{\cdot}7$
59·0		573·3		$a = 29{\cdot}28$
	718·4		597·4	$\Phi = 37430$
74·4		558·0		$\Phi = 1{\cdot}000991$
	722·0		581·0	
86·0		545·5		
	672·0		565·8	
99·6		542·1		
68·9	704·6	557·4	585·5	

XXVIII.

$W = 96300$, $T = 16{\cdot}2$, $\varphi = 212{\cdot}1$

b		R		
33·0		529·5		
	718		506·5	$\delta = 27{\cdot}5$, $B = 651{\cdot}8$
52·0		546·4		$a = 28{\cdot}65$
	708		519·2	$\Phi = 37200$
69·0		549·6		$D = 1{\cdot}000951$
	701		528·1	
75·0		556·2		
57·2	709	545·4	517·9	

XXIX.

$W = 98100$, $T = 15{\cdot}4$, $\varphi = 212{\cdot}6$

b		R		
37·0		546·1		
	726·3		577·5	$\delta = 29{\cdot}8$, $B = 672{\cdot}1$
57.6		548·2		$a = 31{\cdot}05$
	736·1		578·1	$\Phi = 37310$
66·6		549·0		$D = 1{\cdot}0000996$
	734·0		579·6	
78·6		551		
60·0	732·1	548·6	578·4	

XXX.

$W = 97760, \quad T = 16, \quad \varphi = 212{\cdot}5$

b		R		
39·0		537·2		
	737·5		506·3	$\delta = 29{\cdot}6, \quad B = 667{\cdot}2$
63·0		536·1		$a = 80{\cdot}84$
	736·5		505·4	$\Phi = 37300$
70·2		534·8		$D = 1{\cdot}000996$
	735·5		504·3	
80·2		533·5		
	735·5		503·5	
93·0		531·6		
69·0	736·2	534·5	504·9	

Wir erhalten also die Werthe

$D = 1{\cdot}000991 \qquad D = 1{\cdot}000996$
$\qquad\quad 951 \qquad\qquad\quad 996$

Daraus ergibt sich für die Kohlensäure

$D = 1{\cdot}000985$

4. Kohlenoxydgas.

Dargestellt durch Erwärmung eines Gemisches von Oxalsäure und Schwefelsäure. Gereinigt durch Kalkmilch und Kalilauge, getrocknet durch Schwefelsäure.

LB 22 *B. E.* — *CB* 4 *D. E.*

XXXI.

$W = 100200, \quad T = 16{\cdot}3, \quad \varphi = 210{\cdot}9$

b		R		
26·8		535·1		
	706·4		513·0	$\delta = 22{\cdot}5, \quad B = 646{\cdot}5$
51·6		513·0		$a = 23{\cdot}44$
	707·0		516·0	$\Phi = 37010$
64·2		539·1		$D = 1{\cdot}000790$
	709·8		518·2	
77·0		540·7		
	711·4		517·3	
91·0		542·3		
62·1	708·6	538·6	516·1	

XXXII.

$W = 100300$, $T = 16{\cdot}4$, $\varphi = 211{\cdot}7$

b		R		
27·0		544·4		
	717·0		567·2	$\delta = 23{\cdot}5$, $B = 658{\cdot}3$
56·6		540·7		$a = 24{\cdot}47$
	723·8		561·4	$\Phi = 37150$
68·8		537·3		$D = 1{\cdot}000807$
	725·8		558·4	
82·0		530·7		
	727·8		554·3	
93·0		531·0		
65·5	723·8	536·8	560·3	

XXXIII.

$W = 100480$, $T = 16{\cdot}7$, $\varphi = 211{\cdot}3$

b		R		
31·8		551·7		
	731·4		527·4	$\delta = 23{\cdot}1$, $B = 668{\cdot}2$
53·6		548·5		$a = 24{\cdot}06$
	727·6		523·6	$\Phi = 37080$
65·0		549·0		$D = 1{\cdot}000783$
	728·2		525·7	
76·4		546·5		
	727·4		528·8	
91·0		552·0		
60·4	728·6	549·5	526·4	

Bei den soeben angeführten Beobachtungsreihen wurde das Kohlenoxydgas bald nach der Darstellung untersucht. Da es unter Wasser aufgefangen wurde, so war es im Recipienten mit Wasserdampf gesättigt und hatte wahrscheinlich eine beträchtlich höhere Temperatur als die Condensatorplatten. Beim Hineinleiten in den Condensator strich es ziemlich rasch durch den Trockenapparat, und es war möglich, dass ihm nur ein kleiner Theil der Feuchtigkeit entzogen wurde. Im Condensator kühlte sich das

Gas rasch bis auf die Temperatur der Platten ab und ein Theil des Wasserdampfes schlug sich vielleicht an den Platten nieder, was dann den Werth der Dielektricitätsconotante zu gross erscheinen liess.

Um einer solchen möglichen Fehlerquelle zu entgehen, liess ich von nun an das Gas nach der Darstellung etwa zwei Stunden lang in einem kalten Raume stehen, so dass es sich nahezu auf 0° abkühlte und nur mehr wenig Wasserdampf enthielt. Überdies wurde auch der Trocknung eine grössere Sorgfalt gewidmet. Die soeben erwähnte Vorsichtsmassregel wurde natürlich auch bei anderen Gasen angewendet. In den nachfolgenden zwei Tabellen sind die unter diesen Umständen erhaltenen Resultate für das Kohlenoxydgas enthalten.

XXXIV.

$W = 100000$, $T = 17 \cdot 0$, $\varphi = 207 \cdot 3$

b		R		
27·0		559·0		
	696·0		539·4	$\delta = 19 \cdot 2$, $B = 633 \cdot 1$
61·4		559·0		$a = 20 \cdot 0$
	689·6		538·8	$\Phi = 36460$
65·4		557·0		$D = 1 \cdot 000699$
	691·8		542·8	
78·2		564·0		
	712·0		545·7	
88·8		565·3		
64·2	697·3	560·9	541·7	

XXXV.

$W = 100000$, $T = 17°$, $\varphi = 207 \cdot 6$

b		R		
29·6		533 7		
	703·5		547·8	$\delta = 19 \cdot 6$, $B = 652 \cdot 2$
63·2		526·9		$a = 20 \cdot 42$
	728·1		547·4	$\Phi = 36430$
74·2		525·9		$D = 1 \cdot 000692$
	728·3		546·9	
84·6		525·7		
	728·1		545·4	
97·2		524·1		
69·8	722·0	527·3	546·9	

Aus den zwei letzten Beobachtungen ergibt sich also in der That ein kleinerer Werth für D als aus den drei ersten. Es folgt als Mittel aus den zwei letzten Werthen für Kohlenoxydgas

$$D = 1 \cdot 000695$$

5. Stickoxydulgas.

Dargestellt aus salpetersaurem Ammoniak. Gereinigt mittels einer Eisenvitriollösung und getrocknet durch Schwefelsäure.

LB 22 *B. E.* — *CB* 4. *D. E.*

XXXVI.

$W = 100360$, $T = 16 \cdot 8$, $\varphi = 209 \cdot 7$

b		R		
28·0		571·0		
	724·2		537·3	$\delta = 33 \cdot 7$, $B = 665 \cdot 4$
56·4		568·9		$a = 35 \cdot 12$
	725·8		534·3	$\Phi = 36790$
67·8		567·0		$D = 1 \cdot 001156$
	721·4		534·4	
81·4		569·0		
58·4	723·8	569·0	535·3	

XXXVII.

$W = 100360$, $T = 16 \cdot 8$, $\varphi = 209 \cdot 6$

b		R		
33·0		602·0		
	697·3		633·5	$\delta = 30 \cdot 5$, $B = 608 \cdot 9$
63·6		600·2		$a = 31 \cdot 8$
	679·3		630·9	$\Phi = 36780$
72·6		599·0		$D = 4 \cdot 001141$
	684·7		628·8	
89·0		598·5		
	663·3		627·9	
103·0		599·1		
72·2	681·1	599·8	630·3	

XXXVIII

$W = 97630$. $T = 14 \cdot 5$, $\varphi = 213 \cdot 1$

b		R		
42·6		529·8		
	723·7		565·4	$\delta = 35 \cdot 9$, $B = 670 \cdot 5$
58·0		532·7		$a = 37 \cdot 4$
	731·3		569·1	$\Phi = 37380$
64·2		530·2		$D = 1 \cdot 001193$
	735·9		563·8	
74·6		528·1		
59·8	730·3	530·2	566·1	

XXXIX

$W = 97830$, $T = 14 \cdot 5$, $\varphi = 2131$

b		R		
42·4		546·7		
	732·5		515·9	$\delta = 34 \cdot 2$, $B = 666 \cdot 1$
56·0		553·2		$a = 35 \cdot 64$
	730·7		520·8	$\Phi = 37380$
65·1		555·1		$D = 1 \cdot 001146$
	733·9		522·4	
77·2		560·3		
	733·1		529·6	
91·1		566·1		
66·4	732·5	556·4	522·2	

Aus den vier Werthen

1·001156
1144
1193
1146

ergibt sich für das Stickoxydulgas

$D = 1 \cdot 001158$

6. Ölbildendes Gas.

Dargestellt durch Erhitzung von Schwefelsäure und Alkohol. Gereinigt durch Schwefelsäure und Kalilauge. Getrocknet durch Chlorcalcium.

L. B. 22. *B. E.* — *CB* 4. *D. E.*

XL

$W = 100360$, $T = 16{\cdot}1$, $\varphi = 209{\cdot}5$

b		R		
33·6		505·5		
	723·1		467·2	$\delta = 38{\cdot}9$, $B = 652{\cdot}5$
56·0		508·3		$u = 40{\cdot}5$
	711·5		467·8	$\Phi = 36760$
66·0		510·7		$D = 1{\cdot}001357$
	678·6		473·0	
51·9	704·4	508·2	469·3	

XLI.

$W = 100530$, $T = 16{\cdot}1$, $\varphi = 210{\cdot}0$

b		R		
28·0		522·6		
	695·1		564·6	$\delta = 42{\cdot}4$ $B = 651{\cdot}9$
53·6		522·3		$a = 44{\cdot}16$
	720·3		566·3	$\Phi = 36840$
71·8		522·6		$D = 1{\cdot}001478$
	714·1		564·0	
79·2		523·0		
58·1	710	522·6	565·0	

XLII

$W = 100530$, $T = 16{\cdot}1$, $\varphi = 210{\cdot}0$

b		R		
26·0		518·3		$\delta = 45{\cdot}0$, $B = 6618$
	710·0		568·0	$a = 46{\cdot}86$
69·0		525·1		$\Phi = 36840$
	734·5		568·1	$D = 1{\cdot}001546$
86·2		524·2		
60·4	722·2	522·5	567·5	

Aus den drei Werthen

1·001357
1478
1546

folgt für das ölbildende Gas

$$D = 1{\cdot}001456$$

7. Sumpfgas.

Dargestellt durch Erhitzen eines Gemenges von essigsaurem Natron, Natronhydrat und Kalkhydrat. Gewaschen durch Kalilauge. Getrocknet durch Schwefelsäure.

LB 22 *B. E.* — *CB* 4 *D. E.*

XLIII

$W = 100854$, $T = 16{\cdot}4$, $\varphi = 207$

b		R		
13·4		542·7		
	703·3		513·5	$\delta = 25{\cdot}6$, $B = 622{\cdot}1$
51·6		538·9		$a = 26{\cdot}67$
	699·4		515·0	$\Phi = 36330$
59·6		541·4		$D = 1{\cdot}000951$
	689·2		516·4	
69·6		545·6		
	617·8		523·5	
82·2		545.0		
55·3	677·4	542·8	517·1	

XLIV

$W = 100854$, $T = 16{\cdot}4$, $\varphi = 206{\cdot}6$

b		R		
16·4		538·6		
	727·1		570·8	$\delta = 27{\cdot}6$, $B = 668{\cdot}0$
49·8		543·1		$a = 28{\cdot}75$
	722·1		571·8	$\Phi = 36250$
61·0		545·8		$D = 1{\cdot}000956$
	725·9		571·4	
72·4		546·7		
	725·5		573·2	
86·6		546·6		
57·2	725·2	544·2	571·8	

Als Mittel der zwei Werthe

$$1{\cdot}000951$$
$$956$$

folgt für das Sumpfgas

$$D = 1{\cdot}000953$$

Bei den nachfolgenden Versuchen zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante einiger Dämpfe wurden die betreffenden Flüssigkeiten in Eprouvetten gebracht, deren offenes Ende etwas ausgezogen war; an dieses wurde ein kurzes Stück eines fest schliessenden Kautschuckschlauches angesetzt und die Eprouvette mittels desselben mit der Mündung *o* verbunden.

Sämmtliche Flüssigkeiten erhielt ich vom hiesigen chemischen Institute; sie wurden mir als rein und wasserfrei bezeichnet.

Die bekannte Thatsache, dass ein Theil des Dampfes an der Oberfläche der festen Körper condensirt wird, war auch hier leicht zu beobachten und es fragt sich, ob nicht etwa die Condensation an der Oberfläche der Condensatorplatten einen constanten Fehler bei den Bestimmungen der Dielektricitätsconstante mit sich bringt. Die an den Platten condensirte Schichte, kann ja entweder den Einfluss haben, dass sie die Distanz der Platten gewissermassen verkleinert, oder den, dass ein Theil des dielektrischen Mittels eine höhere Dielektricitätsconstante besitzt, als es die des untersuchten Dampfes ist. In beiden Fällen würde die Beobachtung zu grosse Werthe für *D* liefern. Die Frage nach einem solchen Einflusse ist jedoch durch Beobachtungen bei verschiedener Distanz der Condensatorplatten leicht zu entscheiden. — Ich habe daher alle Dämpfe mit Ausnahme des Schwefelkohlendampfes auch bei einer grösseren Plattendistanz (0·315 Cm.) untersucht und werde die betreffenden Tabellen mit „vergr. Pld.“ bezeichnen.

8. Schwefelkohlenstoffdampf.

LB 22 *B. E.* — *CB* 4. *D. E.*

XLV

$W = 95000$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 216{\cdot}4$

b		R		
36·8		459·5		
	128·8		466·6	$\delta = 10{\cdot}9$, $B = 84{\cdot}1$
49·6		452·5		$a = 11{\cdot}36$
	136·8		458·7	$\Phi = 37960$
54·0		443·7		$D = 1{\cdot}00286$
	134·8		450·0	
57·2		434·4		
49·4	133·5	447·5	458·4	

XLVI

$W = 95300$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 215{\cdot}8$

b		R		
34·4		471·5		
	123·4		462·6	$\delta = 11{\cdot}7$, $B = 90{\cdot}5$
48·8		467·9		$a = 12{\cdot}19$
	151·6		463·7	$\Phi = 37850$
54·8		480·2		$D = 1{\cdot}00286$
	147·0		466·1	
63·0		483·7		
50·2	140·7	475·8	464·1	

XLVII

$W = 95800$, $T = 16$, $\varphi = 210{\cdot}1$

b		R		
29·4		514·2		
	123·6		504·9	$\delta = 11{\cdot}2$, $B = 85{\cdot}4$
40·4		518·6		$a = 11{\cdot}67$
	127·0		509·5	$\Phi = 36840$
45·0		523·7		$D = 1{\cdot}00298$
	130·4		514·7	
51·6		527·1		
41·6	127·0	520·9	509·7	

Stellen wir die Werthe zusammen

1·00286
286
298

so ergibt sich als Mittel derselben für den Schwefelkohlenstoff

$$D = 1{\cdot}00290$$

9. Der Dampf der schwefeligen Säure.

Die schwefelige Säure wurde aus Kupfer und Schwefelsäure dargestellt, gereinigt, dann mittels einer Kältemischung in einem hiefür bestimmten gläsernen Apparate in den flüssigen Zustand übergeführt und später aus diesem Apparate direct in den Condensator geleitet.

LB 22 *B. E.* — *CB* 4 *D. E.*

XLVIII

$W = 95200$, $T = 14{\cdot}5$, $\varphi = 215{\cdot}3$

b		R		
27·8		579·5		
	568·0		352·9	$\delta = 208{\cdot}2$, $B = 483{\cdot}8$
54·0		580·7		$a = 216{\cdot}9$
	520·0		387·3	$\Phi = 37780$
58·0		593·7		$D = 1{\cdot}009505$
	520·0		387·3	
69·0		597·2		
52·2	536·0	587·8	379·6	

XLIX

$W = 95660$, $T = 14{\cdot}5$, $\varphi = 214{\cdot}6$

b		R		
30·6		520·8		
	518 0		719·4	$\delta = 203{\cdot}5$, $B = 471{\cdot}1$
54·0		515·1		$a = 212{\cdot}0$
	536·0		714·5	$\Phi = 37640$
61·0		501·5		$D = 1{\cdot}009566$
	522·0		692·7	
71·0		489·6		
54·2	525·3	505·4	708·9	

Um zu constatiren, ob nicht etwa die sehr kalte schwefelige Säure die Condensatorplatten und Kamcasseplättchen derart abkühlt, dass dies einen merklichen Beobachtungsfehler mit sich bringen würde, so leitete ich bei dem nachfolgenden Versuche dieselbe vor dem Eintritte in den Condensator durch ein langes Bleirohr, welches vielfach gewunden im Wasser, dass eine Temperatur von 39° C. hatte, lag. Es ergab sich keine merkliche Differenz zwischen der früheren und der jetzigen Bestimmung.

L

$W = 96900, \quad T = 15, \quad \varphi = 212 \cdot 0$

b		R		
44·0		585·4		
	492·0		392·5	$\delta = 177 \cdot 4, \quad B = 416 \cdot 0$
70·0		563·0		$a = 184 \cdot 8$
	467·0		391·0	$\Phi = 37200$
61·0		563·0		$D = 1 \cdot 009574$
	471·8		389·7	
69·0		562·5		
61·0	477·0	568·5	391·1	

Vergrösserte Plattendistanz.

LB 15 *B. E.* + 12 *L. E.* — *CB.* 1 *D. E.*

LI

$W = 108330, \quad T = 16, \quad \varphi = 48 \cdot 1$

b		R		
27·0		631·8		
	433·0		601·1	$\delta = 34\ 0, \quad B = 377 \cdot 5$
58·4		642·8		$a = 35 \cdot 36$
	439·8		610·2	$\Phi = 8327$
70·4		646·6		$D = 1 \cdot 009046$
	436·8		613·4	
80·0		647·5		
59·0	436·5	642·2	608·2	

LII

$W = 108600, \quad T = 16{\cdot}2, \quad \varphi = 47{\cdot}9$

b		R		
34·6		625·1		$\delta = 23{\cdot}5, \quad B = 252{\cdot}5$
	309·9		651·3	$a = 24{\cdot}44$
62·2		629·0		$\Phi = 8312$
	320·0		653·8	$D = 1{\cdot}009380$
70·0		631·1		
	309·9		652·9	
76·2		631·6		
60·8	313·3	629·2	652·7	

Wir erhalten also bei der kleineren Plattendistanz die Werthe

1·009505
9566
9574

und bei der grösseren

1·009046
9380

Die letzten Werthe sind wohl etwas kleiner als die ersten; eine Störung durch die condensirte Schichte lässt sich jedoch daraus und auch aus den später mit andern Dämpfen erhaltenen Resultaten nicht nachweisen; wir nehmen daher das Mittel aus den drei ersten Zahlen

$$D = 1{\cdot}009548$$

als den Werth der Dielektricitätsconstante für den Dampf der schwefeligen Säure an.

10. Chloräthyldampf.

LB 5 *B. E.* + 10 *E.* von der Tauchb. + 12 *B. E. CB.* 8 *D. E.*

LIII

$W = 95000$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 215{\cdot}6$

b		R		
27·6		515·0		
	148·4		439·0	$\delta = 84{\cdot}3$, $B = 121$
48·0		511·8		$a = 87{\cdot}8$
	175·4		420·7	$\Phi = 37840$
51·0		511·4		$D = 1{\cdot}01541$
	190·4		421·6	
75·0		507·6		
50·4	171·4	511·4	427·1	

LIV

$W = 95400$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 215{\cdot}2$

b		R		
26·0		491·5		
	198·8		600·2	$\delta = 104{\cdot}1$, $B = 152{\cdot}3$
44·4		482·1		$a = 108{\cdot}46$
	210·0		585·0	$\Phi = 37740$
50·0		465·3		$E = 1{\cdot}01518$
	180·0		542·8	
55·4		448·7		
44·0	196·3	471·9	576·0	

LV

$W = 99430$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 208{\cdot}7$

b		R		
16·6		496·8		
	173·0		588·3	$\delta = 99{\cdot}0$, $B = 141{\cdot}8$
49·2		495·5		$a = 103{\cdot}2$
	193·0		527·2 [1]	$\Phi = 36620$
50·1		427·2		$D = 1{\cdot}01598$
	198·0		514·1	
54·6		402 4		
32·9	173·4	496·1	588·3	
52·3	195·5	414·8	520·7	

[1] Es trat eine Unregelmässigkeit im Gange der Stimmgabel ein; nachdem dieselbe behoben war, zeigte sich eine beträchtliche Ruhelage-

Vergr. Pld. *LB* 15 *B. E.* + 12 *L. E.* — *CB* 1 *D. E.*

LVI

$W = 109430$, $T = 15{\cdot}6$, $\varphi = 47{\cdot}5$

b		R		
51·6		628·0		
	266·3		661·0	$\delta = 30{\cdot}9$, $B = 204{\cdot}8$
52·2		628·5		$a = 32{\cdot}13$,
	253·9		658·3	$\Phi = 8223$
59·6		628·8		$D = 1{\cdot}01532$
	264·3		658·5	
63·6		628 4		
56·7	261·5	628·4	659·3	

LVII

$W = 109090$, $T = 16{\cdot}0$, $\varphi = 47{\cdot}6$

b		R		
24·0		634·5		
	202·4		609·3	$\delta = 20{\cdot}2$, $B = 138{\cdot}8$
57·6		631·4		$a = 22{\cdot}88$
	196·4		612·9	$\Phi = 8240$
65·0		632·3		$D = 1{\cdot}01607$
	180·4		615·6	
70·7		633·0		
54·3	193·1	632·8	612·6	

Werthe für $D = 1{\cdot}01541$, 1518, 1598 } bei der kleineren Pld.

1532, 1603 } bei der grösseren Pld.

Es folgt daraus für Chlorathyldampf

$$D = 1{\cdot}01552$$

verschiebung, so dass die ganze Beob. in zwei Partien getheilt werden musste.

11. Bromäthyldampf.

LB 22 *B. E. CB* 4 *D. E.*

LVIII.

$W = 94800$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 215{\cdot}8$

b		R		
37·4		529·5		
	109·4		476·8	$\delta = 57{\cdot}3$, $B = 82{\cdot}2$
43·0		520·4		$a = 59{\cdot}70$
	130·0		458·9	$\Phi = 37850$
41·6		517·2		$D = 1{\cdot}01541$
	135·2		452·5	
48·8		513·0		
42·7	124·9	520·0	462·7	

LIX.

$W = 94800$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 215{\cdot}7$

b		R		
32·4		530		
	126·4		465·7	$\delta = 57{\cdot}9$, $B = 83{\cdot}9$
47·4		520·5		$a = 60{\cdot}33$
	132·0		461·5	$\Phi = 37840$
46·6		520·2		$D = 1{\cdot}01524$
	126·8		565·7	
51·8		518·2		
45·5	128·4	522·2	464·3	

LX.

$W = 95300$, $T = 15{\cdot}5$, $\varphi = 214{\cdot}8$

b		R		
31·0		536·5		
	107·6		591·9	$\delta = 44{\cdot}2$, $B = 62{\cdot}4$
43·4		545·5		$a = 46{\cdot}06$
	106·4		587·1	$\Phi = 37690$
45·4		543·4		$D = 1{\cdot}01573$
	100·2		579·3	
49·6		542·1		
42·3	104·7	541·9	586·1	

Vergr. Pld. *LB.* 15. *B. E.* + 12 *L. E.* — *C B.* 1 *D. E.*

LXI.

$W = 109430, \quad T = 15{\cdot}8, \quad \varphi = 47{\cdot}5$

b		R		
29·8		598·6		
	125·6		613·4	$\delta = 13{\cdot}0, \quad B = 85{\cdot}5$
47·2		602·5		$a = 13{\cdot}52$
	128·6		615·1	$\Phi = 8223$
53·6		603·8		$D = 1{\cdot}01546$
	146·6		618·5	
62·0		605·8		
48·1	133·6	602·7	615·7	

LXII

$W = 109430, \quad T = 15{\cdot}8, \quad \varphi = 47{\cdot}5$

b		R		
51·6		639·6		
	130·8		627·4	$\delta = 12{\cdot}1, \quad B = 83{\cdot}2$
57·6		637·0		$a = 12{\cdot}58$
	138·6		625·4	$\Phi = 8223$
65·0		636·3		$D = 1{\cdot}01498$
	163·2		621·4	
70·0		634·5		
61·0	144·2	636·8	624·7	

Wir erhalten also die Werthe

$$\left.\begin{matrix} 1{\cdot}01541 \\ 1524 \\ 1573 \end{matrix}\right\} \text{bei der kleineren Pld.}$$

$$\text{und } \left.\begin{matrix} 1{\cdot}01546 \\ 1496 \end{matrix}\right\} \text{bei der grösseren Pld.}$$

Daraus ergibt sich für Bromäthyldampf

$$D = 1{\cdot}01546$$

12. Ätherdampf.

LB 14 *B. E.* + 12 *L. E.* — *CB* 4 *D. E.*

LXIII.

$W = 96170$, $T = 16{\cdot}5$, $\varphi = 341{\cdot}2$[1]

b		R		
36·0		498·9		
	193·3		582·0	$\delta = 71{\cdot}1$, $B = 136{\cdot}2$
58·4		514·6		$a = 74{\cdot}1$
	187·5		584·4	$\Phi = 59850$
66·0		527·7		$D = 1{\cdot}00732$
	202·3		600·5	
72·6		530·5		
58·2	194·4	517·9	589·0	

LXIV

$W = 96170$, $T = 16{\cdot}5$, $\varphi = 341{\cdot}2$

b		R		
51·6		467·0		
	173·6		402·3	$\delta = 59{\cdot}1$, $B = 109{\cdot}7$
64·2		458·5		$a = 61{\cdot}58$
	172·0		398·9	$\Phi = 59850$
68·2		460·5		$D = 1{\cdot}00755$
	175·6		409·5	
71·8		465·0		
64·0	173·7	462·7	403·6	

Vergr. Pld.

LXV.

$W = 109430$, $T = 16°$, $\varphi = 47{\cdot}6$

b		R		
61·0		654·4		
	221·4		643·5	$\delta = 11{\cdot}3$, $B = 155{\cdot}7$
67·8		655·1		$a = 11{\cdot}75$
	236·8		643·1	$\Phi = 8240$
73·6		655·3		$D = 1{\cdot}00736$
	218·8		645·1	
77·6		656·0		
70	225·7	655·2	643·9	

[1] Das Galvanometer war empfindlicher wie in den früheren Fällen.

LXVI.

$M = 100430, \quad T = 16, \quad \varphi = 47 \cdot 9$

b		R		
47·0		612·2		
	202·4		623·6	$\delta = 10 \cdot 0, \quad B = 137 \cdot 9$
58·4		613·3		$a = 10 \cdot 4$
	197·8		623·7	$\Phi = 8292$
65·0		613·9		$D = 1 \cdot 00731$
	195·0		623·2	
71·6		614·6		
60·5	198·4	613·5	623·5	

Es ergaben sich die Werthe

$$\left.\begin{matrix} 1 \cdot 00732 \\ 755 \end{matrix}\right\} \text{bei der kleineren Pld.}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 \cdot 00736 \\ 731 \end{matrix}\right\} \text{bei der grösseren Pld.}$$

Es ist also für den Ätherdampf

$$D = 1 \cdot 00743$$

Vergleich der Dielektricitätsconstanten mit den Lichtbrechungsexponenten.

Nach der elektromagnetischen Lichttheorie von Maxwell soll die Quadratwurzel aus dem Verhältnisse der Dielektricitätsconstanten zweier Substanzen gleich sein dem Verhältnisse ihrer Lichtbrechungsexponenten, falls die Magnetisirungsconstanten dieser Substanz mit hinlänglicher Genauigkeit gleich sind. Letztere Bedingung ist bei den Gasen erfüllt, und es haben bereits die Versuche Boltzmann's bei sieben Gasen obige aus der elektromagnetischen Lichttheorie folgende Relation bestätiget. Die vorliegende Untersuchung hat für dieselben sieben Gase ein gleiches Resultat geliefert und überdies die Richtigkeit obiger Beziehung auch für den Dampf des Schwefelkohlenstoffs erwiesen. Die geringen Abweichungen, die die einzelnen Substanzen zeigen, erklären sich theils durch die noch nicht genügende Vollkommenheit der Methode, theils aber auch durch die Unreinheit der untersuchten Gase. Die Thatsache allein, dass die Gase unter Wasser auf-

gefangen wurden, bringt ja schon gewisse Fehlerquellen mit sich. Berücksichtigt man diese Umstände, so wird man die Übereinstimmung als eine sehr befriedigende bezeichnen können.

Um die Übereinstimmung noch exacter zu machen, respective kleine Abweichungen mit Sicherheit festzustellen, wird es in Zukunft unerlässlich sein, die Beobachtungsmethode noch zu vervollkommnen, und gleichzeitig mit den Bestimmungen der Dielektricitätsconstante auch die des Lichtbrechungsexponenten, und zwar mit derselben Gassorte auszuführen.

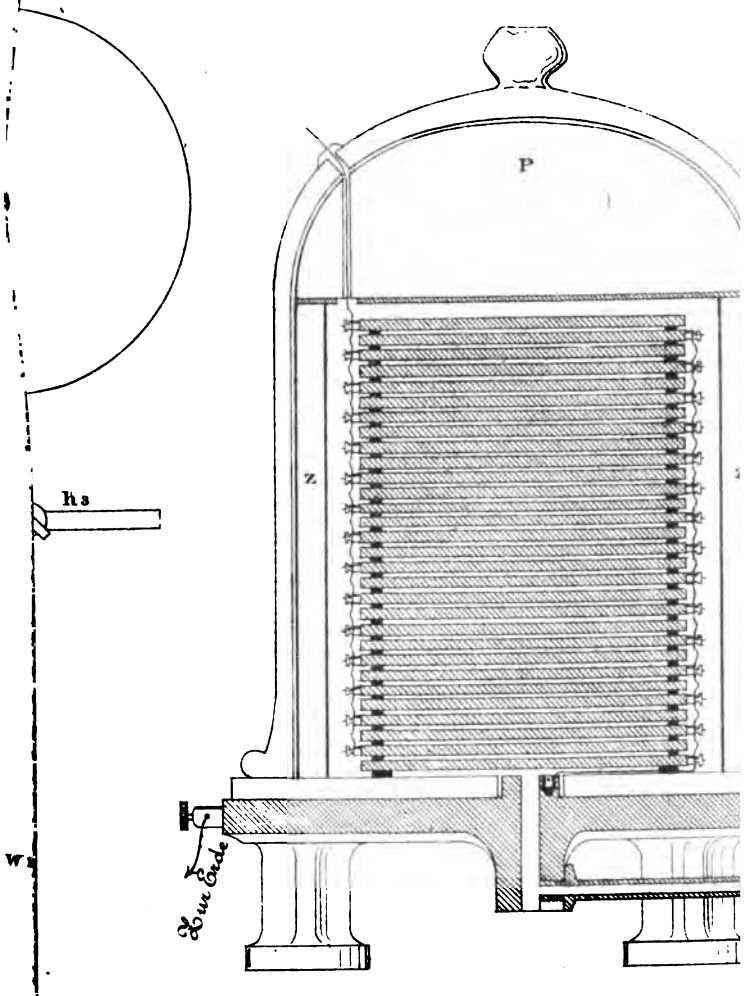
Was die übrigen vier Dämpfe anbelangt, so genügen ihre Dielektricitätsconstanten der theoretischen Relation nicht. Diese Substanzen besitzen wahrscheinlich eine gewisse Leitungsfähigkeit und dürften in die Kategorie jener Körper gehören, welche bei verschiedener Ladungsdauer auch verschiedene Werthe für D ergeben. Eine Untersuchung dieser Dämpfe nach der elektrometrischen Methode wäre daher nicht ohne Interesse.

In der nachfolgenden Tabelle (S. pag. 759) sind die $\sqrt{D}$ und die Brechungsexponenten n nach Mascart zusammengestellt; auch sind die von den Herren Boltzmann, dann Ayrton und Perry erhaltenen Werthe angeführt.

Über eine vortheilhafte Abänderung dieser Beobachtungsmethode.

Die hier benützte Art der Compensation zeichnet sich durch eine grosse Einfachheit aus, bringt jedoch mehrere Übelstände mit sich, die zuweilen die Genauigkeit des Resultates beeinträchtigen. Man ist nämlich bei der Compensation abhängig von der elektromotorischen Kraft der Ladungs- und Compensationsbatterie von den Widerständen im Compensationskreise, wozu auch die Galvanometerrolle gehört, und vom Gange der Stimmgabel. Jede Änderung einer dieser Grössen setzt die Galvanometernadel in Bewegung. Eine solche Bewegung ist aber selten vollkommen gleichmässig und das bringt immer Fehler mit sich. Es ist daher wünschenswerth der Gefahr einer derartigen Störung der Resultate auszuweichen. Dies dürfte mit Hilfe eines zweiten Luftcondensators von gleicher Capacität gelingen. Beide Condensatoren sollen durch dieselbe Batterie geladen und dann im entgegengesetzten Sinne durch das Galvanometer entladen werden. Die

Fig. 2.



Druck v. J. Bar

LXVII.

Gas	$\sqrt{D}$ nach Ayrton und Perry	$\sqrt{D}$ nach Boltzmann	$\sqrt{D}$	n
Athmosphär. Luft ...	1·000750	1·000295	1·000293	1·0002927
Wasserstoff	1·000650	1·000132	1·000132	1·0001387
Kohlensäure	1·00115	1·000473	1·000492	1·0004544
Kohlenoxyd	—	1·000345	1·000347	1·0003350
Stickoxydul.....	—	1·000497	1·000579	1·0005159
Ölbildendes Gas.....	—	1·000656	1·000729	1·000720
Sumpfgas.....	—	1·000472	1·000476	1·000442
Dampf des Schwefelkohlenstoffes.....	—	—	1·001450	1·001478
Dampf der schwefeligen Säure	1·00260	—	1·00477	1·0007036
Dampf des Äthers ...	—	—	1·00372	1·001537
„ „ Chloräthyls	—	—	1·00776	1·001174
„ „ Bromäthyls	—	—	1·00773	1·001218

Ladung und Entladung soll ein und dieselbe Stimmgabel besorgen. In einem solchen Falle ist man von der Änderung der Widerstände und der elektromotorischen Kraft der ladenden Kette, sowie vom Gange der Stimmgabel vollkommen unabhängig. Ich hoffe, dass es mir auf diese Weise gelingen wird, die Genauigkeit bei den Bestimmungen der Dielektricitätsconstanten bedeutend zu erhöhen.

Der hier beschriebene Condensator wurde über Auftrag des Herrn Rgrth. Prof. Dr. Ludwig Boltzmann in der hiesigen elektrotechnischen Anstalt des Herrn Schaschl in vollkommen zufriedenstellender Weise angefertigt. Ich fühle mich verpflichtet, meinem hochverehrten Lehrer und Chef für die Anschaffung des Condensators, Herrn Prof. Dr. L. v. Pebal für die Überlassung der Chemikalien und meinem Freunde und Collegen Herrn Dr. G. Schacherl für die Darstellung der untersuchten Gase den verbindlichsten Dank auszusprechen.

Die Lösungsflächen des Kalkspathes und des Aragonites.

II. Die Ätzfiguren des Kalkspathes.

III. Die Lösungsflächen des Aragonites.

(Fortsetzung und Schluss zu Bd. LXXXIX [1884], S. 368.)

Von dem c. M. Prof. **V. v. Ebner** in Graz.

(Mit 6 Tafeln.)

II. Einleitung.

Seitdem Leydolt zuerst die Ätzfiguren zur Entwirrung der verwickelten Zwillingsbildungen des Quarzes und des Aragonites benützt hat, sind dieselben zwar oft zu ähnlichem Zwecke, sowie zur Bestimmung der Krystallsysteme in zweifelhaften Fällen mit Erfolg untersucht worden; die theoretische Erkenntniss des Wesens dieser Bildungen ist aber noch immer in grosses Dunkel gehüllt.

Man weiss, dass die Ätzfiguren stets den Symmetrieverhältnissen der Krystallflächen entsprechen, auf welchen sie entstehen,[1] man weiss ferner, dass sie auf derselben Krystallfläche verschieden sind je nach der Natur, der Concentration und der Dauer der Einwirkung des angewendeten Ätzmittels oder auch aus nicht näher bekannten Ursachen. Aus den Versuchen Haushofer's[2] am Kalkspathe geht hervor, dass eine und dieselbe Säure, je nach der Concentration, in welcher sie angewendet wird, verschiedene Ätzfiguren erzeugen kann.

---

[1] Březina, A. in Tschermak's Mineral. Mitth. Jahrg. 1875, p. 147.

[2] Über den Asterismus und die Brewster'schen Lichtfiguren am Calcit. München 1865.

Man ist aber darüber im Unsichern, ob die Flächen, welche die Ätzfiguren zusammensetzen, gesetzmässige Krystallflächen sind und hat noch keine Kenntniss von der Entwicklung derselben.

Bezüglich des ersten Punktes liegen goniometrische Messungen von Rose,[1] Sohncke,[2] Baumhauer,[3] Klocke,[4] F. Becke[5] und Anderen von Krystallen des regulären Systemes vor. Klocke führte eine Reihe von Wahrscheinlichkeitsgründen dafür an, dass die Ätzfiguren gesetzmässige Krystallflächen seien, und schon früher hatte Haushofer[6] für den Kalkspath dies vermuthungsweise ausgesprochen.

Über die Entwicklung der Ätzfiguren fehlen positive Beobachtungen. Klocke gibt für den Alaun an, dass die Ätzfiguren durch einen momentanen Bildungsact entstehen und bis zu ihrem Verschwinden von unveränderlicher Grösse bleiben. Dagegen nimmt Sohncke als bekannt an, dass gut ausgebildete Ätzfiguren — mit geraden Kanten — nur bei langsamer Entwicklung entstehen. Die Art der Abhängigkeit der Ätzfiguren vom Lösungsvorgange — mit welchem sie doch offenbar in Beziehung stehen — ist also noch sehr dunkel. Haushofer[7] kam am Kalkspathe zu dem Resultate, dass die Ätzfiguren fast ausschliesslich rhomboëdrische und skalenoëdrische Formen erster Stellung zeigen, und Baumhauer hat anfänglich bei den Ätzfiguren des Kalkspathes die Vorstellung gewonnen, dass sie mit den Spaltungsrichtungen im Zusammenhange stehen,[8] hat aber später diese Vorstellung wieder fallen gelassen.[9]

---

[1] Poggend. Ann. Bd. 148 (1873) (Diamant).

[2] Ibid. Bd. 157 (1876), p. 329 (Steinsalz).

[3] Neues Jahrb. f. Mineralogie etc. 1876, p. 605 (Flussspath).

[4] Zeitschr. f. Krystallographie etc. Herausgeg. von P. Groth, Bd. II, (1878), p. 126 (Alaun).

[5] Mineralog. und petrogr. Mittheilungen. Herausgeg. von G. Tschermak, Bd. V (1882), p. 457 (Zinkblende) und Bd. V (1884), p. 237 (Bleiglanz).

[6] l. c. p. 19.

[7] l. c. p. 43.

[8] Poggend. Ann., Bd. 140 (1870).

[9] Ibid. Bd. 145 (1872), pag. 459, p. 271.

Exner[1] erzeugte nach einer eigenthümlichen Methode Vertiefungen auf den Flächen von Krystallen, welche in Wasser löslich sind und nennt diese Vertiefungen Lösungsfiguren. Er findet, dass die Löslichkeit der Krystalle von der krystallographischen Werthigkeit und nicht von der Spaltbarkeit abhänge. Über die Ätzfiguren äussert Exner nur, dass man über die Entstehung derselben nichts wisse, und er betont in einer Polemik gegen Sohncke, welcher die Lösungsfiguren Exner's als Ätzfiguren betrachtet, dass diese beiden Dinge nicht dasselbe seien.[2]

F. Becke[3] kommt an seinen Objecten zu dem Resultate, dass die Ätzflächen der Auflösung den grössten Widerstand entgegensetzen, jedoch nicht in directer Beziehung zu den Spaltungsflächen stehen; sie seien aber Flächen von grosser normaler Cohäsion, das heisst: In den Richtungen, welche normal zu den Ätzflächen stehen, ist die Cohäsion eine bedeutende. Becke legt übrigens diesen Beziehungen von Spalt- und Ätzflächen keine allgemeine Bedeutung bei.

Bezüglich der Frage der Rationalität der Indices der Ätzflächen kommt Becke zu ähnlichen Folgerungen wie Klocke, obwohl die Beobachtungen auch die Deutung zulassen, dass die Ätzflächen nur gewissen Zonen angehören ohne jedoch strenge dem Parametergesetze zu folgen.

So wenig nun der Zusammenhang zwischen Ätzfiguren und Lösungsvorgang aufgeklärt ist, so beanspruchen die Ätzfiguren doch ein ganz besonderes Interesse, weil sie in der Regel die einzige morphologisch auffällige Erscheinung bei der Lösung der Krystalle sind, während Lösungsgestalten, wie sie im ersten Theile dieser Arbeit beschrieben wurden, weit seltener aufzutreten scheinen. Nur Becke hat schon früher sowohl an der Zinkblende, als am Bleiglanze unzweifelhaft Lösungsgestalten gesehen und dieselben als „Ätzhügel" von den vertieften Ätzfiguren unterschieden.

Becke hat jedoch für die theoretische Beurtheilung des Lösungsvorganges auf diese erhabenen Gestalten kein besonderes

---

[1] Diese Ber. Bd. LXIX, pag. 6 und Poggend. Ann. Bd. 153 (1874).
[2] Poggend. Ann. Bd. 158 (1876).
[3] l. c.

Gewicht gelegt, sondern dieselben als gleichwerthig mit den eigentlichen Ätzfiguren behandelt, was mit Rücksicht auf den Umstand, dass Becke an seinen Objecten nur fertige Ätzeffecte untersuchen konnte, ganz begreiflich ist.

VII. Capitel.

Die Ätzfiguren auf der Spaltungsfläche des Kalkspathes. Abhängigkeit der Formen von der Natur, Concentration und Temperatur der Säure.

Ehe auf die Entwicklung der Ätzfiguren der Spaltungsfläche eingegangen werden kann, ist es nothwendig, zunächst eine Übersicht der äusserst mannigfaltigen Formen zu gewinnen, welche durch Säuren auf der genannten Fläche hervorgerufen werden können.

Wenn man zunächst nur den Umriss der Ätzfigur beachtet, so ist vor Allem zu betonen, dass es zahlreiche Formen gibt, welche nicht von geradlinigen, sondern von mehr weniger stark gekrümmten und gebogenen Seiten begrenzt werden. Ich hebe diese Thatsache nicht desshalb hervor, weil sie etwa noch nicht bekannt wäre, sondern desshalb, weil bisher bei eingehenderen Untersuchungen von Ätzfiguren stets mit Vorliebe solche gewählt wurden, welche von geraden Linien und ebenen Flächen begrenzt sind. Es ist aber klar, dass a priori gar kein Grund vorliegt, diese von krummen Linien und Flächen begrenzten Figuren zu vernachlässigen, da sie unter gewissen Umständen eben so typisch auftreten, wie unter anderen solche mit ebenen Flächen und geraden Kanten. Sehen wir zunächst davon ab, dass die Umrisse häufig stark gekrümmt sind, so lassen sich folgende Hauptformen unterscheiden, welche sämmtlich der monoklinischen Symmetrie entsprechen, mit einer der Klinodiagonale der Spaltungsfläche entsprechenden Symmetrielinie.

1. Rechtecke mit den Diagonalen der Spaltungsfläche parallelen Seiten. (Fig. 2, 3, 4*e* Taf. I, Fig. 16, 17, 22, 31*a*, 36*a* Taf. II, Fig. 44*d* 45*a* Taf. III).

2. Fünfecke mit nach rückwärts (gegen die Seitenecke in der Richtung der Klinodiagonale) gewendeter Spitze. (Fig. 4*d*, 5*c*, 6*b*, 15*b*, 17, 20, 24, 25, 26*a*, *b*, 29, 33, 35, 42, 43,

44, 45, 46). Diese Form nähert sich durch Abrundung des hinteren unpaaren Winkels häufig der vorhergehenden (z. B. Fig. 4*b*) oder durch Abrundung der hinteren Seitenwinkel der nächstfolgenden Form (z. B. Fig. 23*a*).

3. Dreiecke mit nach rückwärts gewendeter Spitze (Fig. 5, 17, 21 etc.).

4. Fünfecke mit polwärts gewendeter Spitze (Fig. 13 etc.). Diese Form geht durch Abrundung der Seitenwinkel häufig in die folgende über (z. B. Fig. 12).

5. Dreiecke mit polwärts gewendeter Spitze und meistens gebogenen Seiten. Bekannteste und häufigste Ätzfigur der Spaltungsfläche (Fig. 10, 40 etc.).

6. Deltoide mit den Diagonalen der Spaltungsfläche parallelen Diagonalen (Fig. 56, 59). Durch Abrundung der Seiten und der hinteren Ecke nähert sich diese Form manchmal der vorhergehenden (z. B. Fig. 30 und 38).

Als untergeordnete Formen sind noch Sechsecke (Fig. 20), Siebenecke (Fig. 4*a*), Achtecke (Fig. 6 und 7), endlich Sechsecken sich nähernde, langgezogene Figuren (Fig. 11, 14) anzuführen.

Von den aufgezählten Typen ist das Dreieck mit nach vorne gewendeter Spitze am längsten durch v. Kobell[1] bekannt. Typus 1 und 2 wurden von C. Meyer[2] mit Essigsäure, Typus 6 (Deltoide) von Tschermak[3] mit Schwefelsäure dargestellt. Verschiedene, fast durchgehends von stark gekrümmten Linien begrenzte Formen, welche hier aufgezählten Typen entsprechen, hat Haushofer[4] in sehr naturgetreuen Abbildungen mitgetheilt.

Ohne in eine ermüdende Beschreibung der einzelnen Formen einzugehen, verweise ich bezüglich des Details auf die Abbildungen, welche mit der Camera lucida nach der Natur gezeichnet sind. Ich habe es meistens unterlassen, ganze Präparate zu zeichnen und ich begnügte mich, einzelne Ätzfiguren darzustellen, welche sämmtlich so orientirt sind, dass der Polwinkel der

---

[1] Sitzgsber. d. k. baier. Akademie d. W. zu München, Jahrg. 1862. Bd. I, p. 204.

[2] Neues Jahrb. f. Mineral., Geologie und Paläontol., Bd. I (1883), pag. 74.

[3] Mineral. und petrogr. Mitth., Bd. IV (1882), p. 102.

[4] l. c.

Spaltungsfläche oben, der stumpfe Seitenwinkel aber unten zu denken ist, wie in Fig. 1.

Bezüglich des Bodens der Ätzfiguren lässt sich im Allgemeinen sagen, dass in der Regel von sämmtlichen Winkeln des Umrisses vertiefte, gerade oder gekrümmte Kanten gegen einen tiefsten Punkt zusammenlaufen, welcher bald in der Mitte, bald mehr gegen die vordere, bald mehr gegen die hintere Begränzung der Figur gelegen ist. Häufig ist aber diese vertiefte Ecke durch eine der Spaltungsfläche parallele Fläche abgestumpft, deren Umriss dem der ganzen Ätzfigur ähnlich und nicht selten fast eben so gross als letzterer ist. Manchmal zeigt aber der Boden der Ätzfigur sehr verwickelte Verhältnisse; namentlich wenn, so zu sagen, eine zweite Ätzfigur von anderer Form in den Boden der Hauptfigur eingegraben ist. (Z. B. Fig. 21 Taf. II, Fig. 51 Taf. III). Dadurch können in der Ätzfigur neben den gewöhnlichen einspringenden auch ausspringende Kanten vorkommen, was insbesondere bei Ätzungen mit Schwefelsäure, Chromsäure und Phosphorsäure gar nicht selten zur Beobachtung kommt.

Was nun das Vorkommen der oben aufgezählten Umrissformen der Ätzfiguren anbelangt, so ist zunächst als eine Thatsache von grosser Wichtigkeit hervorzuheben, dass man mit einer und derselben Säure, z. B. Salpetersäure, fast alle Haupttypen der Ätzfiguren erhalten kann (vergl. Fig. 30—36, Taf. II). Bei einer und derselben Ätzung erhält man aber in der Regel im Umriss ähnliche und nur bezüglich des Bodens verschiedene Ätzfiguren. Es muss aber anderseits auch hervorgehoben werden, dass nicht mit jeder Säure alle überhaupt beobachteten Figuren dargestellt werden konnten, und dass bei aller Ähnlichkeit der Haupttypen, fast jeder Säure gewisse Eigenthümlichkeiten im feineren Detail der Formen zukommen.

Bei der ausserordentlichen Mannigfaltigkeit der Ätzfiguren ist selbstverständlich nicht daran zu denken, dieselben ohne Weiteres aus den Richtungen der einschneidenden Lösungsflächen, als welche früher die Flächen des Rhomboeders — $2R$ nachgewiesen wurden, zu erklären; es sind vielmehr offenbar noch eine Reihe besonderer Bedingungen von wesentlicher Bedeutung. Von diesen Bedingungen lassen sich — abgesehen von der chemischen Natur der angewendeten Säure — namentlich:

1. Die Concentration, 2. die Temperatur als wichtig nachweisen. Um zunächst diese Punkte experimentell zu belegen, führe ich folgende Versuche mit Ameisensäure als Beispiel an:

1. Ameisensäure verschiedener Concentration.

a) Bringt man einen Tropfen concentrirter Ameisensäure (1·2 specifisches Gewicht) auf eine Spaltungsfläche und entfernt man denselben nach einiger Zeit durch rasches Abwaschen mit dem Strahl der Wasserleitung, so erhält man meistens ziemlich grosse viereckige Ätzfiguren von der Form der Fig. 4, *e* Taf. I. Ausserdem erscheinen, jedoch in der Regel seltener, die in Fig. 4, *a*, *b*, *c*, *d* abgebildeten Formen.

b) Macht man denselben Versuch mit einer zur Hälfte verdünnten (50%) Säure, so entstehen grosse fünfeckige oder sechseckige Ätzfiguren mit nach vorne gerichteter Spitze von der Form der Figur 8, *a* und *b*.

c) Mit 30% Säure erhält man Dreiecke mit nach vorne gerichteter Spitze von den Formen der Fig. 12.

d) Mit 10% Säure endlich erhält man nach längerer Einwirkung zweierlei typisch verschiedene Ätzfiguren und zwar ganz kleine, scharf contourirte, mit der Spitze nach rückwärts gerichtete Fünfecke (Fig. 15, *b*) und grössere, meist sehr schlecht ausgebildete dreieckige Figuren, deren Spitze nach vorne sieht (Fig. 15, *a*).

(Bei allen länger dauernden Ätzungen, namentlich mit verdünnter Säure entstehen auch die in der ersten Abhandlung beschriebenen Lösungsgestalten).

2. Dieselben Concentrationen der Ameisensäure bei erhöhter Temperatur.

Die vorstehend aufgeführten Säureconcentrationen wurden nun auch in einem Schälchen zum Kochen erhitzt und in dieselben Spaltungsrhomboeder eingetaucht oder aber ein Tropfen der kochenden Flüssigkeit mit einem Glasstabe auf den auf einer Glasplatte liegenden Krystall gebracht. Diese geringe Modification des Ätzverfahrens ergab ganz verschiedene Figuren; wohl desshalb, weil beim Betupfen mit Säure die Temperatur rasch

sinkt, während beim Eintauchen in der That kochende Säure mit der Krystallfläche in Berührung kommt.

A. Eintauchen in kochende Säure.

a) Concentrirte Säure gibt schmale, lange Dreiecke oder Fünfecke mit nach rückwärts gewendeter Spitze (Fig. 5).

b) 50% Säure gibt lange, von gebogenen Seiten begrenzte, als modificirte Sechsecke aufzufassende Figuren von der Form der Fig. 11.

c) 30% Säure gibt ähnliche, doch nicht identische Figuren wie vorher von den Formen der Fig. 14.

B. Betupfen mit kochender Säure.

a) Concentrirte Säure gibt ganz kleine Vierecke oder Achtecke, denen manchmal eine tetragonale Symmetrie zuzukommen scheint, welche erst bei genauerer Untersuchung sich als eine monoklinische erweist. (Fig. 6, *a* und Fig. 7.) (Gegen die Peripherie des einwirkenden Säuretropfens erscheinen auch Figuren, welche jenen ähnlich sind, die man mit kalter concentrirter Säure erhält [Fig. 6, *b*].)

b) 50% Säure gibt Fünfecke oder Dreiecke mit polwärts gewendeter Spitze. Letztere sind häufiger (Fig. 10).

c) 30% Säure gibt ähnliche Formen, wie die 50% Säure, doch vorwiegend Fünfecke (Fig. 13).

Um ein zweites Beispiel des Einflusses der Concentration der Säure auf die Formen der Ätzfiguren zu geben, mögen noch einige Versuche mit Salpetersäure hier Platz finden. Die Krystalle wurden mittelst eines Glasstabes mit einem Tropfen Säure betupft, welcher dann nach einiger Zeit mit einem Wasserstrahle rasch weggewaschen wurde.

a) Mit concentrirter, käuflicher Säure erhält man quer verlängerte Deltoide, deren hintere Spitze abgestumpft oder abgerundet ist (Fig. 30).

b) Mit 20 Theilen concentrirter, käuflicher Säure auf 80 Theile Wasser (20% Säure) erhält man nach längerer Einwirkung Dreiecke mit vorderer Spitze (Fig. 31, *c*, *d*), nach sehr kurzer Einwirkung auch Rechtecke (Fig. 31, *a*).

c) Mit 10% Säure erhält man Dreiecke wie vorher; doch häufig ist an denselben eine schmale Abstumpfung der nach vorn laufenden Kante zu bemerken (Fig. 32).

d) Mit 5—3% Säure erhält man meist Vierecke, welche man sich durch Abstumpfung der vorderen Spitze eines Dreieckes entstanden denken kann oder Fünfecke mit nach hinten gerichteter Spitze (Fig. 33 und 34).

e) Mit 2% Säure erhält man Fünfecke oder Dreiecke mit nach hinten gerichteter Spitze (Fig. 35).

Über den Einfluss der Natur der Säure auf die Form der Ätzfiguren ergeben meine Versuche so viel, dass ein solcher vorhanden ist, wie aus dem Vergleiche der mit verschiedenen Säuren entstehenden Figuren hervorgeht. Ich verweise in dieser Beziehung auf die Abbildungen, von welchen Fig. 2—15 die Ameisensäure, Fig. 16—28 die Essigsäure, Fig. 29 die Picrinsäure Fig. 30—36 die Salpetersäure, Fig. 38—46 die Salzsäure, Fig. 47—52 die Phosphorsäure, Fig. 53—56 die Schwefelsäure, Fig. 57—60 die Chromsäure betreffen. Doch ergibt sich, dass der Einfluss der Natur der Säure von geringerer Wichtigkeit ist, als der Einfluss der Concentration derselben Säure, denn die Verschiedenheiten der Formen, welche man durch Änderung der Concentration derselben Säure erhalten kann, sind im Allgemeinen viel auffälliger als die Verschiedenheiten, welche man durch verschiedene Säuren erhält. Doch könnte man sich über diesen Punkt erst dann mit grösserer Bestimmtheit aussprechen, wenn weit zahlreichere und mannigfaltigere Versuche vorliegen würden, als ich sie angestellt habe. Doch möchte ich Folgendes als bemerkenswerth hervorheben:

1. Wasserfreie Säuren scheinen keine Ätzfiguren hervorzurufen.

Es gelang wenigstens nicht, weder mit wasserfreier Essigsäure, noch mit englischer Schwefelsäure, noch mit trockenem Salzsäuregas Ätzfiguren hervorzurufen. Bezüglich der Versuche mit Schwefelsäure muss ich hervorheben, dass ein mit concentrirter englischer Schwefelsäure geätzter Krystall nicht mit Wasser gewaschen werden darf, wenn man dies constatiren will, denn in dem Momente des Waschens entstehen sofort Ätzfiguren. Man muss vielmehr den Tropfen concentrirter Säure entweder mit

Filtrirpapier absaugen, oder den Krystall in absolutem Alkohol waschen. Obwohl keine Ätzfiguren entstehen, greift die englische Schwefelsäure einen Kalkspathkrystall unter mässiger Kohlensäureentwicklung an. Absolut wirkungslos ist aber Eisessig und trockenes Salzsäuregas. Der Versuch mit letzterem wurde in folgender Weise angestellt. Auf den Boden einer starken Eprouvette wurde trockenes Kochsalz gebracht. Hierauf wurde dieselbe vertical in einem Halter festgeklemmt und auf den Boden derselben ein kleines Schälchen mit concentrirter Schwefelsäure gebracht, mit der Vorsicht, dass keine Schwefelsäure verschüttet wurde. Die Eprouvette wurde hierauf mit einem durchbohrten Kautschukpfropfen gut verschlossen, durch dessen Bohrung ein Glasstab gesteckt war, an dessen unterem Ende mittelst Klebwachs ein Spaltungsrhomboëder mit frischen Spaltflächen befestigt wurde.

Der Apparat blieb nun einige Zeit stehen, um ihn ganz auszutrocknen. Hierauf wurde die Schwefelsäure durch Neigen der Eprouvette auf das Kochsalz geschüttet und die nun beginnende Salzsäureentwicklung durch Erwärmen befördert. Auch nach längerer Zeit zeigte das Kalkspathrhomboëder ganz scharfe Kanten, vollkommen intakte Flächen und keine Spur von Ätzfiguren.

2. Ameisen-, Essig- und Schwefelsäure geben bei geringem Wasserzusatz ähnliche Ätzfiguren, wie Salz- und Salpetersäure bei starker Verdünnung mit Wasser.

Ameisensäure und Essigsäure geben bei geringem Wassergehalt rechteckige oder nach rückwärts spitzige, fünfeckige Ätzfiguren. Mit Salzsäure und Salpetersäure kann man ähnliche Figuren erst erhalten, wenn man die käuflichen concentrirten Säuren bis auf $5-2\%$ verdünnt. Schwefelsäure mit wenig Wasser verdünnt scheint ebenfalls rechteckige Ätzfiguren zu geben; doch liess sich dies nicht gut constatiren, weil stärkere Lösungen von Schwefelsäure immer Ausscheidungen von fest auf dem Krystall haftenden Gypsniederschlägen bewirken.

3. Ameisen-, Essig- und Schwefelsäure geben erst bei ziemlich starkem Wasserzusatz ähnliche Ätzfiguren, wie sie Salz- und Salpetersäure in verhältnissmässig starken Concentrationen ergeben. Ameisensäure muss man auf circa 30%, Eisessig auf

circa 9%, Schwefelsäure auf circa 6% verdünnen, um Dreiecke mit nach vorne gerichteter Spitze zu erhalten, während die käufliche concentrirte Salz- und Salpetersäure schon bei wenig Wasserzusatz ähnliche Formen hervorrufen.

Bezüglich der Salzsäure muss jedoch hier bemerkt werden, dass einige Angaben Haushofer's[1] mit meinen Beobachtungen nicht übereinstimmen. Haushofer bildet nämlich viereckige und sechseckige Ätzfiguren ab, welche er mit concentrirter Salzsäure erhalten zu haben angibt, während ich — zwar nicht ganz identische — aber ähnliche Formen nur mit sehr verdünnter (1—3%) Salzsäure erhielt. Es liegt daher nahe zu vermuthen, dass diese durch Ätzen mit concentrirter Säure erzeugten Figuren Haushofer's ihre definitive Form erst beim Waschen des Krystalles, das heisst also durch Einwirkung sehr verdünnter Säure erhalten haben. Will man sicher sein, den reinen Ätzeffect der concentrirten Säure zu haben, ist es am besten, das Waschen ganz zu unterlassen und die Säure mit Filtrirpapier zu entfernen. Doch schadet auch Entfernen der Salzsäure mit einem Wasserstrahle nicht. Wirft man aber den mit Säure bedeckten Krystall in eine Schale mit Wasser, so erhält man in der Regel secundäre Veränderungen der Ätzfiguren.

VIII. Capitel.

Entwicklung der Ätzfiguren auf der Spaltungsfläche. Abhängigkeit der Form von der Geschwindigkeit der Entwicklung. Instantane und retardirte Ätzfiguren.

Es wurde bereits in der ersten Abhandlung[2] auf die eigenthümliche Entstehung der Ätzfiguren hingewiesen, welche wesentlich von jener der Lösungsgestalten verschieden ist. Die Lösungsgestalten bestehen während des ganzen Lösungsvorganges — wenn sie sich überhaupt bilden — und rücken in der Regel unter forwährendem Abschmelzen ihrer Flächen und Kanten, oft auch unter secundären Formveränderungen, allmählig weiter. Die typischen Ätzfiguren dagegen entwickeln sich binnen ver-

[1] l. c., Taf. I, Fig. 9 und 10.

[2] l. c. p. 370 (3).

hältnissmässig kurzer Zeit, bleiben dann — ohne sich weiter zu vergrösseren—unverändert stehen, bis sie endlich durch anderweitige Lösungsvorgänge oder durch neue selbständig entstehende Ätzfiguren zum Verschwinden gebracht werden.

Der Umstand, dass man niemals wissen kann, wo gerade eine Ätzfigur sich bilden wird, erschwert sehr die Beobachtung der Entwicklung; umsomehr, als dieselbe häufig eine ganz ausserordentlich rasche ist. Da man ausserdem nur mit stärkeren Vergrösserungen das Anfangsstadium einer Ätzfigur wahrnehmen kann, so ist es ein glücklicher Zufall, wenn beim Ätzen eines Krystalles unter dem Mikroskope gerade in einem Punkte des Gesichtsfeldes, auf welchen man aufmerksam ist, eine Ätzfigur auftritt. Kleine Ätzfiguren sind unter Flüssigkeit überdies sehr blass; es ist daher wohl schwer möglich die erste Spur einer solchen zu sehen. Zu alldem kommt noch der Umstand, dass im Ganzen beim Zusatze von Säuren zu einem unter dem Deckglase liegenden Krystalle die Ätzfiguren weniger zahlreich auftreten, als beim Betupfen eines grösseren Krystalles mit einem Tropfen Säure. Manchmal bleiben bei der Ätzung unter dem Deckglase die Ätzfiguren überhaupt ganz aus, wenn nämlich das Deckglas dem Krystalle dicht umliegt. Es wurde daher bei der Beobachtung der Entstehung der Ätzfiguren folgendermassen verfahren: Zunächst wurde ein kleines Spaltungsrhomboëder mittelst einer Lösung von Dammarharz in Xylol auf einen Objectträger gekittet. Dies ist zweckmässig, damit der Krystall durch die Flüssigkeitsströme und die Kohlensäureentwicklung sich nicht verschieben kann. Hierauf wurde ein Deckglas aufgelegt, das nur mit einem Rande den Objectträger berührte, an der entgegengesetzten Seite aber mittelst eines kleinen Klümpchens Klebwachs so an den Objectträger befestiget wurde, dass das Deckglas von der oberen Fläche des Krystalles merklich abstand; jedoch nicht mehr, als dass noch die Benützung eines mittelstarken Objectives möglich war. Hierauf wurde der Raum unterhalb des Deckglases mit Wasser ausgefüllt und nun die obere Fläche des Krystalles eingestellt. Nun erst wurde ein Tropfen Säure an den Rand des Deckglases gebracht, der durch Diffusion in das Wasser eindrang. Die Concentration der wirkenden Säure ist daher im Allgemeinen bei diesen Versuchen unbestimmt. Nur

die concentrirte Ameisensäure wurde auch direkt — ohne Wasser — zugesetzt, weil in diesem Falle die Ätzfiguren sich sehr langsam entwickeln.

Mit concentrirter Ameisensäure (1·2 spec. Gewicht) sieht man als erste Spur einer Ätzfigur zuerst ein ganz kleines Rechteck. Dasselbe vergrössert sich im Verlaufe von etwa ein bis zwei Minuten ganz allmählig und zuletzt so langsam, dass man nur durch Controle mit dem Ocularmikrometer das Auseinanderrücken der Seiten constatiren kann. Schliesslich steht die Figur still und zeigt auch nach langer Beobachtung keine Veränderung, vorausgesetzt dass nicht anderweitige Lösungserscheinungen (Abschmelzen der Ränder der Figur, Lösungsgestalten, neue Ätzfiguren) die Figur zerstören. Die Erweiterung der Figur während der Bildung geschieht anscheinend nach allen Seiten ziemlich gleichmässig; nur die hintere Seite, welche anfänglich fast gerade ist, wird allmählig gekrümmt oder geht in eine gebrochene Kante über, wodurch aus dem Rechtecke ein Fünfeck mit undeutlicher hinterer Spitze wird. (Fig. 2, 3). Die Entwicklung anderer Figuren als solcher mit ebenem Boden (Vergleiche Fig. 4, *e*), welche bei weitem die häufigsten sind, habe ich unter dem Mikroskope nicht direct gesehen.

Mit ähnlicher Langsamkeit, wie mit Ameisensäure verlief die Entwicklung mit starker Essigsäure. Hier konnte ich die allmählige Entstehung eines Fünfeckes mit nach hinten gewendeter Spitze aus einem anfänglich kleinen viereckigen Flecke bemerken.

Ganz anders verlief aber der Process mit Salpetersäure. Die erste wahrnehmbare Spur der Ätzfigur war auch hier ein Rechteck, welches jedoch nach der Polseite alsbald etwas ausgezackt wurde und nun in ein Fünfeck mit nach vorn gerichteter Spitze überging, während gleichzeitig fünf Kanten sichtbar wurden, welche ungefähr von der Mitte des Bodens gegen die Ecken ausliefen. Dieses Fünfeck erweiterte sich nun rasch nach allen Seiten, während gleichzeitig die Ecke am Boden der Figur durch eine der Spaltungsfläche parallelen Fläche abgestumpft wurde. Plötzlich, wie mit einem Schlage, rundeten sich nun die vorderen seitlichen Ecken des Fünfeckes ab, wodurch das Fünfeck in ein Dreieck mit abgerundeten Seiten — die bekannteste

Ätzfigur — überging. Dieses Dreieck erweiterte sich noch mit abnehmender Geschwindigkeit und blieb dann bald stehen, ohne sich weiter zu verändern. (vergl. Fig. 36). Die ganze Entwicklung dauerte höchstens 3—4 Secunden, die Umwandlung des Fünfeckes in ein Dreieck geschah fast momentan.

Wieder anders verlief der Process mit Phosphorsäure. Hier zeigte die Ätzfigur schon sobald, als sie sichtbar wurde, die Form eines kleinen Dreieckes mit gebogenen Seiten, das jedoch aus einem Fünfecke entstanden zu sein schien (vergl. Fig. 50, *b*). Dieses Dreieck erweiterte sich ziemlich rasch, jedoch so, dass es mehr der Form eines Dreieckes mit drei gleichen, gebogenen Seiten sich näherte. In einigen Fällen konnte ich eine secundäre Abstumpfung der dreikantigen Ecke am Boden der Figur auftreten und rasch sich vergrössern sehen. Mit Phosphorsäure verlief die Entwicklung der Ätzfigur merklich langsamer als mit Salpetersäure, so dass die letzten Stadien der Erweiterung des Dreieckes nur mit Hülfe des Mikrometers erkannt wurden und ein Feststehen der Figur erst nach circa 30 Secunden eintrat.

Nachdem ich einmal diese Erfahrungen über die ausserordentlich verschiedene Geschwindigkeit, mit welcher sich Ätzfiguren entwickeln können, gemacht hatte, suchte ich mich nach einer anderen Methode über die Abhängigkeit der Entwicklung der Ätzfiguren von der Zeit zu orientiren. Ich kittete mit Damarlack etwas grössere Spaltungsstücke auf je einen Objectträger und betupfte dieselben mittelst eines Glasstiftes mit einem Tropfen Säure, welcher nach Verlauf einer bestimmten Zeit mit dem Strahl der laufenden Wasserleitung abgewaschen wurde. Die Zeitmessung geschah in ganz roher Weise durch Zählen unter Controle einer Uhr. Es kam zunächst ja nur darauf an, überhaupt den Einfluss der Zeit auf die Bildung verschiedener Ätzfiguren zu constatiren. Die Zeitangaben sind daher nur als beiläufige Schätzungen anzusehen. Unter „momentan" ist im Folgenden die Zeit zu verstehen, welche nothwendig war, um einen Krystall, sofort nach dem Betupfen mit Säure, unter den dicht daneben befindlichen Wasserstrahl zu bringen. Diese Zeit ist jedenfalls kürzer als eine halbe Secunde.

Betupft man einen Krystall mit einem Tropfen (etwa 20%) Salpetersäure und lässt denselben einige Secunden einwirken,

so findet man die ganze Krystallfläche mit dichtstehenden Ätzfiguren verschiedenster Grösse bedeckt. Dies rührt daher, dass fortwährend neue Ätzfiguren sich bilden. Die grössten sind die zuerst, die kleinsten die zuletzt entstandenen. Lässt man die Säure nur eine oder zwei Secunden einwirken, so sind die Ätzfiguren von viel gleichmässigerer Grösse. Bei momentaner Ätzung sind dieselben sehr klein und alle nahezu von derselben Grösse. Sucht man an jedem Präparate die grössten Ätzfiguren — was übrigens, wie gesagt, nur für relativ länger dauernde Ätzungen in Frage kommt, — so darf man wohl annehmen, dass dieselben das der betreffenden Zeit entsprechende Entwicklungsstadium darstellen. Bei Ätzungen mit stärkerer Salpetersäure, Salzsäure etc. darf man übrigens über 5—7 Secunden nicht hinausgehen, da man seltener nach dieser Zeit noch merkliche Vergrösserungen der Ätzfiguren bemerkt und ausserdem das dichte Ineinandergreifen alter und neuer Figuren das Präparat unbrauchbar macht.[1]

Fig. 31 gibt eine Reihe von Ätzfiguren wieder, welche mit 20% Salpetersäure nach der eben beschriebenen Methode dargestellt sind, und zwar sind *a* und *b* momentan, *c* nach 2—3 Secunden, *d* nach 6 Secunden gebildet. Es ist mir ein einziges Mal gelungen, mit verdünnter Salpetersäure das früher beschriebene Stadium, in welcher die Ätzfigur ein Fünfeck bildet, zu fixiren (Fig. 36, *b*); fast ausnahmslos erhält man Dreiecke, wann immer die Ätzung unterbrochen werden mag. Da die Umwandlung des Fünfeckes in ein Dreieck, wie die directe Beobachtung lehrte, ungemein rasch erfolgt, so ist es im Allgemeinen begreiflich, dass dieses Stadium sich schwer fixiren lässt. Es ist aber auch möglich, dass das Stadium des deutlichen Fünfeckes, ähnlich, wie dies für die Phosphorsäure als Regel gilt, mitunter auch mit Salpeter-

[1] Durch dichtes Aneinanderdrängen von Ätzfiguren bei längerer Wirkung der Säure können ziemlich regelmässige Erhöhungen entstehen, wie bereits Haushofer und Baumhauer bemerkten. Man könnte diese Erhöhungen, deren Entstehung durch Ätzfiguren in der Regel sehr leicht zu erkennen ist, als falsche Lösungsgestalten von den wahren unterscheiden. Ich habe eine Gruppe solcher zwischen dicht gedrängten Ätzfiguren befindlicher Erhöhungen — mit Phosphorsäure dargestellt — in Fig. 52 abgebildet.

säure ganz ausfällt. Mit ähnlicher Raschheit, wie mit verdünnter Salpetersäure entstehen die Ätzfiguren auch mit verdünnter Salzsäure, wovon Fig. 40 ein Beispiel gibt. (50% Säure, *a* momentan, *b* 2 Secunden, *c* 4 Secunden.) Concentrirte Salpeter- und Salzsäure wirken ebenfalls sehr rasch, wofür Fig. 30 und 39 als Beispiel dienen können. Auch concentrirte Phosphorsäure und Chromsäure (Fig. 57) wirken sehr rasch. Dass concentrirte Schwefelsäure (spec. Gewicht 1·845) keine Ätzfiguren erzeugt, wurde schon früher erwähnt; man erhält sie aber sofort, wenn der Tropfen, mit welchem der Krystall betupft wurde, mit Wasser abgewaschen wird durch die dabei stattfindende Verdünnung und Erwärmung der Säure (Fig. 56).

Alle bisher erwähnten Bildungen sind durch ihre rasche Entwicklung ausgezeichnet und können in Beziehung auf diese als instantane Ätzfiguren bezeichnet werden.

Als eine zweite Gruppe, welche durch die Langsamkeit der Entwicklung ausgezeichnet ist, kann man retardirte Ätzfiguren unterscheiden.

Als Typus retardirter Ätzfiguren können die mit concentrirter Ameisensäure erzeugten gelten. Mit dieser Säure erhält man nach momentaner Ätzung keine deutliche Spur einer Wirkung; erst nach Verlauf von etwa 10 Secunden sind Rechtecke in einem Stadium zu sehen, in welchem sie mit 20% Salpetersäure schon nach momentaner Wirkung sich befinden (Fig. 2, 3, *a*). Die Vergrösserung nach einer Minute ist noch nicht sehr bedeutend (Fig. 2, 3, *b*),' noch nach $1^1/_2$ Minuten (Fig. 2, 3, *c*) hat die Figur bei weitem nicht das mögliche Maximum ihrer Grösse erreicht; es scheint, dass dieselbe 2—3 oder noch mehr Minuten wachsen kann. Die retardirten Ätzfiguren haben wesentlich andere Formen als die instantanen. Während letztere schliesslich einen dreieckigen oder deltoidischen Umriss mit vorderer Spitze erhalten, zeigen die ausgesprochen retardirten Ätzfiguren entweder einen rechteckigen, viereckigen oder fünfeckigen Umriss mit vorderer Abstumpfung. Ätzfiguren, welche den mit Ameisensäure erzeugten sehr ähnlich sind, aber nie so bedeutende Grösse erreichen, erhält man auch mit concentrirter Essigsäure; sehr häufig entwickeln sich aber nur rechteckige, zum Theil unregelmässige Flecken (wie in Fig. 16), während Fünfecke, wie sie in Fig. 17,

18 und 19 abgebildet sind, fehlen können. Die Figuren entwickeln sich aber, wenn sie überhaupt auftreten, mit ähnlicher Langsamkeit, wie jene der Ameisensäure.

Es wurde bereits früher nachgewiesen, dass man sowohl mit Ameisensäure als mit Salpetersäure sehr verschiedene Ätzfiguren je nach der Concentration und Temperatur erzeugen kann; es liegt daher auch die Annahme nahe, dass diese Formverschiedenheiten mit Differenzen in der Geschwindigkeit der Entwicklung zusammenfallen. In der That lässt sich auch ein solcher Zusammenhang von Form und Geschwindigkeit der Entwicklung einer Ätzfigur constatiren.

Man kann nämlich einerseits mit verdünnter Ameisensäure instantane Ätzfiguren erzeugen, welche die Form von Dreiecken mit nach vorne gewendeter Spitze haben; anderseits mit sehr verdünnter Salz- und Salpetersäure retardirte Ätzfiguren darstellen, welche den mit concentrirter Ameisensäure erzeugten Figuren ähnlich sind. Nimmt man Ameisensäure, welche man zur Hälfte mit Wasser verdünnt, so entwickeln sich die Ätzfiguren schon viel rascher als mit concentrirter Säure und es zeigt sich bereits eine polwärts gewendete Spitze (Fig 8). Erhitzt man aber diese verdünnte Säure zum Kochen, so erhält man schon nach 2—3 Secunden instantane Figuren als Dreiecke mit polwärts gewendeter Spitze (Fig. 9). Nimmt man dagegen Salpeter- oder Salzsäure von etwa 2—5%, so entstehen bei nur Secunden dauernder Wirkung keine deutlichen Ätzfiguren; im Verlaufe von 15 bis etwa 45 Secunden entwickeln sich aber retardirte Ätzfiguren, welche — zum Theile — den mit concentrirter Ameisen- oder Essigsäure entstehenden sehr ähnlich sind. (Vergl. Fig. 35 [Salpetersäure], Fig. 45 und 46 [Salzsäure], Fig. 17, 18 [Essigsäure], Fig. 4 [Ameisensäure.])

Instantane und retardirte Ätzfiguren sind die Endglieder einer Reihe von Formen, welche sich durch verschiedene Geschwindigkeit der Entwicklung unterscheiden. Wollte man alle Ätzfiguren in diese beiden Kategorien unterbringen, so könnte daher die Grenze nur willkürlich gezogen werden. Vorläufig können wir uns damit begnügen, als instantane Ätzfiguren solche zu bezeichnen, an welchen schon nach 1—2 Secunden dauernder Säurewirkung die definitive Form — wenn auch nicht

Grösse — sichtbar ist. Obwohl ich bei Weitem nicht alle Ätzfiguren der Spaltungsfläche auf die Geschwindigkeit ihrer Entwicklung prüfte, glaube ich doch nicht zu irren, wenn ich alle Dreieck- und Deltoidformen mit polwärts gewendeter Spitze als instantane, alle Ätzfiguren aber, welche polwärts eine Kante als Abgrenzung haben, als retardirte betrachte.

IX. Capitel.

Versuch einer Erklärung der Ätzfiguren der Spaltungsfläche. Chemische Härtecurve. Zusammenfassung der bisher gewonnenen Resultate.

Der ursprüngliche Umriss aller retardirten Ätzfiguren auf der Spaltungsfläche ist ein Rechteck, dessen Seiten den Diagonalen der Spaltungsfläche parallel sind. Es entsprechen also die Umrisslinien dieser Figur genau den Richtungen, in welchen die Flächen des Lösungs-Rhomboëders $-2R$ einschneiden. (Vergl. Fig. 1, *A*.) Knüpfen wir an die theoretischen Bemerkungen im II. Capitel der ersten Abhandlung an, so wird es aus den dort auseinander gesetzten Prinzipien erklärlich erscheinen, dass durch die von einem Punkte ausgehende Zerstörung von Substanz nach den genannten Richtungen schliesslich eine rechteckige Umrissfigur entstehen wird. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn die Zerstörung langsam fortschreitet.

Der Boden der Figur kann im Allgemeinen die Flächen des Lösungs-Rhomboeders nicht genau wiedergeben. Dies leuchtet vor Allem bezüglich des hinteren Randes ein; denn dieser müsste vermöge der Lage der Flächen des Lösungs-Rhomboëders ein überhängender werden. Ein solcher kann aber unmöglich bestehen, da er ja vor Allem der Zerstörung ausgesetzt wäre. Aber auch die anderen Lösungsflächen könnten sich nur dann entwickeln, wenn überall genau gleichzeitig mit derselben Geschwindigkeit Substanz nach den Lösungsflächen abgetragen würde. Das wird aber schon desshalb im Allgemeinen nicht zutreffen, weil in der Tiefe weniger günstige Bedingungen für die Lösung bestehen, als an den Rändern der Figur und die Säure in einer Grube ziemlich bald sich sättigen wird. Die allgemeine Tendenz der Ätzfiguren, einen flachen Boden zu bekommen, beruht wohl

darauf, dass gewöhnlich am zuerst angegriffenen Punkte die Zerstörung stille steht, während sie gegen die Peripherie noch fortschreitet. Im günstigsten Falle wird die Flächenlage der Figur insoweit der des Lösungs-Rhomboëders ähnlich werden, dass von den seitlichen und den vordern Rändern Flächen abfallen, welche den Lösungsflächen sich nähern. Für den hinteren Rand wird jedoch selbst dieses aus dem früher angeführten Grunde nicht zutreffen. An diesem muss sich im Gegentheile — wenn wir von secundär auftretenden Kanten absehen — eine Fläche von entgegengesetzter Lage sich ausbilden.

Ätzfiguren, welche in dieser Einschränkung der Lösungsgestalt entsprechen, erhält man durch Essigsäure (Fig. 22) und Ameisensäure als Vier- und Fünfecke; überhaupt behalten alle stark retardirten Ätzfiguren eine noch deutlich erkennbare Beziehung zu den Lösungsflächen.

Dass dies durchaus nicht mehr der Fall ist bei allen instantanen Ätzfiguren, hat seinen Grund darin, dass die verschiedene Löslichkeit der Substanz in verschiedenen Richtungen eine eminente Bedeutung gewinnen muss, wenn die Lösung sehr rasch nach allen Seiten fortschreitet. Um diesen Punkt klarer zu machen, ist es zweckmässig, zunächst auf die Härte der Krystallflächen etwas einzugehen, da diese Analogien bietet, welche die Beziehungen von Löslichkeit und Lösungsflächen verständlicher machen können.

Es ist seit Frankenheim, insbesondere aber durch F. Exner[1] bekannt, dass sehr nahe Beziehungen zwischen der Härte der Krystallflächen und der Spaltbarkeit bestehen.

Misst man die Härte durch die Belastung, welche der ritzenden Spitze eines Sklerometers ertheilt werden muss, damit eine unter derselben fortbewegte Krystallfläche eben geritzt wird, so ergibt sich, dass diese Belastung eine nach den Richtungen der Krystallfläche veränderliche ist. Bestimmt man die Härte für die verschiedenen Richtungen, wobei im allgemeinsten Falle die Bewegungen in derselben Linie, aber im entgegengesetzten Sinne verschiedene Härte ergeben, durch die belastenden Gewichte und trägt diese als Längen in eine graphische Construction der

[1] Untersuchungen über die Härte der Krystallfläche. Wien 1873.

Richtungen auf und verbindet die Endpunkte dieser Linien, so erhält man eine Härtecurve der betreffenden Krystallfläche im Sinne Exner's. Dieselbe weist im Allgemeinen mehrere Maxima und Minima, oft von ungleichem Werthe auf, deren Anordnung jedoch in einfacheren Fällen meistens eine deutliche Beziehung zu den Spaltungsrichtungen zeigt.

Nach den Untersuchungen Exner's schien es, dass die Beziehungen zwischen der Härte einer Krystallfläche und der Spaltbarkeit relativ einfache seien. Dies wurde durch neuere Untersuchungen von Fr. Pfaff,[1] welche nach einer weit exacteren Methode angestellt wurden, als sie der älteren Sklerometrie zu Grunde lag, nicht bestätigt, und es ist vorläufig gar nicht daran zu denken, den Zusammenhang von Härte und Spaltbarkeit durch mathematische Formeln auszudrücken.

Dennoch empfiehlt es sich, an die empirisch festgestellten Beziehungen von Härte und Spaltbarkeit anzuknüpfen, um eine Vorstellung von dem Zusammenhange der Lösungsflächen und der Löslichkeit eines Krystalles nach verschiedenen Richtungen einer Krystallfläche zu gewinnen.

Denken wir uns nun zunächst die Lösungsflächen als Spaltungsflächen, so können wir annähernd die allgemeine Form der Härtecurve angeben, welche der Grund-Rhomboëderfläche des Kalkspathes zukommen würde, wenn $-2R$ das Spaltungs-Rhomboëder wäre. Der Fall, um den es sich hier handelt, ist verhältnissmässig einfach, und es lässt sich aus den analogen, von Exner untersuchten Fällen wohl mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass vier Minima vorhanden sein werden, von welchen je zwei in die Richtungen der Diagonalen des Grund-Rhomboëders mit anderen Worten in die Richtungen der Combinationskanten der Lösungsflächen fallen.

Durch die Untersuchungen Exner's ist in mehreren Fällen festgestellt, dass zwei mit parallelen Combinationskanten und mit gleichen, aber entgegengesetzten Neigungen auf die untersuchte Fläche einschneidende Spaltungsebenen, wie eine einzige, senkrecht einschneidende Spaltungsebene betrachtet werden

---

[1] Sitzungsber. d. k. b. Akademie d. Wissensch. zu München, Bd. XIII. Jahrg. 1883, pag. 55 und 372.

können. Dadurch reducirt sich der vorliegende Fall auf denjenigen, welchen Exner auf den Prismenflächen des Schwerspathes und des rothen Blutlaugensalzes genauer untersucht hat. Berücksichtigt man, dass die Richtung in der Klinodiagonale voraussichtlich eine geringere Härte ergeben muss, als die Richtung der horizontalen Diagonale, in welcher eine geneigte Fläche einschneidet und dass vermöge der monoklinischen Symmetrie der Fläche die in die lange Diagonale fallenden Minima gleich, die in die kurze Diagonale fallenden aber ungleich sein müssen; berücksichtigt man endlich, dass bei schief einschneidenden Spaltungsflächen die Härte in der Richtung vom stumpfen Spaltungswinkel gegen den spitzen stets eine grössere ist, als in der entgegengesetzten, so kann man erschliessen, dass das kleinste Minimum in die kurze Diagonale und zwar in die Richtung vom Pol zur Seitenecke, das nächstgrössere in die entgegengesetzte Richtung fällt, die beiden gleichen, grössten Minima aber der langen Diagonale angehören. Über die Maxima lässt sich nur soviel aussagen, dass deren vier vorhanden sein werden. Genauere Angaben über Richtung und Grösse derselben lassen sich jedoch nicht machen. Der untere Theil der Figur 1(B), welche im Wesentlichen der von Exner auf einer Prismenfläche des rothen Blutlaugensalzes gefundenen Härtecurve nachgebildet ist, kann eine annähernde Vorstellung von einer möglichen, chemischen Härtecurve der Fläche des Grund-Rhomboeders des Kalkspathes geben.

Unter chemischer Härtecurve soll aber im Folgenden die Curve verstanden werden, welche sich nach Analogie der sklerometrisch festgestellten Thatsachen ergeben würde, wenn die Lösungsflächen mechanische Spaltungsflächen wären.

Es handelt sich nun darum, eine Vorstellung darüber zu gewinnen, wie der Lösungsvorgang, der bei der Bildung einer Ätzfigur stattfindet, mit der in allgemeinen Zügen abgeleiteten chemischen Härtecurve zusammenhängt. Dass ein solcher Zusammenhang bestehen wird, darüber dürfte — wenn man überhaupt die Existenz von Lösungsflächen in dem früher festgestellten Sinne zugibt — wohl kein Zweifel sein. Es ist aber vorläufig nicht möglich, diesen Zusammenhang in seinen Einzelheiten aufzudecken.

Der bei der Bildung einer Ätzfigur stattfindende Process lässt sich vorläufig noch nicht genau übersehen. Man muss sich mit der Annahme begnügen, dass von einem Punkte nach allen Seiten ein besonders intensiver Lösungsvorgang ausgehe, der sich aber bald erschöpft. Dieser Lösungsvorgang wird wohl eingeleitet werden durch einen für die Lösung besonders günstigen Bewegungszustand (erhöhte, kinetische Energie) der Säuremoleküle an einem Punkte, welcher Bewegungszustand sich allmälig auf benachbarte Moleküle überträgt, und zwar nach allen Seiten mit derselben Geschwindigkeit — etwa, wie eine von einem Punkte ausgehende Wasserwelle.

Stellt man sich nun den Lösungsvorgang auf einer Fläche vor, in welcher die chemische Härtecurve ein Kreis wäre, d. h. eine amorphe, isotrope Substanz, so müsste eine kreisförmige Ätzfigur sich entwickeln, welche trichter- oder muldenförmig vertieft ist, wobei der tiefste Punkt dem Ausgangspunkt der Bewegung entsprechen würde; denn die Lösung wird umsomehr in die Tiefe greifen, je grösser die Energie der lösenden Substanz und je länger dauernd der Process ist. Die Energie der Moleküle wird mit dem Fortschreiten der Bewegung sich bald erschöpfen, da die Lösung von Substanz nur auf Kosten der Energie der lösenden Flüssigkeit geschehen kann. Für die Zulässigkeit dieser Vorstellungen spricht die Thatsache, dass man auf einer Glasplatte, welche kurze Zeit mit verdünnter Flusssäure[1] oder mit schmelzendem Ätzkali geätzt wird, muldenförmige Ätzfiguren von kreisförmigem Umriss erhält, wie aus Fig. 119, Taf. V zu ersehen ist.

Denken wir uns aber nun eine Krystallfläche mit einer chemischen Härtecurve, so muss durch eine solche das kreisförmige Fortschreiten der Lösung wesentlich modificirt werden. Es lässt sich aber nicht sofort übersehen, welchen Umriss die Ätzfigur in Bezug auf die chemische Härtecurve erhalten wird.

---

[1] Das Hervortreten von krystallartigen Ecken beim Ätzen des Glases mit Flussäure, welches Leydolt (diese Ber. Bd. VIII, 1852, pag. 261) beschrieb, konnte auch ich an manchen Gläsern bemerken. Es sind aber stets auch kreisförmige Ätzfiguren — manchmal nur solche — zu sehen, welche unregelmässig vertheilt, längs vorher vorhandenen Ritzen aber häufig reihenweise geordnet sind.

Bei flüchtiger Überlegung möchte man glauben, dass der Umriss der Ätzfigur reziprok zur chemischen Härtecurve sich verhalten müsse, d. h. dass in der Richtung des kleinsten Minimums die Figur am weitesten, in der Richtung des grössten Maximums dagegen am wenigsten weit fortschreiten müsse. Denn offenbar entspricht das Minimum der chemischen Härte der Richtung der grössten Löslichkeit, das Maximum der chemischen Härte aber der Richtung der geringsten Löslichkeit in der Krystallfläche. Indessen würde sich ein solcher Umriss der Ätzfigur nur dann einstellen können, wenn dieselbe nur in der Fläche, nicht aber auch in die Tiefe — wie es ja immer der Fall ist — sich ausbreiten würde. Dieser letztere Umstand muss zur Folge haben, dass in der Richtung der grössten Löslichkeit die Figur um so mehr sich vertieft, je rascher der Process fortschreitet, und dass umgekehrt das Fortschreiten der Figur in der Fläche gerade in dieser Richtung relativ behindert wird. Im Ganzen wird eine instantane Ätzfigur, je rascher sie sich entwickelt, um so mehr in ihrem Umrisse der chemischen Härtecurve sich annähern, jedoch mit dem wesentlichen Unterschiede, dass niemals die Minima der Härtecurve in Form von einspringenden Winkeln erscheinen können. Zu besserem Verständniss des Gesagten vergleiche man Fig. 1, *B* und allenfalls die Umrisse instantaner Ätzfiguren, wie sie in Fig. 38, 39 und 40 abgebildet sind.

Bei Betrachtung der verschiedenen Formen der Ätzfiguren auf der Spaltungsfläche, wie sie auf Taf. I bis III abgebildet sind, lässt sich Folgendes über die Beziehungen derselben zur chemischen Härtecurve entnehmen. Am meisten verkürzt und vertieft erscheinen in der Richtung des kleinsten Minimums die Dreiecke mit vorderer Spitze, wie sie mit Salpeter-, Salz-, Phosphor-, Schwefel- und Chromsäure sehr rasch entstehen und den reinen Typus instantaner Ätzfiguren darstellen. Etwas weniger verkürzt in der Richtung des kleinsten Minimums erscheinen die deltoidischen Ätzfiguren, deren Diagonalen im Ganzen den Minima entsprechen. Bei stärker retardirten Ätzfiguren stellt sich statt der Verkürzung und Vertiefung eine Verlängerung und Abflachung in der Richtung des kleinsten Minimums ein, welche selbst bei extrem retardirten Ätzfiguren, die dem Umriss der Lösungsgestalt sich nähern, meistens noch zu bemerken ist. Die ausserordent-

liche Mannigfaltigkeit der Ätzfiguren dürfte wohl daher rühren, dass die chemische Härtecurve für verschiedene Säuren und Säureconcentrationen Änderungen des Verhältnisses der Maxima und Minima bedingt, ohne dass jedoch die allgemeine Anordnung der Minima alterirt würde. So wird man sich Ätzfiguren, wie sie in Fig. 7 und noch mehr, wie sie in Fig. 28 abgebildet sind, wohl am leichtesten durch die Annahme erklären, dass in diesen Fällen die Maxima und Minima nicht sehr grosse Differenzen zeigten.

Was die Kanten am Boden der Ätzfiguren anbelangt, so laufen dieselben im Allgemeinen von den Ecken der Umrissfigur gegen einen tiefsten Punkt des Bodens zusammen. Es hängt daher die Beschaffenheit der Kanten mit der Geschwindigkeit der Entstehung der Figur zusammen.

Die Variabilität der Richtung der seitlichen vertieften Kanten instantaner Ätzfiguren erklärt sich wohl durch eine inconstante Geschwindigkeit des Fortschreitens der Lösung in der Richtung nach vor- und rückwärts, wenn man gleichzeitig die Voraussetzung macht, dass die Ränder der Figur während ihres Fortschreitens sich stets parallel bleiben, eine Voraussetzung, die ja durch die Beobachtung gerechtfertigt ist. Denn ausgezeichnet instantane Ätzfiguren erreichen sehr bald ihre definitive Form und vergrössern sich, indem ihr Umriss sich selbst geometrisch ähnlich bleibt. Nur unter der Voraussetzung, dass nun die Figur in der Richtung nach vorne und hinten im gleichen Verhältnisse fortschreitet, können Kanten in die horizontale (lange) Diagonale der Grund-Rhomboederfläche fallen, wie aus dem Diagramme Fig. 37 (linke Seite) ersichtlich ist. Wenn wir nur gerade Kanten berücksichtigen, so lassen sich die Bedingungen, unter welchen die seitlichen vertieften Kanten von der Richtung der horizontalen Diagonale abweichen, durch folgende Beziehungen ausdrücken, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit anfänglich eine variable, später aber eine constante sei. Bezeichnet man mit P die anfängliche Geschwindigkeit nach der Polseite, mit V aber die später constante Geschwindigkeit in dieser Richtung, ferner mit R die anfängliche, mit v die spätere constante Geschwindigkeit in der Richtung nach der stumpfen Seitenecke, so besteht im Allgemeinen die Beziehung: $P:V \gtreqless R:v$, welche sich graphisch dar-

stellen lässt. Nur wenn $P:V=R:v$ ist, so fällt die seitliche vertiefte Kante in die Richtung der horizontalen Diagonale. Ist aber $P:V>R:v$, so werden die Enden der vertieften Kanten nach vorne abgelenkt; im entgegesetzten Falle, wenn $P:V<R:v$, werden sie dagegen nach hinten abgelenkt. In dem Diagramme Fig. 37 würden für die linke Seite die Grössen P und R durch 0—1 und 0—1 repräsentirt, V und v aber durch die Constanten 1—2 oder 2—3 etc. Für die rechte Seite des Diagramms ist $P=o'$—1 und $R=o'$—1′, während die Constanten V und v dieselben bleiben, wie im früheren Falle. Da voraussichtlich eine constant bleibende Geschwindigkeit des Fortschreitens der Lösung, insbesondere im Beginne derselben, in der Regel nicht vorhanden sein wird, so sind häufig vorkommende Anomalien der seitlichen vertieften Kanten begreiflich. Gebrochene Kanten finden ebenfalls ihre Erklärung, doch muss ausdrücklich bemerkt werden, dass nur solche nach hinten gebrochene Kanten aus den angedeuteten Principien erklärt werden können, deren Winkel stumpfer ist, als der hintere Winkel des Umrisses der Ätzfigur; spitzere Winkel können nur durch secundäres Auftreten neuer Ätzfiguren innerhalb der alten erklärt werden, weil die graphische Construction sonst auf Widersprüche führt. Die directe Beobachtung ergibt, dass in der That solche einspringende Ecken secundär auftreten. (Vergl. Fig. 51, Phosphorsäureätzung.)

Störungen der Constanz der Geschwindigkeit im Verlaufe der Entwicklung der Ätzfiguren können auch Krümmungen der Kanten zur Folge haben, wie solche häufig zu beobachten sind.

Schliesslich müssen wir noch der merkwürdigen Thatsache gedenken, dass bei einer und derselben Ätzung instantane und retardirte Ätzfiguren auftreten können. Auf der Spaltungsfläche ist dieser Fall im Ganzen zwar selten zu beobachten, doch kann er fast regelmässig mit 10% Ameisensäure hervorgerufen werden, indem mit dieser rasch grosse Dreiecke mit nach vorne gerichteter Spitze, daneben aber langsam, meist ganz klein bleibende Fünfecke mit nach hinten gerichteter Spitze entstehen (Fig. 15). Dies lässt sich wohl unbedenklich so deuten, dass auch in einer verdünnten Säure Stellen, beziehungsweise Molekülanhäufungen vorkommen können, welche einer bedeutend höheren Säurecon-

centration entsprechen, als es die mittlere ist. Wir werden später bei der ersten Prismenfläche von der merkwürdigen Thatsache zu sprechen haben, dass fast regelmässig innerhalb einer mehr instantanen Ätzfigur eine stark retardirte sich entwickelt.

Die Resultate der mitgetheilten Untersuchungen über die Ätzfiguren der Spaltungsfläche des Kalkspathes lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Mit einer und derselben Säure lassen sich durch Veränderung der Concentration und Temperatur sehr mannigfaltige Ätzfiguren erzeugen, welche unter sich mehr verschieden sind, als die Ätzfiguren, welche mit verschiedenen Säuren aber mit ähnlich wirkender Concentration dargestellt werden.

2. Die feineren Details in den Formen hängen mit der Natur der Säure zusammen; die Hauptformen sind aber wesentlich von der Geschwindigkeit abhängig, mit welcher sich die Ätzfiguren entwickeln.

3. Bezüglich der Geschwindigkeit der Entwicklung kann man instantane (rasch sich entwickelnde) und retardirte (langsam sich entwickelnde) Ätzfiguren unterscheiden. Der Grundtypus der ersteren ist ein Dreieck mit gebogenen Seiten und polwärts gewendeter Spitze; der Grundtypus der letzteren ein Rechteck, dessen Seiten den Diagonalen der Spaltungsfläche parallel sind.

4. Die Form der instantanen Ätzfiguren hängt wahrscheinlich in erster Linie von der chemischen Härtecurve ab; die Form der retardirten zeigt dagegen im Umrisse die Richtungen der Combinationskanten des Lösungs-Rhomboeders $-2\,R$. Instantane und retardirte Ätzfiguren sind durch eine Reihe von Übergangsformen verbunden.

X. Capitel.

Die Ätzfiguren der Basis, der Rhomboëder $-\frac{1}{2}R$ und $-2\,R$, der Prismen ∞R und $\infty P2$, sowie einiger anderer natürlicher Flächen des Kalkspathes.

Während die Untersuchung der Ätzfiguren des Grund-Rhomboëders verhältnissmässig geringe Schwierigkeiten macht, da man sich Spaltungsstücke von genügender Reinheit und bequemer

Form leicht in beliebiger Menge verschaffen kann, sind andere Flächen oft nur mit Mühe in einem zur Untersuchung geeigneten Zustande zu erhalten. Die meisten natürlichen Krystallflächen sind nicht vollkommen eben und nimmt man zum Schleifen und Poliren seine Zuflucht, so bekommt man oft in Folge dieser Procedur störende Nebenwirkungen bei der Ätzung, welche in einer Lockerung der kleinsten Theilchen nach den Spaltungs-, Gleit- und Verschiebungsflächen begründet zu sein scheinen. In Folge dieser Umstände sind meine Beobachtungen über andere Ätzfiguren, als diejenigen der Spaltungsfläche verhältnissmässig wenig zahlreich und zum Theil nicht ganz befriedigend.

Vor allem schien es wichtig, die Basis in Bezug auf instantane und retardirte Ätzfiguren zu untersuchen, da sie die einzige Fläche ist, von deren chemischer Härtecurve man sich insoferne eine genauere Vorstellung machen kann, als die Richtungen der Hauptmaxima und -Minima auf Grund der Analogien mit mechanischen Härtecurven angegeben werden können. Analoge Fälle von mechanischen Härtecurven sind nämlich von Grailich und Pekárek[1] und jüngst von Pfaff[2] auf der Basis des Kalkspathes selbst; ferner von Exner auf der Octaëderfläche des Steinsalzes und des Flussspathes genauer untersucht, und ergeben alle ein in der Hauptsache übereinstimmendes Resultat.

Immer handelt es sich um drei gleich geneigte Spaltungsflächen, welche sich in der untersuchten Fläche unter Winkeln von 60° schneiden. Denkt man sich die betreffende Spaltungsgestalt krystallographisch richtig orientirt in die untersuchte Fläche hineingedrückt, so gäbe sie jedesmal eine Hohlform, deren Umriss ein gleichseitiges Dreieck ist. (Vergl. Fig. 61, *a' b' d'*.)

Die Härtecurve, die dieser Lage der Spaltungsflächen entspricht, hat nun stets — wenn wir die Differenzen der Beobachtungsresultate Exner's und Pfaff's zunächst vernachlässigen — drei Hauptmaxima und drei Hauptminima, von welchen je ein Maximum und ein Minimum in dieselbe Linie, aber in entgegengesetzte Richtung fallen. Das Hauptmaximum fällt in die Richtung vom Winkel zum Halbirungspunkte der gegenüber-

[1] Diese Ber. Bd. XIII.

[2] l. c.

liegenden Dreieckseite, das Hauptminimum in die entgegengesetzte Richtung.[1]

Die Härtecurve zeigt im Ganzen die Eigenschaft, dass in derselben Linie die Härte nach entgegengesetzter Richtung verschieden ist; nur in den drei Linien, welche den Dreieckseiten, beziehungsweise den Spaltungsflächen parallel sind, ist die Härte in beiden Richtungen dieselbe. Sehen wir von den untergeordneten Wendepunkten der Härtecurve ab, so entspricht dieselbe im Ganzen einem gleichseitigen Dreiecke mit eingebogenen Seiten, das aber verwendet liegt zu dem Dreiecke, welches den Abdruck der Spaltungsgestalt darstellt. Es liegt nun auf der Hand, dass dem Lösungs-Rhomboëder $-2R$ bezüglich der Basis ein derartiges Dreieck der chemischen Härtecurve entsprechen muss, wenn wir an der Analogie von Spaltungs- und Lösungsflächen festhalten. Wenn $+R, R, R$ (Fig. 61) die an das Grund-Rhomboeder angeschliffene Basis darstellt, so würde das Dreieck $a'b'd'$ mit dem Mittelpunkte c' dem vertieften Eindrucke eines negativen Rhomboeders entsprechen, die Figur efg aber eine diesem zugehörige Härtecurve darstellen.[2]

Nach Analogie der Betrachtungen über die Beziehungen des Umrisses der instantanen Ätzfiguren der Spaltungsfläche zur Härtecurve dürfen wir erwarten, dass die instantanen Ätzfiguren der Basis im Allgemeinen der chemischen Härtecurve entsprechen, wobei wieder die in der Richtung der kleinsten Maxima erfolgende Vertiefung der Figur und die Behinderung des Fortschreitens derselben umso merklicher sein wird, je rascher die Figur sich entwickelt. Die ausgesprochen instantane Ätzfigur wird annähernd dem Umrisse einer positiven, die ausgesprochen

---

[1] Exner nimmt sechs Maxima und sechs Minima an, wobei die hier im Texte angegebenen Minima als kleine Maxima angesehen werden, zu deren Seiten je zwei Minima fallen, wie sie in Fig. 61 durch punktirte Linien neben den Linien *ca*, *cb*, *cd* angedeutet sind. Exner gibt aber selbst zu, dass seine Beobachtungen auch die Annahme von drei Maxima und Minima, wie sie im Texte festgehalten ist, gestatten. Aus Pfaff's Untersuchungen ergaben sich drei Hauptmaxima und Minima, wie sie im im Texte angeführt sind, ausserdem aber noch je sechs untergeordnete Maxima und Minima. (Vergl. Fig. 61, *A*).

[2] Die Härtecurve ist derjenigen der Octaederfläche des Steinsalzes nach Exner nachgebildet.

retardirte Ätzfigur aber dem Umrisse einer negativen Rhomboëderecke entsprechen müssen. Zwischen diese beiden Extremen müssen sich voraussichtlich noch Zwischenformen finden. Die Beobachtungen stehen nun in guter Übereinstimmung mit diesen theoretischen Voraussetzungen, wie aus den Fig. 62—69 hervorgeht, welche sämmtlich so orientirt sind, wie die Fig. 61.

Mit starker Salz- und Salpetersäure erhielt bereits Haushofer stets positive Dreiecke, mitunter auch Sechsecke oder rundliche Figuren; Baumhauer scheint auch negative Dreiecke gesehen zu haben, welche der retardirten Figur entsprechen. Meine eigenen Beobachtungen sind an künstlich geschliffenen und polirten Flächen, welche theils an dem Spaltungs-Rhomboëder, theils an Prismen von Krystallen aus Andreasberg und Cumberland hergestellt wurden, angestellt.

Man muss sich hüten, mechanisch durch das Schleifen entstandene negative Dreiecke mit Ätzfiguren zu verwechseln. Dies wird indess nicht leicht vorkommen, wenn man überhaupt einmal auf diesen Punkt aufmerksam geworden ist.

Mit stärkerer Salz- und Salpetersäure erhielt ich stets positive Dreiecke, welche der instantanen Ätzfigur entsprechen, oder Sechsecke. (Fig. 62, 63, 66.) Noch mit 10% Salpetersäure erhält man meistens Sechsecke oder positive Dreiecke. Mit 5% Salpetersäure dagegen bekommt man nach längerer Wirkung (30—40 Secunden) rundliche Figuren, zum Theil aber deutliche negative Dreiecke (Fig. 65). Auch verdünnte (20%) Phosphorsäure erzeugt neben Sechsecken deutliche negative Dreiecke (Fig. 67, 68, 69). Ausgezeichnet deutliche, aber leider sehr kleine negative Dreiecke — neben Sechsecken — erhielt ich nach minutenlanger Einwirkung mit 10% Phosphorsäure. Ameisensäure erzeugt keine gut contourirten Ätzfiguren, sondern rundliche oder unregelmässige Figuren, welche mit den Rändern zusammenfliessen. Essigsäure gab manchmal deutliche dreieckige Ätzfiguren, welche aber trotz anscheinend nicht sehr rascher Entwicklung der instantanen, positiven Form entsprechen. Die Ätzfiguren der Basis sind immer sehr klein. Die Thatsache, dass man im Allgemeinen viel leichter die positiven Dreiecke der instantanen Ätzfigur erhält, als die negativen Dreiecke der retardirten, machte mich lange bezüglich der Lösungsflächen des

Kalkspathes irre, und es schien mir gerade desshalb die Annahme Haushofer's, dass den Ätzfiguren des Calcites positive Rhomboëder und Skalenoëder zu Grunde liegen, schwer widerlegbar zu sein.

Erst als es mir gelang auch negative Dreiecke herzustellen, glaubte ich — unter Berücksichtigung der Beziehungen der Ätzfiguren zu der chemischen Härtecurve — diese Zweifel fallen lassen zu dürfen. Die Häufigkeit von rundlichen oder fast genau kreisförmigen Ätzfiguren auf der Basis ist — wie ich glaube — ein sehr anschaulicher Beleg für die Abhängigkeit des Umrisses der Ätzfigur von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lösung nach verschiedenen Richtungen, welche sich eben mehr und mehr ausgleichen muss, ehe der Übergang von den instantanen zu den retardirten Ätzfiguren erfolgt. Ätzfiguren mit fast kreisförmigen Umrissen hat bereits Haushofer von der Basis des Calcites abgebildet.

Was den Boden der Ätzfiguren anbelangt, so sind auch hier wieder solche zu unterscheiden, deren Boden flach ist, und solche, deren vertiefte Kanten gegen einen tiefsten Punkt in der Mitte der Figur laufen. Die Sechsecke entsprechen in der Regel — der Lage nach — Skalenoëderecken; es kommen aber auch Sechsecke vor, welche der Combination eines positiven und eines negativen Rhomboëders entsprechen (Fig. 63). Dasselbe lässt sich bereits aus den Abbildungen Haushofer's entnehmen.

Wie Haushofer erhielt auch ich häufig auf der Basis asymmetrische Ätzfiguren, welche wohl unbedenklich als Folge ungenauen Schliffes zu betrachten sind.

Bezüglich der mannigfaltigen Rhomboëder des Kalkspathes musste sich das theoretische Interesse bei der Untersuchung der Ätzfiguren grössten Theils darauf beschränken, ob es gelingt, retardirte Ätzfiguren zu erzeugen, deren Umrisse dem Abdrucke des primären Lösungs-Rhomboëders ähnlich sind. Die Verwerthung von instantanen Ätzfiguren, deren Form voraussichtlich von der chemischen Härtecurve abhängt, ist vorläufig nicht möglich. Denn abgesehen von dem Spaltungs-Rhomboëder und dem Lösungs-Rhomboëder selbst, kann man sich von keiner einzigen Rhomboederfläche auch nur annähernd eine Vorstellung von der chemischen Härtecurve machen. Es handelt sich

immer um drei Lösungsflächen, welche in verschiedenen Richtungen einschneiden, und zwar zwei gleich geneigt und symmetrisch zur Klinodiagonale, die dritte mit anderer Neigung und parallel der horizontalen Diagonale. Abgesehen von einer künstlich angeschliffenen Fläche am Steinsalze, welche von Exner untersucht wurde und von der Prismenfläche des Kalkspathes, deren Härteverhältnisse Pfaff am genauesten ermittelte, sind hieher gehörige Fälle von mechanischen Härtecurven nicht bekannt. Diese geben aber keine hinreichenden Anhaltspunkte dafür, wie sich die Härtecurve etwa ändert, wenn man die Basis allmälig in die Stellung verschiedener Rhomboëderflächen bringt.

Auf dem Rhomboëder $-\frac{1}{2}R$ erhält man nur sehr schwer deutliche Ätzfiguren, wenn die Fläche — wie gewöhnlich — eine Streifung nach R zeigt. Es nützt in der Regel nichts, wenn man die Fläche polirt. Haushofer konnte auf $-\frac{1}{2}R$ keine deutlichen Ätzfiguren erhalten. Ich hatte schöne Krystalle von Přibram, welche eine kaum merkliche Streifung zeigten, an denen ich meistens vergeblich Ätzfiguren darzustellen versuchte. Dagegen gelang dies leichter an den ganz glatten Flächen einer Stufe von Bleiberg.[1] Mit Phosphorsäure (20% der conc. Säure) erhält man nach mässig langer Einwirkung Dreiecke, deren gegen die Seitenecke gewendete Winkel fast 90° beträgt, während die polwärts gewendete Seite des Dreieckes nur undeutlich sichtbar ist. Diese Dreiecke sind sehr ähnlich der projicirten Ecke des Lösungs-Rhomboëders. (Vergl. Fig. 71 *a* und Fig. 70.) Bei lange dauernder Ätzung wird der gegen die Seitenecke gewendete Winkel häufig abgestumpft oder es entsteht ein fast rechteckiger Ansatz an der Spitze, während die nach vorne gewendete Fläche sich polwärts niemals scharf abgrenzt, da sie offenbar sehr wenig geneigt ist (Fig. 71, *b* und *c*).

Mit Ameisensäure konnte ich nur unregelmässige Gruben, aber keine deutlichen Ätzfiguren erzielen. Mit Salzsäure (40%) entstehen lange schmale Deltoide, deren stumpfer Winkel polwärts gewendet ist (Fig. 72). Im Ganzen sind die Ätzfiguren schwer zu erhalten; sie fliessen leicht zusammen und bleiben meistens sehr klein.

---

[1] D. pag. 83 d. I. Abhandlung.

Das Rhomboëder $-2R$ ist als Lösungs-Rhomboëder von besonderem Interesse. Ätzfiguren sind auf demselben auffallend leicht darzustellen.[1] Die Ätzfiguren, welche man mit Essigsäure und Ameisensäure erhält, und welche oft sehr gross werden, zeigen einen rhombischen oder deltoidischen Umriss, und zwar im ersteren Falle so, dass derselbe der Fläche des Lösungs-Rhomboeders ähnlich ist. (Vergl. Fig. 74, 75 und 79 mit Fig. 73.) Die Winkel sind aber keineswegs constant und können beträchtlich stumpfer oder spitzer als 76°8′ werden. In der Regel sind diese (retardirten) Ätzfiguren vorn tiefer als hinten. Der Boden ist selten flach, sondern zeigt fast immer eine der langen Diagonale entsprechende Kante; seltener finden sich solche auch in der kurzen Diagonale.

Mit verdünnter Ameisensäure (30—50%) werden die Ätzfiguren meistens deltoidisch mit hinterem stumpferem und dabei tiefer eingreifendem Winkel (Fig. 76); es kommen aber auch Rhomben (Fig. 77) und umgekehrt liegende Deltoide, letztere nicht selten mit einer Abstumpfung der vorderen Ecke vor (Fig. 78).

Ähnliche Bilder erhält man auch mit concentrirter Phosphorsäure (Fig. 84), daneben aber auch noch — als etwas Neues — da und dort eine Abstumpfung des hinteren Deltoidwinkels. Seltener erhält man Dreiecke mit abgerundeten Seiten und vorderer Spitze.

Verdünnte Phosphorsäure (10—20%) gibt im Beginne der Wirkung meistens Rhomben, deren Winkel aber nicht mit den Winkeln der Fläche von $-2R$ übereinstimmen, sondern sich fast einem Quadrate nähern oder selbst Rhomben, welche stumpfe Winkel nach vorn und hinten kehren (Fig. 85 und 86). Bei längerer Einwirkung erhält man meistens Deltoide mit vorderem spitzen und hinterem stumpfen Winkel. Der Boden der Ätzfiguren mit Phosphorsäure zeigt gewöhnlich vier Kanten, bisweilen ausserdem eine Fläche, welche der geätzten Fläche parallel ist.

---

[1] Ich benützte zu den Versuchen Krystalle der Stufe C von Bleiberg, welche horizontal — parallel der Basis — gestreift waren. Ich muss es dahingestellt sein lassen, wie weit diese Streifung auf gewisse Formen von Ätzfiguren, wie sie in Fig. 78 und 84 abgebildet sind, von Einfluss war.

Concentrirte Salpetersäure gibt quer verlängerte Rhomben mit stark abgerundeten Winkeln, welche sich in ihrer Form häufig einer quer liegenden Ellipse nähern, doch so, dass polwärts noch die Andeutung einer Spitze bleibt. Gewöhnlich sind diese Ätzfiguren aus mehreren concentrischen Absätzen gebildet und in der Mitte findet sich eine kleine, besonders starke Eintiefung von deutlich deltoidischer Form (Fig. 80).

20% Salpetersäure gibt Dreiecke mit vorderer Spitze und hinterer, stark abgerundeter Seite und mit drei Kanten am Boden (Fig. 81). 10% Salpetersäure gibt Rhomben, ähnlich wie verdünnte Ameisensäure (Fig. 82).

40% Salzsäure (Fig. 83) gibt Dreiecke, ähnlich wie 20% Salpetersäure.

Starke Chromsäure gibt anfänglich Rhomben und Deltoide (Fig. 87), später eigenthümliche Deltoide mit vorderem spitzem, tief eingegrabenem Winkel (Fig. 88).

Was nun die Beziehungen der chemischen Härtecurve zu diesen Ätzfiguren anbelangt, so ist über die Lage der Maxima und Minima nur wenig zu ermitteln möglich. Es liegen von vergleichbaren Härteuntersuchungen nur Beobachtungen über die Härtecurve der Spaltungsfläche des Kalkspathes vor, von welchen ohne Zweifel diejenigen von Pfaff bei weitem die genauesten sind. Die Einzelheiten der Härtecurve lassen sich aber nicht ohne Weiteres verwerthen, da es sich in dem hier in Frage stehenden Falle um ein spitzes, beim Spaltungsrhomboëder aber um ein stumpfes Rhomboëder handelt. Aus den Untersuchungen von Pfaff geht hervor, dass — wie früher schon Franz, ferner Grailich und Pekárek angegeben hatten — auf der Spaltungsfläche das kleinste Minimum der Härte in die kurze Diagonale in die Richtung nach aufwärts, von der Seitenecke zum Pole fällt. Bei einem spitzen Rhomboëder müsste sich dies wohl umgekehrt verhalten, und es ist wahrscheinlich, dass das kleinste Minimum der chemischen Härtecurve des Lösungsrhomboëders $-2R$ in die Klinodiagonale nach abwärts, vom Pol zur Seitenecke fällt. Über weitere Eigenschaften der chemischen Härtecurve lässt sich wohl nichts Plausibles sagen.

Die ausgesprochen instantanen Ätzfiguren mit Salpeter- und Salzsäure (Fig. 81 und 83) etc. weisen auf die Anwesenheit des

kleinsten Minimums in der erschlossenen Richtung durch analoge Erscheinungen, wie wir sie auf der Spaltungsfläche gefunden haben. (Dreiecke und Deltoide mit vorderer Spitze und hinterer Abrundung.) Dass mit zunehmender Retardirung der Ätzfigur auch hier — analog, wie auf der Spaltungsfläche — gerade in die Richtung des kleinsten Minimums die stärkste Verlängerung der Figur fallen kann, ergeben die Figuren mit verdünnter Salpetersäure (Fig. 82) und mit concentrirter Ameisensäure (Fig. 74 *a*). Dass die ausgesprochen retardirten Ätzfiguren den Umriss der Fläche des Lösungsrhomboeders manchmal fast genau, fast immer aber annähernd wiedergeben, ist jedenfalls eine sehr auffällige und wichtige Thatsache. Die Thatsache, dass niemals — auch an denjenigen Ätzfiguren, welche den Umriss der Lösungsgestalt wiedergeben — hinten überhängende Flächen sich ausbilden, bedarf nach den bereits bei den Ätzfiguren der Spaltungsfläche gemachten Bemerkungen wohl keiner besonderen Besprechung.

Die Ätzfiguren auf den Flächen des ersten Prismas sind sehr eigenthümlich und besonders geeignet, den Unterschied zwischen instantanen und retardirten Ätzfiguren zu illustriren. Leider lässt sich a priori über die muthmassliche chemische Härtecurve nichts Begründetes aussagen.

Ätzt man kurze Zeit mit wenig verdünnter Salz- und Salpetersäure, so erhält man dreieckige Gruben, deren Spitzen gegen die Combinationskanten von *R*, nach vorn gerichtet sind. Das Dreieck zeigt anfänglich einen sehr spitzen Winkel nach vorn, der sich aber bald erweitert, während die nach hinten gerichtete Fläche sehr wenig scharf abgegrenzt ist (Fig. 92 *a*). Ätzt man mehrere Secunden, so sieht man die Spitze des Dreieckes sich vertiefen und nun innerhalb derselben ein neues, stark eingetieftes Dreieck auftreten, das seine Basis nach vorn, seine Spitze aber nach hinten kehrt (Fig. 92 *b*). Man kann sich mit Leichtigkeit davon überzeugen, dass dieses letztere Dreieck stets nach dem ersten, ziemlich langsam entsteht, während das erste Dreieck schon bei momentaner Ätzung auftritt. Das erste Dreieck ist also der Entwicklung nach eine instantane, das zweite nach demselben Kriterium und vermöge seiner annähernden Ähnlichkeit des Umrisses mit der projicirten Hohlecke der Lösungs-

gestalt (vergl. Fig 89), eine retardirte Ätzfigur. Haushofer scheint nur die stark vertiefte, retardirte Ätzfigur bemerkt zu haben, welche stets viel mehr in die Augen springt, als die weit seichtere und bei längerem Ätzen häufig wieder ganz verschwindende instantane Form. In der Abbildung Haushofer's ist nur die der Symmetrielinie entsprechende vertiefte Kante der instantanen Figur zu sehen. (Etwa so wie hier in Fig. 96.)

Was nun die Ausbildung der retardirten Ätzfigur anbelangt, so entspricht ihr Umriss in der Regel nicht genau dem Umriss der eingedrückten Ecke des Lösungsrhomboëders, was wohl zum Theil davon abhängt, dass diese Figur nicht direct auf der ganz intacten Fläche, sondern stets secundär an der Spitze einer bereits vorhandenen instantanen Figur sich ausbildet.

Manchmal ist die unpaare Dreiecksfläche durch eine Kante halbirt.

Wie auf anderen Flächen, so erhält man auch auf der Protoprismafläche mit verschiedenen Säuren und Säureconcentrationen Variationen der Ätzfiguren.

Mit concentrirter Ameisensäure erhält man zuerst ein langgezogenes, flaches Dreieck mit hinterer Spitze (Fig. 90 *a*), welches jedoch bei weiterem Ätzen undeutlich wird, während sich in demselben vorne eine retardirte, stark vertiefte Ätzfigur ausbildet, welche oft sehr genau nicht nur im Umrisse, sondern auch in der Richtung der vertieften Kanten mit dem Lösungsrohmboëder übereinstimmt (Fig. 90 *b*). Bei lange fortgesetztem Ätzen stellen sich aber oft noch weitere Veränderungen der retardirten Figur ein, wodurch dieselbe wieder der Lösungsgestalt unähnlich wird (Fig. 90 *c*).

Mit Essigsäure konnte ich keine retardirten, sondern nur instantane Dreiecke erhalten, mit nach vorn gerichteter Spitze (Fig. 91). Mit concentrirter Phosphorsäure vermisst man in der Regel bald die Spuren der instantanen Figuren und die retardirten Formen nehmen Trapezform an mit stark gebogenen seitlichen und hinteren Umrisslinien (Fig. 95).

Mit verdünnter (20 %) Phosphorsäure werden jedoch die Figuren jenen, wie man sie mit anderen Säuren erhält, mehr ähnlich (Fig. 96).

Auch mit stärkerer Salpeter- und Salzsäure erhält man mitunter stark veränderte secundäre Ätzfiguren (Fig. 94 mit 40% Salzsäure).

Mit concentrirter Chromsäure erhält die instantane Figur häufig einen fast elliptischen Umriss, dessen längere Axe der Prismenkante parallel ist; doch sind fast immer drei Kanten in der vertieften Figur, wie man sie mit anderen Säuren erhält (Fig. 97). Die retardirte Figur zeigt nichts besonders Auffälliges.

Es muss noch erwähnt werden, dass man mit Salz- und Salpetersäure, ausser den Ätzfiguren sehr häufig zahlreiche, horizontale, der Basis parallele, kurze Striche und Kanten auftreten sieht; mit Essigsäure aber meistens eine sehr verworrene Zeichnung. Ich bin geneigt, diese Erscheinungen auf das Auftreten von sehr kleinen secundären Lösungsgestalten zu beziehen, ähnlich wie sie früher als Folge der Ameisensäureätzung beschrieben wurden; doch ist dies nicht sicher, da ich deutliche primäre Lösungsgestalten mit diesen Säuren nicht gesehen habe.

Der auffallende Umstand, dass auf der Protoprismafläche sehr leicht mit den verschiedensten Säuren instantane und retardirte Ätzfiguren auftreten, hängt vielleicht mit der von Lavizzari[1] entdeckten Thatsache zusammen, dass dieselbe besonders leicht löslich ist. Die Prismenfläche entwickelt nach Lavizzari unter gleichen Umständen mit concentrirter Salpetersäure sieben mal mehr Kohlensäure als die Basis. Die mechanische Härte verhält sich umgekehrt, wie die Löslichkeit. Die Basis ist bedeutend weniger hart, als die Prismenfläche, wie die nach ganz verschiedenen Methoden ausgeführten Untersuchungen von Lavizzari, Grailich und Pekárek und Pfaff übereinstimmend ergeben. Der Zusammenhang der mittleren Härte verschiedener Krystallflächen mit der Spaltbarkeit ist noch ganz unklar; ebenso wenig ist die Abhängigkeit der mittleren chemischen Härte oder Löslichkeit einer Krystallfläche von den Lösungsflächen aufgedeckt; doch darf man wohl vermuthen, dass die Löslichkeit — wie später noch ausgeführt werden soll — nicht bloss von Richtung und Neigung der einschneidenden Lösungsflächen, sondern auch

[1] Nouveaux phénomènes des corps cristallisés. Lugano 1865.

von den Richtungen abhänge, welche innerhalb der einzelnen Lösungsflächen für die Bewegungen der Säuremolekule vorzugsweise in Betracht kommen.

Von grossem Interesse für die Theorie der Ätzfiguren ist die Deuteroprismenfläche, da man sich auf Grund der analogen Fälle von mechanischen Härtecurven, welche von Exner untersucht sind, eine begründete Vorstellung von der Lage der Minima der chemischen Härtecurve machen kann. Es handelt sich nämlich um zwei mit parallelen Combinationskanten einschneidende, symmetrisch geneigte Lösungsflächen und eine dritte senkrecht einschneidende, welche die Combinatonskante der beiden anderen unter einem Winkel von circa 72° kreuzt. Dieser Fall lässt sich nach Exner auf den einfacheren reduciren, in welchem zwei unter dem Winkel von circa 72° sich kreuzende Flächen senkrecht einschneiden. Es sind alsdann vier Minima in den Spaltungsrichtungen, von welchen je zwei und zwei, in eine Linie in entgegengesetzter Richtung fallende einander gleich; die in verschiedene Linien fallenden aber ungleich sind. Die Härtecurve hat überhaupt die Eigenschaft, dass kein Unterschied der Härte im positiven und negativen Sinne einer und derselben Linie vorhanden ist, was schon vermöge der hemirhombischen Symmetrie der Deuteroprismenfläche der Fall sein muss.[1]

Über die Maxima lässt sich mit Wahrscheinlichkeit aussagen, dass deren vier vorhanden sein werden, welche in die Winkel zwischen die Minima fallen, dieselben jedoch nicht halbiren. Die Lage der Maxima hängt voraussichtlich von dem Verhältnisse der Minima ab und wird sich ändern, falls dieses Verhältniss, je nach Natur und Concentration der Säure, ein anderes wird. Es ist daher auch zu erwarten, dass unter dem Einflusse solcher Änderungen der Lage der Maxima die Contouren instantaner Ätzfiguren sich gewissermassen drehen können.

---

[1] Grailich und Pekárek (l. c.) geben die mechanische Härte der Deuteroprismenfläche des Kalkspathes in der Richtung der Combinationskante des Spaltungsrhomboëders verschieden an, je nachdem die Bewegung von der stumpfen zur spitzen Ecke geschieht oder umgekehrt. Die einzelnen Beobachtungen zeigen aber so grosse Schwankungen, dass dieses den Symmetriegesetzen widersprechende Resultat nur auf unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zu beruhen scheint.

Während natürliche, glatte Protoprismenflächen ziemlich leicht zu beschaffen sind, ist dies bei den Deuteroprismenflächen leider nicht der Fall. Wenigstens waren diejenigen, welche mir zu Gebote standen, im günstigsten Falle nur auf ganz kurze Strecken fehlerfrei; in der Regel aber mehr weniger nach *R* gestreift und ausserdem mit unregelmässigen Gruben bedekt. Dass mit künstlichen Flächen nicht viel zu machen ist, wurde bereits in der ersten Abhandlung erwähnt. Die Ätzfiguren treten auf der Deuteroprismenfläche meist sehr leicht auf. Ausgesprochen retardirte Formen treten, analog, wie beim Protoprisma immer innerhalb instantaner Figuren, also auf bereits veränderter Fläche auf und darin liegt wohl zum Theil der Grund, dass man fast niemals Ätzfiguren findet, welche genau den Umriss der projicirten Lösungsgestalt wiedergeben. Die Ätzfiguren bleiben meistens sehr klein und treten bei längerer Ätzung fast immer so dicht gedrängt auf, dass ihre Formen schwer erkannt werden können. Unter solchen Umständen waren die vielen Unebenheiten der natürlichen Flächen doppelt störend und die erhaltenen Resultate nur wenig befriedigend. Es gelang nur selten vollkommen hemirhombisch symmetrische Figuren zu erhalten.

Die Ätzfiguren haben im Allgemeinem einen rhomboidischen Umriss und sind meistens im Sinne der Mittelkanten eines negativen Rhomboëders, mit ihrem längeren Durchmessers geneigt. In der Regel entsprechen zwei Seiten ziemlich genau der Richtung der Mittelkanten des Lösungsrohmboëders (vergl. Fig. 98 und Fig. 99 — 111); die beiden anderen Seiten sind aber selten der Richtung der vertical einschneidenden Fläche entsprechend.

Mit concentrirter Ameisensäure erhält man auf der Deuteroprismenfläche zwei Typen von Ätzfiguren. Beide stellen im Umrisse im allgemeinem Rhomboide dar, deren längere Seiten den Mittelkanten des Lösungsrhomboëders annähernd oder genau parallel sind. Bei dem einen Typus ist aber die vordere und hintere Seite fast horizontal gerichtet (Fig. 99, 101), bei dem anderen dagegen mehr der Richtung der senkrecht einschneidenden Lösungsfläche oder selbst der verticalen Richtung der Prismenkante sich nähernd (Fig. 100, 102). Als eine Mittelform, welche gewissermassen beide Typen vereint, treten Sechs-

ecke auf (Fig. 101 *a*). Die meisten Ätzfiguren haben eine oder zwei Kanten am Boden, welche der Mittelkante von — 2 *R* nahezu parallel sind, manchmal auch Kanten, deren Richtungen annähernd den Diagonalen der projicirten Rhombenflächen des Lösungsrhomboëders, wie sie in Fig. 98 punktirt angedeutet sind, entsprechen (Fig. 100). Es treten aber auch noch andere, oft unregelmässig verlaufende Kanten auf.

Die mit concentrirter Ameisensäure entstehenden Ätzfiguren können weder als exquisit retardirte noch als instantane bezeichnet werden. Nach 5 bis 8 Sekunden sieht man noch kaum Andeutungen von Ätzfiguren, nach 15 bis 20 Sekunden haben sie aber meistens schon ihre definitive, leider sehr geringe Grösse und man erhält auch nach minutenlanger Wirkung keine grösseren Figuren. Die Figuren des ersten Typus sind meistens weniger tief, als die des zweiten. Die beiden Typen von Ätzfiguren treten fast immer nebeneinander auf und es ist mir nicht klar geworden, womit die Verschiedenheit der Form zusammenhängt. Vielleicht ist die ursprüngliche Beschaffenheit der Fläche von Einfluss. Im Allgemeinen scheint der erste Typus — mit fast horizontaler vorderer Linie — etwas rascher aufzutreten als der zweite Typus. Neben den Ätzfiguren erhält man mit concentrirter Ameisensäure bei längerer Wirkung fast immer eine deutliche Steifung, welche der Mittelkante — 2 *R* entspricht und zum Theile sicher von sehr kleinen Lösungsgestalten herrührt.

Mit verdünnter Ameisensäure (50%) erhielt ich auf einer künstlich an ein Spaltungsrhomboëder angeschliffenen Fläche Figuren, deren Umriss zum Theil sehr dem Umrisse des Lösungsrhomboëders sich näherten (Fig. 103. *a*).

Sehr eigenthümlich sind die Ätzfiguren, welche man mit Essigsäure ziemlich rasch erhält, deren Form jedoch meistens nicht gut erkannt werden kann, weil sie dicht gedrängt auftreten. Es sind Rhomboide mit abgerundeten Seiten mit einer Kante am Boden, welche eine Neigung von circa 63° im Sinne der Mittelkanten eines negativen Rhomboëders zur Prismenkante zeigen (Fig. 104). Mit Salpetersäure erhält man Formen, welche jenen, die man mit Ameisensäure erhält, ähnlich sind (Fig. 105, 106 *a*) manchmal aber mit sehr concentrirter Säure auch stark

gekrümmte und aufrecht gestellte Figuren, die zum Theil an den Umriss einer Pleurosigmaschale erinnern (Fig. 106 *b*).

Salzsäure und Chromsäure geben ebenfalls Figuren, welche im Umrisse die Richtungen der Mittelkanten des Lösungsrhomboëders erkennen lassen (Fig. 107, Salzsäure; 111, Chromsäure). Phosphorsäure erzeugt manchmal Figuren, welche den mit Ameisensäure dargestellten sehr ähnlich sehen (Fig. 108, 110). Auch an diesen Figuren sind bisweilen vertiefte Kanten zu sehen, welche den Diagonalen der Flächen des Lösungsrhomboëders ziemlich genau entsprechen (109 *a*, *b* etc.). Sehr auffällig ist mit Phosphorsäure das secundäre Auftreten stark vertiefter, retardirter Ätzfiguren innerhalb der primär, ziemlich rasch sich bildenden Formen. Diese secundären retardirten Figuren haben oft sehr complicirte Formen, an welchen eine Beziehung zu den Lösungsflächen meistens nicht herauszufinden ist (Fig. 109, *c*, *d*, *e*). Es ist dabei nicht zu vergessen, dass diese Figuren ähnlich, wie diejenigen des Protoprismas innerhalb bereits stark veränderter Flächen sich entwickeln. Secundäre retardirte Figuren kommen gelegentlich auch mit Salzsäure, Salpetersäure und Chromsäure zur Beobachtung.

Ich wage es nicht, bestimmte Schlüsse über den Zusammenhang zwischen der muthmasslichen chemischen Härtecurve und der Form der Ätzfiguren der Deuteroprismenfläche zu ziehen, da die Figuren meist klein und schlecht ausgebildet sind und ein so bestimmter Gegensatz von instantanen und retardirten Figuren wie auf der Spaltungsfläche nicht nachweisbar ist. Doch möchte ich Folgendes hervorheben. Die Figuren mit Ameisensäure, welche offenbar mehr nach dem retardirten Typus hinneigen, sind meistens in der Richtung der Mittelkanten des Lösungsrhomboëders verlängert. Da auf der Spaltungsfläche und der Basis mit zunehmender Retardirung der Entwicklung eine Verlängerung der Figuren in der Richtung des, theoretisch erschlossenen, kleinsten chemischen Härteminimums auftritt, so ist es nach dieser Analogie wahrscheinlich, dass die kleinsten chemischen Härteminima der Deuteroprismenfläche in der Mittelkante des Lösungsrhomboëders liegen. Umgekehrt spricht die Thatsache, dass gerade in dieser Richtung die mit starker Salpeter-, Salz-, Chromsäure erzeugten Figuren sich mitunter deutlich verkürzen (Fig. 106 *b* etc.)

ebenfalls für die Lage der kleinsten Minima in dieser Richtung, da wir ja auch auf der Spaltungsfläche Verkürzungen der Ätzfiguren in der Richtung des theoretisch kleinsten Minimums bei Anwendung dieser Säuren constatiren konnten. Doch kommen auch mit Ameisensäure ab und zu Ätzfiguren zur Beobachtung, welche gerade in der Richtung der Mittelkante des Lösungsrhomboëders verkürzt erscheinen (Fig. 102).

Ich schliesse hier noch einige Bemerkungen über Ätzfiguren höherer Rhomboëder und des Skalenoëders $R3$ an, über welche ich nur gelegentliche Beobachtungen machte. Von höheren negativen Rhomboëdern untersuchte ich $-\frac{1}{2}R$ (Stufe *M*) und $-4R$. Auf beiden erhielt ich leicht Atzfiguren, welche zum Theil ziemlich genau — was Umriss und Kanten anbelangt — der eingedrückten Ecke des Lösungsrhomboëders entsprachen.

Fig. 112 *a* stellt die Projection der Ecke des Lösungsrhomboëders auf die Fläche $-4R$ dar, Fig 112 *b* Ätzfiguren, welche mit Ameisensäure nach längerer Einwirkung auf einer Fläche $-4R$ (Stufe *D*) erhalten wurden. Man sieht, dass diese retardirten Ätzfiguren — abgesehen von der Theilung der hinteren Fläche durch eine seichte Kante, — der darüber stehenden Figur ziemlich ähnlich sind. Dasselbe ist der Fall mit den Figuren 114 *b*, welche ebenfalls mit concentrirter Ameisensäure erhalten wurden. Bisweilen wurden die Figuren mit Ameisensäure aber deltoidisch (Fig 113, 114, *a*). Mit 20% Phosphorsäure erhielt ich spitze, seichte Dreiecke, innerhalb welcher aber zum Theil stumpfere, stark vertiefte, die dem Umrisse der Lösungsgestalt sich mehr näherten, secundär sich ausbildeten (Fig. 115). Analoge Erfahrungen machte ich mit dem Rhomboëder $-\frac{1}{2}R$ (Stufe *M*). Im Gegensatze zu den höheren negativen Rhomboëdern erhielt ich auf den positiven Rhomboëdern nur sehr schwer Ätzfiguren. Auf $+\frac{1}{2}R$ und $+4R$, welche mir übrigens nur in kleinen überdies nicht ganz glatten Combinationsflächen zu Gebote standen (Stufe *L*, *O*) erhielt ich mit Ameisensäure keine Ätzfiguren, sondern nur Lösungsgestalten. Mit stärkeren Mineralsäuren (Salz- und Salpetersäure) erhielt ich wohl dreieckige oder deltoidische Ätzfiguren, welche aber die Spitze stets polwärts kehrten, also invers zum Umriss des Lösungsrhomboëders lagen. Erst auf dem

hohen Rhomboëder $13R$ (Stufe *M*) erhielt ich directe Dreiecke innerhalb instantan auftretender Figuren, welche sich vor den Ätzfiguren des Protoprismas dadurch unterschieden, dass sowohl das seichte, als das tiefe Dreieck die Spitze nach derselben Seite kehrten.

Auf dem Skalenoëder $R3$ entstehen nur sehr schwer Ätzfiguren, welche ausserdem meistens sehr klein blieben. Mit concentrirter Ameisensäure gelang es nicht, auf den Flächen der Stufe *L* Dreiecke vom Umriss der Lösungsgestalt zu erhalten. Es entstanden vielmehr bogig begrenzte Figuren (Fig 118 *b*), welche mit der projicirten Ecke von $-2R$ (Fig. 118, *a*) keine Ähnlichkeit hatten. Dagegen gelang es mit verdünnter Salpetersäure auf den Skalenoëderflächen der Stufe *N* kleine Ätzfiguren zu erzeugen, deren Umriss der Ecke des Lösungsrhomboëders ziemlich gut entsprach. (Fig. 117 *a*, Ecke des Lösungsrhomboëders; *b* Ätzfiguren).

Die Hauptresultate der in diesem Capitel niedergelegten Untersuchungen kann man wohl in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Stark retardirte Ätzfiguren nähern sich in ihrem Umrisse stets dem Umrisse der projicirten, vertieften Lösungsgestalt; doch fehlt häufig die völlige geometrische Ähnlichkeit. Dies hängt wahrscheinlich davon ab, dass retardirte Ätzfiguren in den späteren Stadium ihrer Entwicklung stets in den Richtungen der kleinsten chemischen Härteminima (grössten Löslichkeit) sich vorwiegend verlängern.

Bei instantanen Ätzfiguren erfolgt umgekehrt eine relative Verkürzung des Umrisses in den Richtungen der wahrscheinlichen kleinsten Minima.

XI. Capitel.

III. Die Lösungsflächen des Aragonites.

Die Untersuchungen über die Lösungsflächen des Aragonites, über welche in diesem Capitel berichtet werden soll, haben zu keinem ganz befriedigenden Resultate geführt. Der Grund liegt zum guten Theile in den Schwierigkeiten des Gegenstandes, zum Theile aber auch in dem Mangel an geeignetem Untersuchungsmaterial und in dem verhältnissmässig geringen Aufwande an

Zeit, welchen ich dem Studium des Aragonites widmen konnte, wenn ich den Abschluss dieser Arbeit nicht ins Unbestimmte hinausschieben wollte. Das Material, welches mir zur Untersuchung diente, bestand aus grösseren Krystallen von Horschenz, ferner aus Stufen von Herrengrund und vom Banat.

Alle Krystalle erschwerten durch ihre meist verwickelten Zwillingsbildungen die Untersuchung bedeutend; insbesondere waren die natürlichen Flächen des Brachydomas $\breve{P}\infty$, welche anscheinend glatt an den spiessigen Krystallen des Banates vorlagen, wegen ungemein zahlreicher Zwillingslamellen zur Untersuchung meistens wenig geeignet, was, wie später ersichtlich werden wird, sehr unerwünscht war.

Abweichend von dem Gange, welchen ich beim Kalkspathe einschlug, scheint es mir beim Aragonite für die Darstellung der Resultate zweckmässig, von den Ätzfiguren auszugehen. Die Untersuchungen am Kalkspathe haben ergeben, dass sehr langsam entstehende (retardirte Ätzfiguren) im Allgemeinen in ihrem Umrisse einige Ähnlichkeit haben mit dem Umrisse der einschneidenden Lösungsgestalt. Doch zeigte sich, dass eine völlige geometrische Ähnlichkeit des Umrisses mit dem Umrisse der projicirten Lösungsgestalt auch bei retardirten Ätzfiguren nur im Beginne der Entwicklung vorhanden ist, dass aber bei länger dauernder Entwicklung schliesslich eine solche Ähnlichkeit des Umrisses namentlich dann nicht besteht, wenn sich retardirte Figuren secundär innerhalb anderer primär auftretender Figuren entwickeln (z. B. Proto- und Deuteroprisma des Kalkspathes). Aber auch bei primär auftretenden retardirten Figuren stimmen häufig die Winkel keineswegs genau (z. B. $-2R$ des Kalkspathes) und es kann daher nur ein sehr vorsichtiger, gleichsam nur orientirender Schluss aus den Ätzfiguren auf die Lösungsflächen gemacht werden.

Zu den Ätzungen des Aragonites wurde vorzüglich Ameisensäure verwendet. Der Aragonit wird von Säuren bedeutend weniger rasch angegriffen als der Kalkspath.

Bringt man einen Tropfen concentrirter Ameisensäure auf die Fläche des Brachypinakoides $\infty\breve{P}\infty$, so muss man fast eine Minute warten, bis man deutlich wahrnehmbare, unregelmässige oder rechteckige kleine Flecken auftreten sieht. Erst nach Ver-

lauf mehrerer Minuten sieht man dann wohl ausgebildete Ätzfiguren von rechteckigem Umrisse, deren Seiten einerseits den Prismenkanten, andererseits der Combinationskante der Basis parallel sind (Fig. 122). Der Boden der Figur zeigt mannigfache Variationen; im einfachsten Falle laufen vier Kanten von den Ecken gegen die Mitte des Bodens, so dass die ganze Ätzfigur einem Briefcouvert ähnlich ist. Die Ätzfigur ist eine ausgesprochen retardirte; wir können daher mit Wahrscheinlichkeit annehmen, dass ihre Umrisslinien den Combinationskanten der Lösungsflächen entsprechen. Es ist dann vor Allem ausgeschlossen, dass etwa eine Pyramide Lösungsgestalt sei; es sind vielmehr vermöge dieser Umrissfigur nur Prismen und Brachydomenflächen oder Makropinakoid und Basis oder endlich alle diese Flächen mögliche Lösungsflächen. Nun wird man sich zunächst wohl den denkbar einfachsten Fall zur Prüfung vorlegen, nämlich nur so viele Lösungsflächen anzunehmen, als zur Erklärung der Figur nothwendig sind. Am einfachsten genügt der Figur die Annahme, dass ein verticales Prisma und ein Brachydoma Lösungsflächen seien. Die Neigung der gegen die Mitte der Figur abfallenden Flächen — die übrigens nicht bestimmt wurde — könnte aus früher auseinander gesetzten Gründen keinesfalls zur directen Bestimmung des Prismas und des Domas führen; ja die Beschaffenheit der Figur lässt sogar, wie ich glaube, an sich die Möglichkeit offen, dass Basis und Makropinakoid — also vertical einschneidende Flächen — Lösungsflächen seien. Die ausgesprochen retardirten Ätzfiguren des Brachypinakoides scheinen auch mit anderen Säuren sehr ähnlich auszufallen; Leydolt[1] erhielt mit verdünnter Essig- und Salzsäure Figuren, deren Umriss ebenfalls rechteckig ist. Es ist a priori wahrscheinlich, dass ein Complex von symmetrisch geneigten Lösungsflächen, deren Durchschnittslinien mit der geätzten Fläche eine rechtwinkelige Kreuzung ergeben, eine retardirte Ätzfigur mit einem den Lösungsflächen genau entsprechenden Umrisse hervorrufen werden. Dies gilt jedoch nur für extrem retardirte Figuren, bei welchen sich der Einfluss der kleinsten Minima der chemischen Härtecurve nicht bemerkbar macht.

---

[1] Diese Ber. Bd. XIX. Jahrg. 1856, p. 10.

Wenden wir uns nun zu den Ätzfiguren anderer Flächen, so finden wir auf der Basis $0P$ nach längerer Ätzung mit concentrirter Ameisensäure in der Richtung der Brachydiagonale stark verlängerte Sechsecke (Fig. 123 *a* und *b*). Diese Ätzfiguren schliessen zunächst mit Bestimmtheit aus, dass Basis und Makropinakoid allein Lösungsflächen seien, denn in diesem Falle müsste wohl die Ätzfigur der Basis eine langgezogene Spalte in der Richtung der Makrodiagonale (*bb'*, Fig. 120) darstellen. Wären aber die Basis und beide Pinakoide Lösungsflächen, so müsste man eine ganz analoge Ätzfigur, wie auf dem Brachypinakoid erwarten. Dagegen lässt sich die in den Winkeln variirende Form der Ätzfigur aus der Annahme erklären, dass Prisma und Brachydoma Lösungsflächen seien. Wäre ein Prisma allein Lösungsfläche, so müsste die Ätzfigur einen rhombischen Umriss haben (Fig. 123, *A*). Kommt aber noch ein Brachydoma hinzu, so würden dessen Flächen in der Linie *aa'* (Fig. 123, *A*) einschneiden. Dadurch muss in diese Richtung die grösste Löslichkeit, respective das Minimum der chemischen Härte fallen.

Es macht nun keine Schwierigkeit, sich vorzustellen, dass die Ätzfigur, in Folge des Vorhandenseins zweier gleicher, exquisiter chemischer Härteminima im positiven und negativen Sinne der Brachydiagonale in dieser Richtung verlängert wird. Aus demselben Grunde darf man aber auch auf die Winkel der Ätzfigur kein Gewicht legen, und es ist nicht ausgeschlossen, dass das Lösungsprisma, obwohl die Winkel in den Richtungen der Brachydiagonale meist sehr spitze sind (circa 60°), trotzdem gerade in dieser Richtung stumpfe Winkel hat.

Ist nun der Schluss, dass ein Prisma und ein Brachydoma Lösungsflächen sind, richtig, so muss auf den Makropinakoid eine ganz analoge Ätzfigur auftreten, wie auf der Basis. Leider musste ich diese Fläche künstlich an Krystalle anschleifen und erhielt nicht ganz tadellose Ätzfiguren. Doch ergibt sich, dass in der That die theoretisch erwartete Ätzfigur auch auf dem Makropinakoid (Fig. 124) sich findet. Die Figur ist jedoch etwas weniger lang gezogen als diejenigen der Basis und man darf daraus wohl den Schluss ziehen, dass die dem Prisma entsprechenden Lösungsflächen (124 *A*, *cc'*) etwas weniger wirksam sind, als diejenigen des Brachydomas. Mitunter erhält man bei

längerer Ätzung langgezogene spitzrhombische Ätzfiguren, wie eine solche am Boden der Figur 124 (rechts) abgebildet ist. Doch sind diese Figuren, da sie auf bereits veränderter Fläche auftreten, nie ganz regelmässig. Ebenso wenig als aus den Winkeln der Ätzfigur der Basis ein Schluss auf die Indices des Lösungsprismas, ebenso wenig kann man aus den Winkeln der Ätzfigur (65—76°) des Makropinakoides einen Schluss auf die Indices des Lösungsdomas ziehen.

Eher gestattet erscheint ein solcher Schluss aus den Ätzfiguren der Prismenflächen ∞P und $\breve{P}\infty$. Sind ein Prisma und ein Brachydoma Lösungsflächen, so muss man im Allgemeinen Ätzfiguren von trapezförmigem, zugleich der monoklinischen Symmetrie entsprechenden Umrisse erwarten. In dem Falle jedoch, dass die geätzte Prismenfläche dieselben Indices hat, wie das Lösungsprisma und — analog — wenn die geätzte Domenfläche dieselben Indices hat, wie die geätzte Domenfläche, sind Ätzfiguren vom Umrisse eines gleichschenkeligen Dreieckes zu erwarten.

Ätzt man nun einen kleinen Krystall unter dem Mikroskop, so sieht man auf der Prismenfläche ∞P nach Verlauf ungefähr einer halben Minute ganz kleine, fast gleichseitige Dreiecke auftreten, deren Spitze gegen die stumpfe Prismenkante gewendet ist (Fig. 125 *a*). Beim Beginne der Entwicklung erinnern diese Ätzfiguren etwas an die bekannten Ätzfiguren auf der Oktaëderfläche des Alauns, und manchmal überdeckt sich fast die ganze geätzte Fläche mit dicht stehenden Dreiecken. Erst secundär tieft sich dann der Boden der Figur mehr und mehr ein und es bildet sich innerhalb des sich vergrössernden Dreieckes allmälig ein secundäres Fünfeck mit sehr complicirten Flächen heraus (Fig. 125 *b*, *c*, *d*). Vergleicht man nun die primäre Form der retardirten Ätzfigur mit der Projection der aus $\infty P . \breve{P}\infty$ bestehenden Lösungsgestalt auf die Prismenfläche ∞P (Fig. 125 *A*), so wird man die grosse Ähnlichkeit des Umrisses nicht verkennen und es gewinnt dadurch in der That die Annahme grosse Wahrscheinlichkeit, dass die genannte Combination die Lösungsgestalt des Aragonites sei.

Die Ätzfiguren des Brachydomas $\breve{P}\infty$ habe ich leider wegen Mangel an geeignetem Material nicht in ihrer Entwicklung ver-

folgen und überhaupt nicht oft untersuchen können. Doch erhielt ich auf der natürlichen glatten Fläche ebenfalls Dreiecke, welche annähernd der Projection der vermutheten Lösungsgestalt entsprechen (vergl. 126 *A* und 126 *a*.)

So sehr nun im Ganzen die geschilderten Ätzfiguren des Prismas und des Brachydomas für die angenommene Lösungsgestalt $\infty P.\breve{P}\infty$ sprechen. so wäre es doch in hohem Grade wünschenswerth, eine Reihe von verschiedenen Prismen[1] und Brachydomen auf ihre Ätzfiguren zu prüfen, denn sollte sich herausstellen, dass auch auf anderen Prismen und Brachydomen. als jenen der Grundgestalt dreieckige Ätzfiguren entstehen, so würde natürlich die Bedeutung, welche denselben hier beigelegt wird, sehr an Werth verlieren, und es bedürfte überhaupt einer weit umfassenderen Prüfung der Ätzfiguren des Aragonites, als sie hier vorgelegt werden kann, um einen sicheren Schluss bezüglich der Lösungsflächen ziehen zu können.

Ich konnte nur wenige Beobachtungen an dem Brachydoma $2\,\breve{P}\infty$ machen, welches an einzelnen Individuen der Krystalle des Banates in brauchbarem Zustande vorkam. An diesem Doma erhielt ich in der That deutlich trapezförmige Figuren mit concentrirter Ameisensäure, während gleichzeitig auf dem Prisma Dreiecke entstanden.

Was nun die Lösungsgestalten betrifft, so ist es trotz mehrfacher Versuche nicht gelungen, die primäre Gestalt darzustellen, obwohl im Allgemeinen Lösungsgestalten mit Ameisensäure und Phosphorsäure nach länger dauernder Ätzung regelmässig an den Flächen der Basis und längs der stumpfen Prismenkante oder auf dem künstlich angeschliffenen Makropinakoid oder an Bruchflächen entstehen, während dies auf dem Brachypinakoid, dem Brachydoma und dem Prisma in der Regel nicht der Fall ist.

Ätzt man die Basis längere Zeit mit concentrirter Ameisensäure, so treten, zunächst dicht gedrängte zusammenfliessende Ätzfiguren auf. Dadurch entsteht eine brachydiagonale, grobe

---

[1] Die Zahl der natürlich vorkommenden Prismen des Aragonites scheint übrigens eine sehr geringe zu sein. Erst v. Zepharovich hat zu dem Grundprisma einige neue, diesem jedoch nahestehende, Prismen aufgefunden.

Streifung. Ausserdem entstehen aber an einzelnen Stellen Streifungen, welche spitze Winkel von 35—54° in der Richtung der Brachydiagonale bilden, und allmälig arbeiten sich etwas erhabene, nicht sehr regelmässige Ecken heraus (Fig. 127 α), welche zunächst dreiflächig sind, wobei eine Kante in die Brachydiagonale fällt. Dabei bleibt aber der Process nicht stehen. Längs der brachydiagonalen Kante entsteht allmälig eine domaartige, von glatten Flächen begrenzte, mehr weniger lang ausgezogene Gestalt (Fig. 127 vorne, 128, 129), welche im Allgemeinen eine Combination eines Brachydomas (Fig. 128 aa') einer Pyramide (bb') und eines Makrodomas (c) darstellt. Bisweilen ist statt der Makrodomenfläche eine, einer Makropyramide entsprechende Doppelfläche vorhanden (Fig. 129 rechts), bisweilen fehlen aber die Pyramidenflächen und die Gestalt ist dann eine Combination eines Brachy- und eines Makrodomas (Fig. 129 links). Die Lösungsgestalten erreichen oft bedeutende Grösse und zeigen meist sehr scharfe Kanten, welche genau in eine Spitze zusammenlaufen. Die Flächen sind im Allgemeinen glatt, nur die Makrodomenfläche ist häufig rauh, und zwar, wie es scheint, von dicht gedrängten, minimalen Lösungsgestalten, welche sich auf dieser Fläche bilden.

Die Lösungsgestalten entstehen, entsprechend der rhombischen Symmetrie der Basis, bald mit der Spitze nach der positiven, bald nach der negativen Richtung der Brachydiagonale; doch finden sich an einer und derselben Stelle alle Spitzen nach derselben Seite gerichtet. Was nun die Flächen betrifft, so überzeugt man sich, dass man ein Brachydoma vor sich hat, einmal dadurch, dass die Kante zwischen den Flächen $a\ a'$, Fig. 128 bei der Projection auf die Basis auch bei stärkeren Vergrösserungen in ihrer ganzen Ausdehnung scharf zu sehen ist, ferner durch Betrachtung der Lösungsgestalten in der Projection auf die Brachypinakoidfläche. Die Bestimmung des Winkels des Domas versuchte ich durch Zeichnung und durch Messung mit dem Goniometerocular, nachdem die Gestalten vertical gestellt, respective in die Projection auf die Makropinakoidfläche gebracht waren (Fig. 132). Es zeigte sich, dass der Winkel nur sehr selten annähernd 108·5° war, in der Regel aber weit stumpfer (120—135°). Genaue Messungen waren übrigens nicht möglich

Was die anderen Flächen anbelangt, so ergab die Makrodomenfläche einen Kantenwinkel entsprechend der Hauptaxe von 86·5 bis 102°, im Mittel etwa 94°. Daraus würde sich das an natürlichen Krystallen nicht beobachtete Doma[1] $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$ (ber. 94°33′) ergeben. Die Brachypyramidenflächen (*b*, *b*) zeigten ausserordentlich wechselnde Projectionswinkel, und namentlich war — analog wie bei den Lösungsgestalten der Spaltungsfläche des Kalkspathes — die rechte und linke Seite der Gestalt oft auffällig verschieden.

Um eine Vorstellung von der grossen Variabilität der projicirten Flächenwinkel der Lösungsgestalten auf der Basis zu geben, führe ich an, dass bei der Messung von 10 Gestalten der in Fig. 128 abgebildeten Form der Winkel der Flächen *a* und *a*′ zwischen 35° und 85·5° der Winkel der Flächen *b* und *b*′ zwischen 26° und 98°, der Winkel der Fläche *c* zwischen 90° und 124° schwankte. Ausserdem waren die paarigen Winkel oft beträchtlich verschieden und fast niemals genau gleich. Die Mittel aus sämmtlichen 10 gemessenen Ecken ergaben für *a* und *a*′ circa 57°, für *b* und *b*′ 69°, für *c* 108°. Dass man, angesichts so grosser Schwankungen nur durch eine sehr grosse Zahl von Messungen auf eine brauchbare Mittelzahl kommen würde, liegt auf der Hand.

Ätzt man die Makropinakoidfläche oder die stumpfe Prismenkante, so treten anfangs analoge Erscheinungen auf, wie auf der Basis. Erst arbeiten sich ziemlich spitze Dreiecke aus der Fläche, welche in dreikantige Ecken übergehen (Fig. 133 *a*), dann entsteht längs der in der Symmetrielinie liegenden Kante eine secundäre Lösungsgestalt, die jedoch jener der Basis nicht ganz analog ist. Sie zeigt nämlich eine Fläche (Fig. 133 *a*), welche dem Makropinakoid nahe steht, ferner zwei Flächen (*b b*′), welche einer, einem Prisma nahestehenden Pyramide angehören und endlich zwei Flächen *c c*′, welche einer ziemlich stumpfen Pyramide entsprechen. Eine der Domenkante der Basis homologe Prismenkante tritt aber nicht auf. Die Fläche *a* scheint ganz direct aus der unpaaren Fläche der zuerst auftretenden dreikantigen Ecke hervorzugehen. Auch für die Gestalten des Makro-

[1] Vergl. v. Zepharovich diese Ber. Bd. LXXI. Aprilheft 1875.

pinakoides gilt — wie für jene der Basis — dass die Spitzen bald nach der positiven, bald nach der negativen Seite gerichtet sind. Was die Winkel dieser Gestalten anbelangt, so sind sie wohl eben so variabel, wie diejenigen der Gestalten der Basis. Häufig gemessen wurde nur der Winkel *mon* (Fig. 133), weil derselbe dem Kantenwinkel des Brachydomas entsprechen muss. Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass dieser Winkel sehr häufig dem berechneten Winkel von $\breve{P}\infty$ (108°26′) sich nähert. Indessen hat dies nicht ganz überzeugende Kraft, da der Winkel aus dem Winkel α, der im Beginne 75—85° beträgt, successive hervorgeht, andererseits aber wieder in Winkel bis 130° übergeht.

Was nun die Deutung der geschilderten Lösungsgestalten betrifft, so ist wohl zunächst kein Zweifel, dass sie nicht primär sind. Eher könnte man daran denken, dass die vor dem Erscheinen der eigentlichen Lösungsgestalten auftretenden dreikantigen Ecken in naher Beziehung zu den Lösungsflächen sind. Doch zeigen diese so inconstante Winkel, dass man durch Messungen zunächst nicht viel gewinnen kann. Der allgemeinen Lage nach ist die obere Fläche solcher dreikantiger Ecken annähernd noch die geätzte Fläche; die abfallenden Flächen entsprechen aber auf der Basis im Allgemeinen einer Brachypyramide, auf dem Makropinakoid einer Pyramide mit langer Hauptaxe. Wenn nun die früher aus den Ätzfiguren erschlossene Lösungsgestalt existirt, so sollte man zunächst — bei oberflächlicher Betrachtung — erwarten, dass der Flächenwinkel (α, Fig. 127 und 133) dem Kantenwinkel des Prismas (116°10′), respective des Brachydomas (108°26′) entsprechen sollte, etwa so, wie bei den Lösungsgestalten des Kalkspathes die Projection des Lösungsrhomboëders sich fast immer kenntlich macht. Allein die Verhältnisse beim Aragonite liegen nicht so einfach. Während beim Kalkspathe für die meisten Krystallflächen die Lage der drei Lösungsflächen eine solche ist, dass denselben eine dreikantige Ecke der Lösungsgestalt entspricht, handelt es sich beim Aragonit auf der Basis und dem Makropinakoid um vier Lösungsflächen, von welchen je zwei und zwei ungleichwerthig sind, und von welchen das eine Paar eine auf der geätzten Fläche vertical stehende Kante, das andere eine horizontal liegende, dachartige Kante zu erzeugen sucht. Es ist nun im Allgemeinen begreiflich, dass

zunächst weder eine verticale, noch eine horizontale Kante, sondern eine schiefe Pyramidenkante auftritt, welche eine intermediäre Lage hat, und ebenso müssen die unpaaren Flächen und dreikantigen Ecken Winkel bilden, welche nicht dem Winkel der vertical einschneidenden Flächen entsprechen, sondern, vermöge der vorhandenen Tendenz nach der Bildung einer dachartigen Kante, zugespitzt erscheinen, und zwar um so mehr, je stärker die Substanz längs der Flächen löslich ist, welche zur dachartigen Kante zusammenzutreten streben. Da nun die Dreieckswinkel auf der Pinakoidfläche (α, Fig. 133) stets stumpfer sind, als die Dreieckswinkel (α, Fig. 127) auf der Basisfläche, so darf man wohl schliessen, dass die Brachydomenflächen einer höheren Löslichkeit des Aragonites entsprechen, als die Prismenflächen; ein Schluss, den wir bereits mit einiger Berechtigung aus den Ätzfiguren ziehen konnten. Für dieselbe Annahme spricht nun die weitere Entwicklung der Lösungsgestalten. Auf der Basisfläche arbeitet sich schliesslich in der That eine Brachydomenkante hervor (Fig. 127, 128), auf dem Makropinakoid dagegen spitzt sich zwar auch noch der Winkel a in Bezug auf α häufig etwas zu, und es nähern sich die Pyramidenflächen (b b, Fig. 133) der Lage der Prismenflächen; es kommt aber nie zur Bildung einer Prismenkante. Die Veränderungen, welche dann die vordere Spitze der Figur erleidet, lassen wohl die Annahme zu, dass sie vorzüglich durch secundäre Wirkungen der vertical einschneidenden Flächen hervorgebracht werden. Es scheint nicht nothwendig zu sein, dass etwa ein Makrodoma oder das Makropinakoid, wie ich einige Zeit dachte, auch noch als primäre Lösungsflächen angenommen werden.

Abgesehen von einigen Details, welche in der Ungleichwerthigkeit der beiderlei Lösungsflächen ihre Erklärung finden lässt sich die Analogie der Lösungsgestalten auf der Basis und dem Makropinakoid nicht verkennen und diese Analogie spricht umsomehr für die angenommene primäre Lösungsgestalt, wenn man die Ätzeffecte auf anderen Flächen mit concentrirter Ameisensäure verfolgt. Auf der Brachypinakoidfläche erhielt ich keine Lösungsgestalten, an der Prismenfläche nur Lösungsgestalten längs der stumpfen Kante — die also eigentlich dem Makropinakoid angehören. Auf der reinen Prismenfläche erhielt ich nur

massenhafte, tief sich eingrabende Ätzfiguren, aber niemals Lösungsgestalten. Dies ist insoferne von Interesse, als auf dem Kalkspath auf der reinen Fläche eines Krystalles $-2R$ ebenfalls keine Lösungsgestalten entstehen, sondern nur an den Bruchrändern. Wir werden noch später darauf zurückkommen, dass auf Lösungsflächen überhaupt leicht Ätzfiguren, aber schwer Lösungsgestalten entstehen. Über das Verhalten der Brachydomenfläche kann ich mich nicht so bestimmt, wie über die Prismenfläche aussprechen, da ich sie nicht so oft zu untersuchen Gelegenheit hatte. Doch konnte ich in den wenigen Fällen, in welchen ich reine Brachydomenflächen $\breve{P}\infty$ mit concentrirter Ameisensäure ätzte, nur Ätzfiguren, aber keine Lösungsgestalten erzeugen.

Wie beim Kalkspathe, so bringt auch beim Aragonite verdünnte (50%) Ameisensäure andere Lösungsgestalten hervor, als die concentrirte. Auf der Basis (Fig. 130) und auf dem Makropinakoid entstehen Gestalten, welche einander ähnlicher sind, als die mit concentrirter Säure dargestellten. Auf beiden Flächen erhält man zierliche, vorspringende Ecken, welche entweder drei oder fünf Flächen zeigen, von welchen die mittlere einem Makrodoma entspricht, das entweder der Basis (Fig. 130) oder dem Pinakoid nahe steht.

Betrachtet man solche Ecken in der reinen Aufsicht, indem man den geätzten Krystall durch Drehung um die Makrodiagonale (*bb'*, Fig. 120) so stellt, dass die Halbirungslinie des Winkels zwischen Hauptaxe und Brachydiagonale vertical steht, so erscheinen die Ecken, achtflächig (Fig. 131) und zwar bald so, dass auf der der Basis, bald auf der dem Makropinakoid entsprechenden Hälfte fünf Flächen zu sehen sind; auf der anderen jedoch drei. Die Ätzerfolge mit 50% Ameisensäure auf der Basis und dem Makropinakoid sind also im Ganzen sehr analog.

Diese achtflächigen Ecken stehen vielleicht in einer Beziehung zu der supponirten primären vierflächigen Ecke der Lösungsgestalt, wie die mit Ameisensäure erzeugten sechs- und neunflächigen Polecken der Spaltungsfläche des Kalkspathes zum primären Lösungsrhomboëder; doch muss ich mich mit Vermuthungen begnügen, da ich genauere Messungen nicht angestellt habe.

Es liegt nahe, sich vorzustellen, dass, analog wie beim Kalkspathe die vorzüglichsten secundären Lösungsflächen des Aragonites in Zonen liegen, welche durch die Kanten der primären Lösungsgestalt gegeben sind. Also einmal eine Reihe von Brachydomen, welche zwischen $\breve{P}\infty$ und $o\,P$ liegen, ferner eine Reihe von Prismen, welche zwischen ∞P und $\infty\breve{P}\infty$ liegen, endlich eine Reihe von Pyramiden, welche man erhält, wenn man sich eine Fläche ∞P um die Combinationskante $\infty P.\breve{P}\infty$ herumgedreht denkt, bis sie die Grenzlage $\breve{P}\infty$ erreicht. Der Anblick der Lösungsgestalten ist, so weit man dies ohne genaue Messungen beurtheilen kann, einer solchen Vorstellung im Allgemeinen nicht ungünstig; es kommen aber ganz zweifellos auch secundäre Lösungsflächen vor, welche keiner dieser Zonen angehören, nämlich Makrodomen, die allerdings in der Regel den Flächen $o\,P$ oder $\infty\bar{P}\infty$ nahe stehen, an den mit concentrirter Ameisensäure dargestellten Figuren aber einen Winkel von circa 47° mit der Verticalaxe (c) bilden.

Das vermuthete System der hauptsächlichen secundären Lösungsflächen des Aragonites umfasst drei Gruppen ungleichwerthiger Flächen und es ist daher schwierig, sich ein anschauliches Bild der möglichen Combinationen zu machen. Man kann sich aber die Vorstellung durch eine Analogie aus dem regulären System erleichtern. Denkt man sich nämlich die drei Kanten der Combination $\infty P.\breve{P}\infty$ (*ab*, *ac*, *ad*, Fig. 121) als gleichwerthig, so geht dieselbe in ein reguläres Oktaëder über, wie dieses auf eine Dodekaëderfläche gestellt, sich darstellt. Die Zone, welche man durch Drehung einer Fläche um eine Oktaëderkante erhält, entspricht nun im Allgemeinen einer Reihe von Triakisoktaëderflächen, deren Grenzlagen einerseits die Oktaëder, anderseits die Dodekaëderfläche darstellen.

Es ist nun von grossem Interesse, dass nach Becke beim Bleiglanze die secundären Lösungsflächen (Ätzflächen n. B.) in der Zone der Oktaëderkante zwischen Oktaëder und Dodekaëder sich bewegen, und ich werde später noch auf die Analogien welche zwischen den Ätzerscheinungen am Bleiglanze, und jenen des Aragonites bestehen, zurückkommen.

Ausser mit Ameisensäure lassen sich mit concentrirter, käuflicher Phosphorsäure schöne, oft sehr gross werdende Lösungs-

gestalten darstellen. Sie entstehen viel rascher als mit Ameisensäure und zeichnen sich auf der Basis durch starke Abstumpfung der Enden aus (Fig. 134). Die Lösungsgestalten des Makropinakoids erscheinen als drei- oder fünf flächige Spitzen (Fig. 135), welche den mit verdünnter Ameisensäure erzeugten ähnlich sind. Der Winkel des Contours der Spitzen mit drei Flächen ist annähernd derselbe, wie der Kantenwinkel des Brachydomas der Basis. Die Lösungsgestalten der Basis zeigen nämlich eine deutliche Brachydomenkante, welche im Allgemeinen ziemlich stumpf ist, aber constantere Winkel zeigt als an den Gestalten mit Ameisensäure. In der Projection auf $\infty\breve{P}\infty$ gemessen, betrug derselbe 122—128°, im Mittel 125·2°. Daraus würde sich das wohl secundäre Brachydoma $\frac{1}{5}\breve{P}\infty$ (ber. 125°31′)[1] ergeben. Die Lösungsgestalten des Makropinakoides zeigen mit Phosphorsäure ebenso wenig eine Prismenkante (Fig. 135) als diejenigen mit Ameisensäure.

Ausnahmsweise erhielt ich mit Phosphorsäure einmal auf einer nicht ganz glatten Brachypinakoidfläche Lösungsgestalten mit einer Prismenkante, sonst aber auf dieser Fläche auch mit Phosphorsäure immer nur Ätzfiguren.

Auf Grund der Analogien der vermutheten Lösungsgestalt mit einem Oktaëder, sowie mit Rücksicht auf die von Becke am Bleiglanze ermittelten Thatsachen auf der Fläche des Oktaëders dieses Minerales glaubte ich den Versuch machen zu sollen, eine Makrodomenfläche, welche die Hauptaxe c und die Brachyaxe a unter Winkeln von 45° schneidet, welche jedoch keine mögliche Krystallfläche ist,[2] zu ätzen. Ich hoffte, erhabene Spitzen zu finden, von welcher die Flächen nach allen Seiten ziemlich gleichmässig abfallen, analog etwa, wie auf der Basis des Kalkspathes oder auf der Oktaëderfläche des Bleiglanzes. Doch konnte ich natürlich nicht eine vollkommene Symmetrie der Spitzen erwarten, da ja die künstlich anzuschleifenden Fläche nur eine monoklinische Symmetrie hat. Es war also eine etwas verzerrte Lösungsgestalt vorauszusehen, die nur in Bezug auf eine dem

[1] Auch dieses Doma fehlt in der Tabelle von Zepharovich's l. c.

[2] Annähernd entspricht die Fläche dem an natürlichen Aragonitkrystallen nicht bekannten Doma $\frac{1}{13}\breve{P}\infty$.

Brachypinakoid parallele Linie symmetrisch sein konnte. Ferner erwartete ich, dass der Contour dieser erhabenen Spitze in Beziehung auf diese Linie einen rechten Winkel bilden werde, dessen Schenkel mit der geätzten Fläche Winkel von 45° bilden. Über die einzelnen auftretenden Flächen war a priori nichts Bestimmtes zu vermuthen. Lösungsgestalten — also erhabene Ecken — erwartete ich desshalb mit ziemlicher Bestimmtheit, weil ich an Bruchflächen, welche annähernd die Lage von Makrodomenflächen hatten, wiederholt die Erfahrung gemacht hatte, dass Lösungsgestalten an ihnen sehr leicht entstehen. Ich benützte zu dem Versuche einen grösseren Krystall von Horschenz, auf dessen wohl ausgebildeten Brachypinakoid- und Prismenflächen die Richtung der anzuschleifenden Fläche mit einer Stahlspitze markirt und dann zunächst mit der Feile, dann durch Poliren die gewünschte Fläche hergestellt wurde, was leidlich gut gelang. Der Krystall wurde nun in concentrirter käuflicher Phosphorsäure geätzt und zeigte nach kurzer Zeit die ganze Fläche überdeckt von theils isolirt stehenden, theils zu Gruppen vereinigten erhabenen Ecken, wie sie in Fig. 136 abgebildet sind. Auf den ersten Anblick glaubte ich Ätzfiguren vor mir zu haben, da namentlich die isolirt stehenden Spitzen eine so scharf abgegrenzte Basis hatten, wie sie sonst bei Lösungsgestalten selten vorkommt. Die Untersuchung bei stärkerer Vergrösserung zeigte aber mit voller Sicherheit, dass ich spitze Lösungsgestalten vor mir hatte. Noch sicherer war natürlich die Betrachtung der Profilansicht, nachdem die Fläche so gestellt war, dass sie mit der Makroaxe vertical stand. Die Messung in dieser Stellung war nicht sehr genau ausführbar, doch waren die Ecken jedenfalls in dieser Stellung nahezu rechtwinkelig (Winkel 90—95°) und die Schenkel des Winkels bildeten, wie vorausgesetzt war, mit der geätzten Fläche ziemlich genau Winke von 45°. Was nun die einzelnen Flächen der Spitzen anbelangt, so waren dieselben eigenthümlich complicirt. Im Ganzen machten die Spitzen den Eindruck wie in der Gruppe auf der linken Seite der Fig. 136; fünf Flächen, von welchen die beiden vorderen dem Brachydoma, die mittlere der drei hinteren dem Makropinakoid, die seitlichen hinteren aber zwei Pyramidenflächen entsprechen. Bei genauerer Untersuchung stellte sich aber heraus, dass in die

beiden vorderen (Brachydomenflächen) jederseits ein dreieckiger, zwickelförmiger Einschnitt so eingreift, dass jede dieser vorderen Flächen mit diesem Einschnitte zwei einspringende Kanten bildet, wie dies in der einzelnen Gestalt auf der rechten Seite der Fig. 136 dargestellt ist.

Im Ganzen war der Versuch überraschend gut gelungen.

Indem ich die mitgetheilten Beobachtungen über den Aragonit zusammenfasse, glaube ich als wahrscheinlich aussprechen zu dürfen, dass die Combination $\infty P.\breve{P}\infty$ die primäre Lösungsgestalt darstellt. Sicher ist dies jedoch nicht; es kann möglicher Weise auch ein anderes Prisma in Combination mit einem anderen Brachydoma die primäre Lösungsgestalt sein und es ist auch nicht undenkbar, dass es noch weitere primäre Lösungsflächen gibt. Für zweifellos halte ich nur, dass die Hauptlösungsflächen (Flächen grösster Löslichkeit) einem Brachydoma angehören.

Die ausgesprochene Annahme würde im Gegensatze zum Kalkspathe ergeben, dass die Lösungsflächen des Aragonites mit — allerdings unvollkommenen — Spaltungsflächen zusammenfallen. Es ist natürlich theoretisch durchaus nicht ausgeschlossen, dass dies der Fall sein kann; ich habe auch bereits früher die Vermuthung geäussert, dass wahrscheinlich auch für das Kochsalz Spaltungsflächen und Lösungsflächen (für Wasser) zusammenfallen, und, soweit die Untersuchungen Klocke's über die Ätzfiguren des Alaunes einen Schluss gestatten, ist es nicht unmöglich, dass auch bei diesem die Lösungsflächen mit den Spaltungsflächen (Oktaëder) zusammenfallen.

Schliesslich muss noch der merkwürdigen Versuche Lavizzari's[1] gedacht werden. Umgekehrt wie beim Kalkspathe ist nach Lavizzari die Basis des Aragonites die Fläche, welche im Verhältniss zur Prismenfläche unter gleichen Umständen beim Ätzen mehr Gas entwickelt. Die Gasentwicklung verhält sich ungefähr bei Anwendung concentrirter Salpetersäure wie 3 : 1. Durch Ätzen einer Aragonitkugel mit concentrirter Salpetersäure entstand eine Combination, welche aus einer Pyramide, einem Prisma und einem Pinakoid besteht. Aus der Zeichnung und Darstellung Lavizzari's lässt sich nichts Bestimmtes über die

[1] Nouveaux phénoménes des corps cristallisés. Lugano, 1865.

Indices der Form entnehmen; es ist nicht einmal ganz klar, ob das Pinakoid der Brachy- oder Makroaxe parallel ist. Die Pyramide könnte, der Zeichnung nach, die Grundpyramide sein. Nimmt man dies an, so wäre das Pinakoid ein Makropinakoid. Eine directe Vergleichung dieser secundären Lösungsgestalt, welche Lavizzari durch Ätzen einer Kugel erhielt, mit denjenigen, welche man beim Ätzen einzelner Flächen erhält, ist natürlich wiederum ebenso wenig zulässig, wie beim Kalkspathe.

XII. Capitel.

Theoretische Schlussbetrachtungen und Thesen.

Wenn in den vorausgehenden Blättern der Versuch gemacht wurde, eine theoretische Erklärung der Ätzerscheinungen des Kalkspathes und des Aragonites anzubahnen, so kann selbstverständlich nicht der Anspruch erhoben werden, damit eine genügende Theorie der Ätzerscheinungen der Krystalle überhaupt gefunden zu haben. Es wäre vermessen, etwas Derartiges auf die Untersuchung zweier Minerale hin zu glauben, und es ist nicht zu zweifeln, dass bei anderen Krystallen noch theoretisch wichtige Erscheinungen in den Vordergrund treten werden, welche hier gar nicht berührt oder kaum angedeutet wurden.

Dafür sprechen die bereits vorliegenden anderweitigen Untersuchungen über Ätzfiguren; insbesondere aber die Ätzversuche an der Zinkblende von F. Becke.[1] Aus den Untersuchungen Becke's scheint mir zweifellos hervorzugehen, dass die primäre Lösungsgestalt der Zinkblende (in Bezug auf Salzsäure) das positive Tetraëder ist. Hiefür sprechen vor Allem die Lösungsgestalten auf der Dodekaëderfläche der Blende, welche zwar grossentheils den Charakter von secundären Lösungsgestalten als verschiedene Formen von Triakistetraëdern zeigen, zum Theil aber die kaum modificirte Form der primären Lösungsgestalt darstellen.

Dies gilt insbesondere von den in Fig. 4, Taf. VII (l. c.) abgebildeten Gestalten der Dodekaëderfläche einer Blende von Santander, von welchen ich eine hier copire (Fig. 137). Der

[1] l. c.

Winkel *m o n* beträgt nach Becke circa 70°. Da dieser Winkel dem Kantenwinkel des Tetraëders entsprechen muss, falls dieses Lösungsgestalt ist, so stimmt dies ziemlich genau (ber. 70°31′). Die goniometrische Messung ergab ferner, dass den Linien *o m* und *o n* wirklich auf der Dodekaëderfläche normal stehende Flächen entsprechen und aus diesen beiden Thatsachen geht zweifellos hervor, dass die zwei, den Linien *o m* und *o n* entsprechenden Flächen Tetraëderflächen sind. Bezüglich der Flächen x_1 und x_2 ergab die goniometrische Messung, dass sie der Lage nach Triakistetraëderflächen entsprechen. Es scheint mir kaum zweifelhaft, dass es sich um eine wenig modificirte primäre Lösungsgestalt handle, auf welcher aber bereits auf der oberen Fläche eine secundäre Kante entstanden ist, indem bei der Lösung die Mitte der oberen Fläche etwas weniger rasch zurückgewichen ist, als die Flächen und Kanten längs *m o n*. Die weiteren secundären Lösungsgestalten der Dodekaëderfläche der Zinkblende, welche Becke abbildet, und welche sich durch starke Abflachung des Winkels *m o n* auszeichnen, erinnern so sehr an die secundären Veränderungen, die ich an den Seitenecken der Lösungsgestalt des Kalkspathes auf der Spaltungs- und ersten Prismenfläche direct beobachtete, dass man analoge Vorgänge auch für die Zinkblende als wahrscheinlich annehmen muss.

Ebenso lässt sich die Bildung der Ecke eines positiven Triakistetraëders auf der negativen Tetraëderfläche der Zinkblende ganz analog, wie die Bildung einer sechsflächigen Pyramide auf der Basis des Kalkspathes, als secundäre Lösungsgestalt auffassen.

Ferner lässt sich die Analogie nicht verkennen, welche darin liegt, dass die hauptsächlichsten secundären Lösungsflächen beim Kalkspathe — soweit es sich um Polecken handelt — in einer Zone liegen, welche gegeben ist durch die Drehung einer Fläche um die Polkante von $-2R$, bei der Zinkblende aber meistens in einer Zone, welche gegeben ist durch Drehung einer Fläche um eine Kante des positiven Tetraëders. Was die Ätzfiguren betrifft, so macht es keine Schwierigkeit, aus den Darstellungen Becke's auf der Würfelfläche und der Fläche des positiven Triakistetraëders $+\varkappa(311)$ die Umrissfigur der primären Lösungsgestalt wieder zu erkennen, und was die positive

Tetraëderfläche anbelangt, so ist bei dieser zum Theil dasselbe der Fall, theilweise kommen aber auf dieser auch Ätzfiguren vor, welche in ihrem Charakter instantanen Ätzfiguren des Kalkspathes analog sind. (Sechsecke und Figuren mit gebogenen Seiten und Flächen.)

Aus den Untersuchungen Becke's über den Bleiglanz lässt sich entnehmen, dass nach Ätzung der Würfelfläche mit heisser Salzsäure erhabene Oktaëderecken entstehen und es ist demnach, sowie mit Rücksicht auf die Ätzfiguren, wohl das Oktaëder die primäre Lösungsgestalt des Bleiglanzes. Mit kalter Salzsäure entstanden als secundäre Lösungsgestalten Triakisoktaëder, welche bis zur Grenzlage — dem Dodekaëder — reichten.

Auch beim Bleiglanze zeigt sich also wieder die Erscheinung, dass die hauptsächlichsten secundären Lösungsflächen in einer Zone liegen, welche durch Drehung einer Ebene um die Kante der primären Lösungsgestalt gegeben ist.

Ich kann es nicht unterlassen, noch speciell auf die Analogien einzugehen, welche die retardirten Ätzfiguren des Bleiglanzes mit den retardirten Ätzfiguren des Aragonites zeigen. Man kann sich die in Fig. 121 dargestellte Combination leicht in Analogie mit Flächen eines regulären Krystalles bringen. Betrachtet man die Prismen- und die Brachydomenfläche durch Oktaëderflächen ersetzt, dann entsprechen die Basis und das Makropinakoid Dodekaëderflächen, die Brachypinakoidfläche aber einer Würfelfläche. Die Ätzfiguren des Bleiglanzes sind nun auf der Würfelfläche Quadrate, deren Seiten parallel den Combinationskanten mit dem Oktaëder sind. Die Ätzfiguren des Brachypinakoides des Aragonites Rechtecke, deren Seiten parallel sind den Combinationskanten mit Prisma und Brachydoma. Die Ätzfiguren auf dem Oktaëder des Bleiglanzes sind gleichseitige Dreiecke, welche invers liegen zu den Oktaëderdreiecken, die Ätzfiguren des Prismas und des Brachydomas des Aragonites sind gleichschenkelige Dreiecke, welche invers liegen zu den entsprechenden Dreiecken der Combinationsflächen des Prismas und Brachydomas; die Ätzfiguren der Dodekaëderfläche des Bleiglanzes sind rhombische Figuren, deren Winkel in der Richtung der langen Diagonale der Dodekaëderfläche viel spitzer sind (59·3°) als die Projection des Oktaëderkantenwinkels (109°28′); die

Ätzfiguren der Basis und des Makropinakoides des Aragonites sind rhombische Figuren, deren Winkel in der, der langen Diagonale der Dodekaëderfläche homologen Brachydiagonale, respective Hauptaxe viel spitzer sind (circa 60° und 76°), als die Projection des Prismas (116°10′), respective des Brachydomas (108°26′).

Ich bemerke noch, dass die seichten Ätzfiguren auf der Dodekaëderfläche des Bleiglanzes, welche Becke in seiner Taf. III (Fig. 3, unten) abbildet, den Ätzfiguren der Basis des Aragonites bei sehr schwacher Ätzung (Fig. 123 *c*) fast zum Verwechseln ähnlich sind.

Besonders bemerkenswerth ist noch, dass Becke weder auf der positiven Tetraëderfläche der Zinkblende noch auf der Oktaëderfläche des Bleiglanzes Ätzhügel (Lösungsgestalten) beobachtete, sondern nur Ätzfiguren. Analog konnte auch ich auf den reinen Flächen $-2\,R$ des Kalkspathes, ∞P und $\breve{P}\infty$ des Aragonites nur Ätzfiguren, aber keine Lösungsgestalten hervorrufen. Es scheint demnach, dass auf den Lösungsflächen selbst keine Lösungsgestalten, sondern nur Ätzfiguren und diese besonders leicht entstehen. Dies ist im Allgemeinen begreiflich, da die Lösungsfläche für die Entstehung von Lösungsgestalten desshalb höchst ungünstig wäre, weil ja bei einer primären Lösungsgestalt oben immer zunächst eine horizontale Fläche entstehen müsste, während bei anderen Flächen in der Regel sofort Spitzen mit abfallenden Flächen auftreten können.

So weit kann man also in den Beobachtungen Becke's eine Erweiterung dessen finden, was sich am Kalkspathe und Aragonite ergeben hat, und es lassen sich dieselben theoretischen Gesichtspunkte hier, wie dort, geltend machen.

Es ergeben sich aber, insbesondere aus den hochinteressanten Versuchen Becke's an der Zinkblende auch theoretische Folgerungen, für welche beim Kalkspathe kein bestimmter Anhaltspunkt war.

Die Lösungsgestalt der Zinkblende besteht aus einem Flächencomplexe, in welchem keine parallelen Flächen vorkommen, und es lässt sich in Folge dessen deutlich erkennen, dass für die Lösungsvorgänge nicht bloss die Einschneiderichtung und Neigung der Lösungsflächen, sondern auch die Richtung innerhalb einer Lösungsfläche für den Lösungseffect von

wesentlichster Bedeutung ist. Dies ergibt sich zunächst aus dem Umstande, dass der Lösungseffect auf der positiven und auf der negativen Tetraëderfläche ein total verschiedener ist. Die Einschneiderichtungen und Neigungen der Lösungsflächen sind für das positive und negative Tetraëder genau gleich. Bei beiden handelt es sich um drei unter Winkeln von 60° sich kreuzende, den Kanten der geätzten Fläche parallele Einschneiderichtungen der Lösungsflächen, und in beiden Fällen haben die Lösungsflächen sämmtlich eine Neigung von 70°32′. Es müsste also vermöge Richtung und Neigung der einschneidenden Flächen auf der positiven und negativen Tetraëderfläche derselbe Ätzeffect sich zeigen. Da dies nicht der Fall ist, muss noch ein anderes wesentliches Moment in Betracht kommen. Denkt man sich nun die Projection der Lösungsgestalt in den Krystall hinein, so, wie sie auf der geätzten Fläche sich darstellen würde, so zeigt sich, dass auf dem positiven Tetraëder die Fläche, dagegen auf dem negativen Tetraëder die Spitze nach oben gerichtet ist. (Vergl. Fig. 138.)

Beachtet man nun die Richtungen der Bewegungen von Säuremolekülen, welche voraussichtlich den grössten Effect erzielen werden, so zeigt sich, dass diese auf dem positiven Tetraëder von der Seite einer Lösungsfläche zur Ecke, auf dem negativen Tetraëder dagegen von der Ecke zur Seite gehen, wie es in der Figur durch die Pfeile angedeutet ist. Da es vermöge der allgemeinen Symmetriegesetze sicher ist, dass die Richtungen in einer trigonalen Fläche von der Seite zur Ecke und umgekehrt ungleichwerthig sind (man vergleiche beispielsweise die Härtecurve auf der Basis des Kalkspathes auf Taf. IV, Fig. 61 *A*), so ist es in hohem Grade wahrscheinlich, dass diese Verschiedenheit der Grund des verschiedenen Ätzerfolges auf den beiderlei Tetraëderflächen ist. Ja, diese Vorstellung ist wohl unabweisbar, wenn man überhaupt den theoretischen Auseinandersetzungen über die Existenz von Lösungsflächen, wie sie im zweiten Capitel der ersten Abhandlung[1] entwickelt wurden, beipflichtet.

Ebenso sehr, wie der verschiedene Ätzerfolg auf der positiven und negativen Tetraëderfläche, spricht auch ganz entschieden die Ätzfigur auf der Würfelfläche der Zinkblende, welche einen

[1] p. 379 (12) u. f.

lang gezogenen rechteckigen Spalt (Fig. 139 *c*) in der Richtung der Kante des positiven Tetraëders darstellt, dafür, dass die Richtungen innerhalb der Lösungsflächen von wesentlichster Bedeutung sind. Denn wären wiederum nur Einschneiderichtungen und Neigungen der Lösungsflächen von Einfluss, so müsste die Ätzfigur denselben Umriss haben, wie wenn ein Oktaëder Lösungsgestalt wäre, nämlich eine Figur von quadratischem Umrisse, deren Seiten den Diagonalen des Würfels parallel sind. Nun schneiden aber die Flächen des Tetraëders, welche auf der Würfelfläche zur Kante zusammentreffen (Fig. 139 *aa*) — wenn man sich das Tetraëder auf dieselbe gestellt denkt — so ein, dass die wirksamste Richtung von der Ecke des Dreieckes zur Seite geht wie die punktirten Pfeile andeuten; umgekehrt schneiden die beiden Flächen, welche oberhalb der Würfelfläche zur Kante zusammentreten (*bb*, Fig. 130), so ein, dass die wirksamste Richtung von der Seite zur Ecke des Dreieckes geht, wie die ausgezogenen Pfeile andeuten. Da nun die Ätzfigur in der Richtung der Kante, welche auf der Würfelfläche liegt (*aa*) sehr stark verlängert ist, ist wohl die Löslichkeit der Zinkblende in der Richtung dieser Kante viel grösser, als in der darauf senkrechten. Denn es handelt sich um eine entschieden retardirte Ätzfigur, welche erst nach 10—15 Minuten deutlich hervortritt. Es ergibt sich ferner, dass die Wirkung eines Säuremoleküles, welches in der Richtung von der Ecke zur Seite einer +Tetraëderfläche sich bewegt, viel energischer ist, als wenn die Bewegung in entgegengesetztem Sinne erfolgt. In Übereinstimmung mit diesen Schlüssen aus der Beschaffenheit der Ätzfigur der Würfelfläche der Zinkblende steht die von Becke völlig sicher gestellte Thatsache, dass die negative Tetraëderfläche im Ganzen viel leichter löslich ist, als die positive. Auf der negativen Tetraëderfläche erfolgt aber, wie früher auseinandergesetzt wurde, längs allen Lösungsflächen die wirksamste Bewegung der Säuremoleküle von der Ecke zur Seite des Dreieckes, auf der positiven aber im umgekehrten Sinne.[1] Am Kalkspathe und am Aragonite konnte

[1] Eine andere Frage ist es jedoch, ob, wie F. Becke glaubt, die Ätzflächen (Lösungsflächen) solche Flächen sind, welche der Auflösung den grössten Widerstand entgegensetzen. Dies kann vielleicht bei der Zinkblende der Fall sein; allgemein ist dies aber wohl eben so wenig giltig, wie

kein bestimmter Anhaltspunkt für die Wichtigkeit der Richtung innerhalb einer Lösungsfläche gewonnen werden; dennoch zweifle ich nicht, dass gerade dieses Moment auch bei den genannten Mineralien von wesentlichem Einflusse ist. Insbesondere wird sich die von Lavizzari constatirte enorme Verschiedenheit der Löslichkeit der Krystallflächen, sowohl beim Kalkspathe als beim Aragonite wohl nur mit Rücksicht auf dieses Moment befriedigend erklären lassen.

Im Ganzen muss beim Kalkspathe, wie bei jedem Krystalle, bei welchem ein Flächencomplex aus gleichwerthigen, parallelen Flächenpaaren Lösungsgestalt ist, die Bedeutung der ungleichwerthigen Richtungen in den Lösungsflächen desshalb in den Hintergrund treten, weil meistens Richtung und Gegenrichtung gleichzeitig in Betracht kommen. Denkt man sich beispielsweise das Lösungsrhomboëder auf der Basis, so ist die wirksamste Bewegung der Säuremoleküle stets ebenso gut vom Pol zur Seitenecke, wie umgekehrt gerichtet. Überhaupt wird das genannte Moment bei holosymmetrischen Krystallen im Ganzen wenig auffällig eingreifen; dagegen ist es zur Erklärung der Ätzfiguren der meisten hemisymmetrischen Krystalle, die ja stets dieselbe Symmetrie haben, wie die betreffenden Krystallflächen, unentbehrlich.

Damit sind wir aber auf einem Punkte angelangt, wo die Analogien zwischen den Beziehungen von Härte und Spaltungsflächen einerseits, und von chemischer Härte und Lösungsflächen andererseits, welche uns bisher geleitet haben, vorläufig gänzlich im Stiche lassen. Denn davon, dass die Härte einer Krystallfläche auch von den Orientirungen bestimmter Richtungen der Spaltungsflächen gegen die auf ihre Härtecurve untersuchte Krystallfläche abhänge, ist bisher nichts bekannt. Und doch ist es nicht unwahrscheinlich, dass dies der Fall sei. Man kann a priori kaum annehmen, dass es Härtecurven gibt, welche der Symmetrie der betreffenden Krystallfläche nicht genügen[1] und

---

der Satz, dass die Spaltungsflächen die härtesten Flächen eines Krystalles seien. Bezügliche Daten für die mittleren Härten von Krystallflächen ergeben sich insbesondere aus den neueren Arbeiten von F. Pfaff, l. c. u. Das Mesoscleròmeter (Sitzungsb. der königl. bayerischen Akademie in München, 1884, pag. 255.)

[1] Exner, l. c. pag. 11, Sohncke, Poggend. Ann., Ergänzungsbd. VII 1876.

die Mehrzahl der bekannten Härtecurven ist in der That den Symmetriegesetzen entsprechend. Wo Widersprüche vorkommen, können dieselben als durch die zu geringe Empfindlichkeit der Untersuchungsmethode bedingt betrachtet werden. Einer der auffälligsten Widersprüche ist die von Exner [1] als der hexagonalen Symmetrie entsprechend gefundene und berechnete! Härtecurve der Dodekaëderfläche der Zinkblende, welcher doch nur eine monoklinische Symmetrie zukommen sollte. Es wäre theoretisch sehr interessant, wenn die Dodekaëderfläche der Zinkblende nach der so empfindlichen sklerometrischen Methode von F. Pfaff neu untersucht würde. Es würde sich dann dieser Widerspruch wohl lösen und wahrscheinlich sich auch Anhaltspunkte dafür ergeben, dass nicht bloss die Richtung der Combinationskanten und die Neigung der Spaltungsflächen, sondern auch die krystallographische Werthigkeit der Richtung, in welcher das Hobeln entsprechend den Spaltungsflächen geschieht, die Härte beeinflusst. Ist letzteres nicht der Fall, so muss die Härtecurve der rhombischen Symmetrie entsprechen; ist es aber der Fall, so muss sie monoklinisch werden, wobei die Symmetrielinie in die kurze Diagonale der Dodekaëderfläche fallen müsste.

Vielleicht würde sich aus dem Umstande, dass die Härte einer Krystallfläche nicht bloss von der Güte, der Einschneiderichtung und Neigung der Spaltflächen, sondern auch von der Orientirung bestimmter Richtungen der Spaltungsfläche gegen die untersuchte Fläche abhängt, eine Beziehung zwischen absoluter Härte und Spaltbarkeit ableiten lassen, was bisher nicht in genügender Weise möglich war.

Indem ich mir diese Bemerkungen über die Härte der Krystallflächen erlaubte, wollte ich mit denselben nur darauf hinweisen, wie wenig sicher der Boden ist, von welchem die Speculationen über Ätzfiguren ausgehen mussten; dass aber anderseits die theoretische Betrachtung der Ätzerscheinungen auch Gesichtspunkte eröffnet, welche für die Aufklärung der Härtefrage von Bedeutung sein können.

Wenn ich es schliesslich versuche, meine Vorstellungen über die Lösungserscheinungen der Krystalle in einer Reihe von Sätzen

---

[1] l. c. Fig. 28 und pag. 39 und 151.

zu formuliren, so gebe ich dieselben mit aller Reserve, wohl wissend, dass die bekannten Thatsachen zu einer allseitig sicheren inductiven Begründung derselben nicht hinreichen. Doch dürfte eine solche vorläufige Formulirung von Sätzen, behufs weiterer Prüfung von Nutzen sein.

1. Die Ätzerscheinungen an Krystallen beruhen hauptsächlich auf der Existenz von Lösungsflächen, welche Spaltungsflächen analog sind, mit denselben jedoch im Allgemeinen nicht zusammenfallen.

2. Analog, wie man eine von Spaltungsflächen begrenzte Krysfallform Spaltungsgestalt, kann man eine von Lösungsflächen begrenzte Krystallform Lösungsgestalt nennen.

3. Durch Ätzen von Krystallflächen können erhabene Ecken entstehen, welche entweder von den eigentlichen Lösungsflächen begrenzt sind oder aber von secundären Flächen, welche durch combinirtes Zusammenwirken der lösenden Substanz nach verschiedenen Flächen der Lösungsgestalt entstehen. Erstere Ecken entsprechen der primären Lösungsgestalt; letztere kann man als secundäre Lösungsgestalten bezeichnen.

4. Nur die Flächen der primären Lösungsgestalt sind in aller Strenge krystallographisch mögliche Flächen mit einfachen rationalen Indices. Die secundären Lösungsflächen haben nicht nothwendig rationale Indices, doch kommen solche an denselben nicht selten vor. Es ist im Allgemeinen eine Tendenz nach Bildung von vielflächigen Ecken mit der Krystallsymmetrie entsprechenden Flächen vorhanden, und ausserdem liegen die hauptsächlichsten secundären Lösungsflächen in den Zonen der Kanten der primären Lösungsgestalten. Dies muss namentlich bei Krystallen des regulären Systemes die Bildung von secundären Flächen, welche sich solchen mit rationalen Indices annähern, begünstigen.

5. Wird eine Krystallfläche geätzt, welche einer Lösungsfläche entspricht, so entstehen auf derselben zwar sehr leicht Ätzfiguren, aber nur sehr selten erhabene Lösungsgestalten. Es wäre sogar möglich, dass auf ganz reinen Lösungsflächen überhaupt niemals erhabene Lösungsgestalten entstehen.

6. Die (vertieften) Ätzfiguren verdanken ihre Entstehung einem local begrenzten, besonders intensiven Lösungsprocesse. Auf amorphen, isotropen Körpern (Glas) sind die Ätzfiguren muldenförmig und von kreisförmigem Umrisse.

7. Die Ätzfiguren zerfallen in langsam sich entwickelnde (retardirte), welche erst im Laufe von einer oder mehreren Minuten ihre volle Ausbildung erlangen, und in rasch sich entwickelnde (instantane), welche in wenigen Secunden ihre definitive Form und Grösse erreichen. Beiderlei Arten sind durch Übergänge verbunden.

8. Die Form der Ätzfiguren hängt mehr von der Geschwindigkeit ihrer Entwicklung, als von der Qualität des Ätzmittels ab, vorausgesetzt, dass bei der Variation der Ätzmittel nur solche gewählt werden, welche voraussichtlich analoge Zersetzungsprocesse hervorrufen (z. B. verschiedene Säuren beim Kalkspathe). Ätzmittel, welche wesentlich differente Zersetzungen hervorrufen, dürfen mit einander nicht verglichen werden, da diesen voraussichtlich verschiedenartige primäre Lösungsflächen zukommen werden (z. B. Flusssäure und Ätzkali bei Silicatätzungen).

9. Die Geschwindigkeit der Entwicklung der Ätzfiguren lässt sich durch Variation der Concentration und Temperatur des Ätzmittels beeinflussen.

10. Die Umrissformen der instantanen Ätzfiguren hängen in erster Linie von der chemischen Härtecurve (Löslichkeitscurve) der geätzten Krystallfläche ab; sie stehen daher in einem, in gewissem Sinne, analogen Zusammenhange mit den primären Lösungsflächen, wie eine mechanische Härtecurve mit den Spaltungsflächen.

11. Die Anordnung der Minima der chemischen Härtecurve einer Krystallfläche bleibt für qualitativ verschiedene, aber vergleichbare Lösungsmittel (z. B. verschiedene Säuren beim Kalkspathe) dieselbe, da die primären Lösungsflächen stets dieselben sind. Die numerischen Verhältnisse der Minima können aber nach Temperatur und Concentration eines Lösungsmittels sich wahrscheinlich ändern, wodurch sich die Mannigfaltigkeit instantaner Ätzfiguren erklären würde.

12. Ausgesprochen retardirte Ätzfiguren zeigen im Allgemeinen eine Ähnlichkeit des Umrisses mit dem Umrisse der auf die geätzte Fläche projicirt gedachten Lösungsgestalt. Das Mass dieser Ähnlichkeit hängt aber von den besonderen Umständen ab, unter welchen die Lösungsflächen auf der geätzten Fläche einschneiden. Die grösste Ähnlichkeit des Umrisses resultirt wohl,

wenn vier, je paarweise gleichgeneigte Flächen in der geätzten Fläche in zwei auf einander senkrechten Linien sich durchschneiden (Rechteck oder Quadrat). Eine grosse Ähnlichkeit des Umrisses resultirt ferner, wenn drei unter nicht sehr spitzen Winkeln sich kreuzende Lösungsflächen auf der geätzten Fläche einschneiden. Ungünstiger ist dagegen der Fall, wenn vermöge der Lage der Lösungsflächen ausgesprochene singuläre, oder in zwei entgegengesetzten Richtungen einer Linie gelegene, chemische Härteminima (Löslichkeitsmaxima) in der geätzten Fläche vorhanden sind. Dies kommt vor, wenn zwei gleichgeneigte, in einer Zone mit der geätzten Fläche gelegene Lösungsflächen einschneiden, welche von einer schief geneigten dritten Lösungsfläche in der geätzten Fläche senkrecht durchschnitten werden (Spaltungsfläche des Kalkspathes) oder wenn die Richtung der Durchschnittslinie der gleichgeneigten Doppelfläche von einer oder mehreren senkrecht einschneidenden Lösungsflächen unter spitzen Winkeln gekreuzt wird (Deuteroprismenfläche des Kalkspathes, Basis- und Makropinakoid des Aragonites, Dodekaëderfläche des Bleiglanzes). In allen diesen Fällen zeigt sich eine Zuspitzung der Ätzfigur in den Richtungen der voraussichtlichen Maxima der Löslichkeit der Fläche (= Minima der chemischen Härtecurve), durch welche Zuspitzung die Ähnlichkeit des Umrisses der Ätzfigur mit dem Umrisse der Projection der Lösungsgestalt aufgehoben oder wenigstens theilweise gestört wird.

13. Die Flächen der Ätzfiguren entsprechen nur in seltenen Fällen primären Lösungsflächen. Bei Ätzfiguren regulärer Krystalle folgen die Flächen zum Theil ähnlichen Gesetzen, wie die Flächen der secundären Lösungsgestalten. Viele Ätzfiguren nicht regulärer Krystalle zeigen aber stark gekrümmte Flächen und neben einspringenden, auch erhabene Kanten. Dies lässt sich mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der Ätzfiguren von der chemischen Härtecurve begreifen, schwer aber erklären, wenn man die Ätzfiguren als vertiefte Abdrücke von Krystallgestalten auffassen will.

14. Um die Thatsache zu erklären, dass die Ätzfiguren stets der Symmetrie der geätzten Fläche entsprechen, genügt die Annahme nicht, es sei ein Minimum der chemischen Cohäsion in den Normalen der Lösungsflächen vorhanden. Es muss vielmehr zur Erklärung der Ätzfiguren auf hemisymmetrischen Krystallen

noch angenommen werden, dass die Bewegungsrichtung eines in der Lösungsfläche gegen eine Krystallfläche anprallenden Moleküles der lösenden Substanz einen verschiedenen Effect bedinge, je nachdem diese Bewegungsrichtung in der Lösungsfläche orientirt ist. Auch die verschiedene Löslichkeit verschiedener Krystallflächen kann nur durch diese Annahme, nicht aber dadurch erklärt werden, dass die Löslichkeit nur von den Richtungen der Combinationskanten und den Neigungen der Lösungsflächen zur geätzten Fläche abhänge.

Fortsetzung des Verzeichnisses der zur Untersuchung benützten Kalkspathkrystalle.

(Vergl. Seite 450 der ersten Abhandlung.)

L. ∞R, $\infty P2$, $R3$, $4R$, $\frac{1}{2}R$, R, $-\frac{1}{2}R$, Hod Barrow-Mine in Cumberland. Wasserhelle Krystalle von 2—15 Mm. Länge und bis zu 5 Mm. Dicke. Vorherrschend ∞R, $R3$ und $-\frac{1}{2}R$. ∞R uneben, mit unregelmässigen Gruben, $\infty P2$ schmal, stellenweise ganz glatt und glänzend, meistens aber etwas rauh und nach R gestreift. $R3$ theils glänzend, theils matt und grubig. $4R$ sehr kleine Flächen, nicht ganz glatt, mit strichartigen Furchen in der Klinodiagonale. $\frac{5}{2}R$ ganz schmale Abstumpfung der stumpfen Polkante von $R3$. — $\frac{1}{2}R$ gebogen, grob gestreift nach R.

M. $13R$, $-\frac{7}{2}R$, $R\frac{19}{15}$, R. Angeblich von Böhmisch-Brod. Kurze säulenartige, nur schwach getrübte Krystalle bis zu 5—10 Mm. Dicke. Die Krystalle machen fast den Eindruck der Combination des Protoprismas mit dem Grundrhomboëder. $13R$ rauh, $-\frac{7}{2}R$ glatt glänzend, $R\frac{19}{15}$ glatt glänzend.

N. $R3$, $-2R$. Bleiberg in Kärnthen. Milchig trübe Krystalle bis zu 10 Mm. Länge. $R3$ vorherrschend, meistens rauh, stellenweise, namentlich gegen die Spitzen hin, aber ganz glatt. — $2R$ schmale Abstumpfung der scharfen Polkanten von $R3$.

O. $-4R$, $4R$, R. Eisenerz in Steiermark. Halb durchscheinende, drusenförmig angeordnete Krystalle bis zu 8 Mm. Länge, $-4R$ vorherrschend, matt, mit zahlreichen kleinen Gruben, $4R$ und R schmal, ebenfalls matt.

Tafelerklärung.

Sämmtliche Ätzfiguren sind, mit Ausnahme der in Fig. 52 dargestellten, nur als Contourzeichnungen wiedergegeben. An einigen complicirteren Figuren, wie z. B. 92, 93, 94 etc., sind die Contouren der am stärksten geneigten Flächen dunkler gehalten als diejenigen der nur wenig geneigten Flächen. Alle Figuren sind mit Hilfe der Camera lucida gezeichnet.

Tafel I.

Fig. 1. *A.* Projection des zur Hälfte in die Fläche des Spaltungsrhomboëders eingetieften Lösungsrhomboëders — $2R$.

B. Muthmassliche chemische Härtecurve der Spaltungsfläche für Säuren. ac kleinstes Minimum, bc mittleres Minimum, dc und $d'c$ grösste Minima. ec, $e'c$ und fc, $f'c$ Maxima. Das Nähere im Texte Seite 20 u. f.

(Sämmtliche folgende Figuren dieser Tafel stellen mit Ameisensäure auf der Spaltungsfläche hervorgerufene Ätzfiguren dar.)

„ 2 und 3. Concentrirte Ameisensäure (1·2 sp. G.) *a* nach 10 Secunden, *b* nach 1 Minute, *c* nach $1^1/_2$ Minuten. Vergr. 160.

„ 4. Concentrirte Ameisensäure. Verschiedene Formen von Ätzfiguren. Entwicklungsdauer unbestimmt. *e* häufigste Form, *a—d* etwas seltener. Vergr. 160.

„ 5. Eintauchen in kochende, concentrirte Ameisensäure. Vergr. 160.

„ 6. Betupfen mit kochender, concentrirter Ameisensäure. *a* von der Mitte, *b* von der Peripherie des ätzenden Tropfens. Vergr. 160.

„ 7. Betupfen mit kochender, concentrirter Ameisensäure. Vergr. 500.

„ 8. 50% der concentrirten Ameisensäure. Dauer der Einwirkung unbestimmt. Vergr. 160.

„ 9. Betupfen mit kochender, 50% Ameisensäure. *a* nach 2 Secunden, *b* nach 3 Secunden. Vergr. 160.

„ 10. Betupfen mit kochender, 50% Ameisensäure. Dauer der Einwirkung unbestimmt. Verschiedene Formen von Ätzfiguren. Vergr. 160.

„ 11. Eintauchen in kochende, 50% Ameisensäure. Vergr. 160.

„ 12. Betupfen mit 30% Ameisensäure. Vergr. 160.

„ 13. Betupfen mit kochender, 30% Ameisensäure. Vergr. 160.

„ 14. Eintauchen in kochende 30% Ameisensäure. Vergr. 160.

„ 15. Längere Einwirkung von 10% Ameisensäure. *a* instantane, *b* retardirte Ätzfigur. Vergr. 500.

Tafel II.

(Sämmtliche Ätzfiguren dieser Tafel gehören der Spaltungsfläche an. Fig. 16—28 Essigsäure, Fig. 29 Picrinsäure, Fig. 30—36 Salpetersäure.)

Fig. 16. Gruppe von Ätzfiguren. Mit 20% der käuflichen, concentrirten Essigsäure dargestellt. Vergr. 500.

„ 17. Betupfen mit käuflicher, concentrirter Essigsäure. Vergr. 160.

„ 18 und 19. Ebenso. Vergr. 500.

„ 20. Erst Betupfen mit Eisessig (welcher keine Ätzfiguren erzeugt), dann Wasserzusatz, wodurch die abgebildeten Figuren entstanden. Vergr. 500.

„ 21. 50% Eisessig. Vergr. 160.

„ 22. 33% „ „ „

„ 23. 25% „ „ „ *a* häufigste Form.

„ 24. 20% „ „ „ *b* „ „

„ 25. 11% „ „ „ *a* „ „

„ 26. 9% „ „ „ *a* „ „

„ 27. 50% der käuflichen, concentrirten Essigsäure. Vergr. 500.

„ 28. Kochende, concentrirte Essigsäure. Vergr. 500.

„ 29. Kalt gesättigte Lösung von Picrinsäure. Dauer der Einwirkung circa 20 Secunden. Vergr. 160.

„ 30. Concentrirte Salpetersäure. *a* momentan, *b* 1 Secunde, *c* 3 Secunden, *d* Zeitdauer unbestimmt. Vergr. 160.

„ 31. 20% Salpetersäure. *a* und *b* momentan, *c* 2—3 Secunden, *d* 6 Secunden. Vergr. 160.

„ 32. 10% Salpetersäure. *a* momentan, *b* einige Secunden, *c* Zeitdauer unbekannt. Vergr. 160.

„ 33. 5% Salpetersäure.

„ 34. 3% „

„ 35. 2% „ *a* 16 Secunden, *b* 45 Secunden.

„ 36. Entwicklung einer Ätzfigur mit Salpetersäure. Concentration unbekannt. Die Aufeinanderfolge der Formen direct beobachtet. Die Contouren der einzelnen Figuren aber nach fixirten Präparaten gezeichnet.

„ 37. Diagramm zur Erläuterung der Abhängigkeit der Richtungen der vertieften Kanten von der Geschwindigkeit des Fortschreitens der Ätzfigur nach vor- und rückwärts. Das Nähere im Texte Seite 24.

Tafel III.

(Sämmtliche Ätzfiguren dieser Tafel gehören der Spaltungsfläche an. Fig. 38—46 Salzsäure, Fig. 47—52 Phosphorsäure, Fig. 53—56 Schwefelsäure, Fig. 57—60 Chromsäure.)

Fig. 38. Concentrirte, käufliche Salzsäure. Kurze Einwirkung. Vergr. 160.

„ 39. Concentrirte, käufliche Salzsäure. *a* momentan, *b* circa 2 Secunden. Vergr. 160.

Fig. 40. 50% käufliche, concentrirte Salzsäure. *a* momentan, *b* 2 Secunden, *c* 4 Secunden. Vergr. 160.

„ 41. 40% Salzsäure. *a* momentan, *b* 4 Secunden, *c* 7 Secunden. Vergr. 160.

„ 42. 10% Salzsäure. Kurze Einwirkung. *b* häufigste Form. Vergr. 160.

„ 43. 5% Salzsäure. *a* Kurze Einwirkung, *b* mehrere Secunden. Vergr. 160.

„ 44. 2½% Salzsäure. *c* und *d* häufigste Formen. Vergr. 160.

„ 45. 2% „ Vergr. 160.

„ 46. 1% „ „ „ Längere Einwirkung.

„ 47. Concentrirte, käufliche Phosphorsäure. Kurze Einwirkung. Häufigste Formen. Vergr. 160.

„ 48. Concentrirte, käufliche Phosphorsäure. Seltenere Formen. Vergr. 160.

„ 49. 20% concentrirte käufliche Phosphorsäure. Zeitdauer unbekannt. Vergr. 160.

„ 50. 10% Phosphorsäure. *a* 3 Secunden, *b* 15 Secunden, *c* 30 Secunden. Vergr. 160.

„ 51. Phosphorsäure. Präparat unter dem Deckglase geätzt. Concentration unbekannt. Vergr. 160.

„ 52. Ebenso nach längerer Einwirkung. Gruppe von falschen Lösungsgestalten, wie sie durch Ineinandergreifen von Ätzfiguren, welche anfänglich die Formen der Figuren 50 und 51 hatten, entstanden sind.

„ 53. Circa 6%, käufliche, concentrirte, englische Schwefelsäure. (1 Theil Säure zu 16 Theilen Wasser.) Zeitdauer unbestimmt. *a* Vergr. 500, *b* und *c* 160.

„ 54. Schwefelsäure, sehr verdünnt. Vergr. 300.

„ 55. 6% Schwefelsäure erwärmt. Vergr. 500.

„ 56. Mit concentrirter Schwefelsäure betupft, dann mit Wasser gewaschen. Vergr. 500.

„ 57. Concentrirte Chromsäurelösung. *a* momentan, *b* 3 Secunden, *c* 6 Secunden. Vergr. 500.

„ 58. Chromsäure etwas verdünnt. Vergr. 160.

„ 59. 2% Chromsäure erwärmt. Krystall eingetaucht. Vergr. 160.

„ 60. ½% Chromsäure. Vergr. 500.

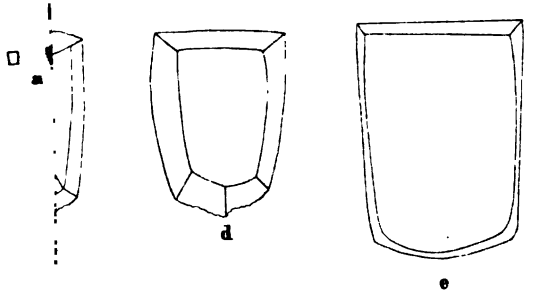
Tafel IV.

(Fig. 61—69 Basis, 70—72 $-\frac{1}{2}R$, 73—88 $-2R$.)

Fig. 61. $+R$, R, R. Basis mit den Combinationskanten des Grundrhomboëders. *a' b' d'* vertiefte Ecke eines negativen Rhomboëders, *e f g* mögliche chemische Härtecurve der Basis des Kalkspathes (in Bezug auf Säuren. (Vergl. Text, Seite 787.) 61 *A*, mechanische Härtecurve der Basis des Kalkspathes (Copie nach F. Pfaff).

„ 62. Ätzfiguren auf einer künstlich angeschliffenen Basis an einem Krystalle der Stufe *D* mit concentrirter Salpetersäure. Vergr. 500.

„ 63. Auf einer künstlich angeschliffenen Basis des i. Doppelspathes. Concentrirte Salpetersäure.



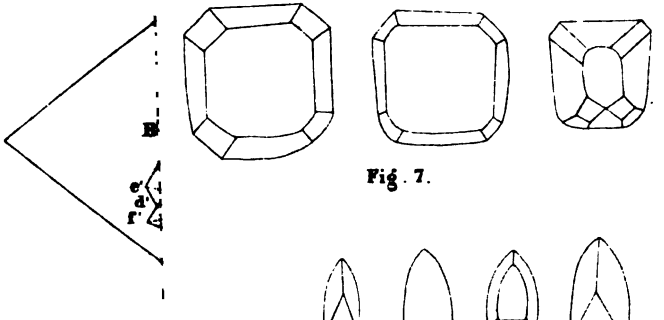


Fig. 7.

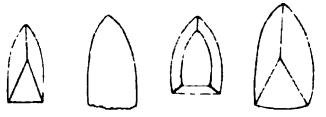
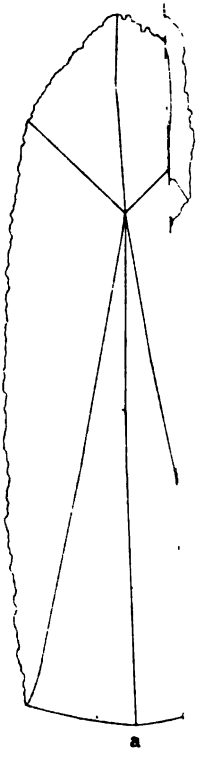


Fig. 12.



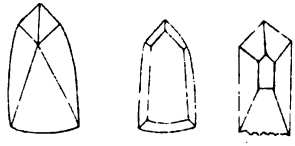


Fig. 13.

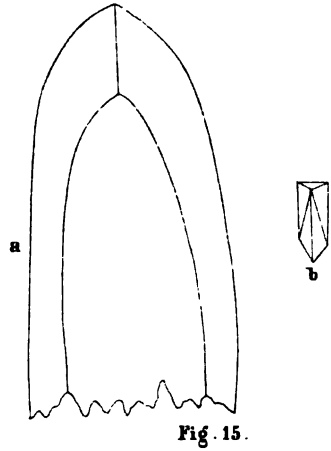


Fig. 15.

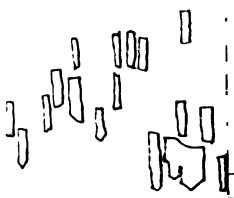


Fig. 16.

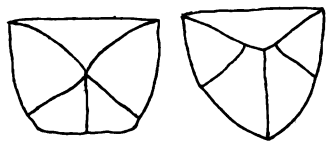


Fig. 19.

Fig. 23.

Fig. 20.

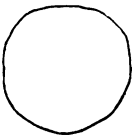


Fig. 28.

Fig. 24.

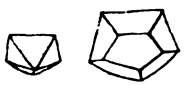
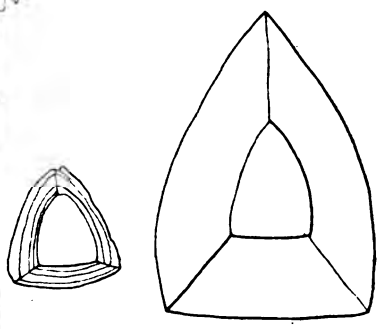


Fig. 29.



d

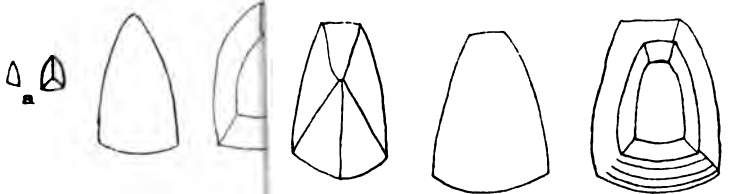
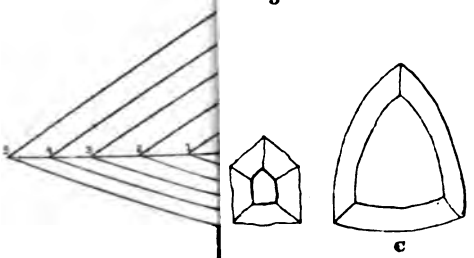


Fig. 34.



c

Fig. 36.

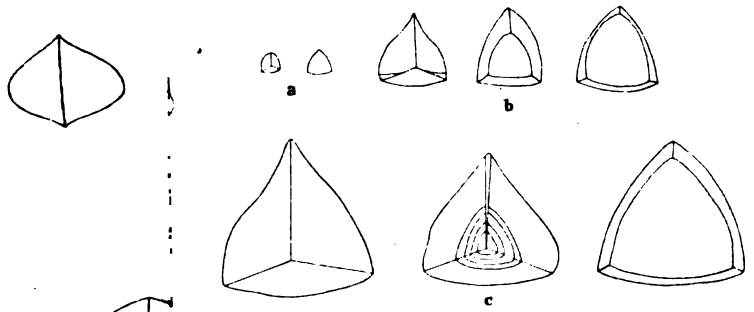


Fig. 40.

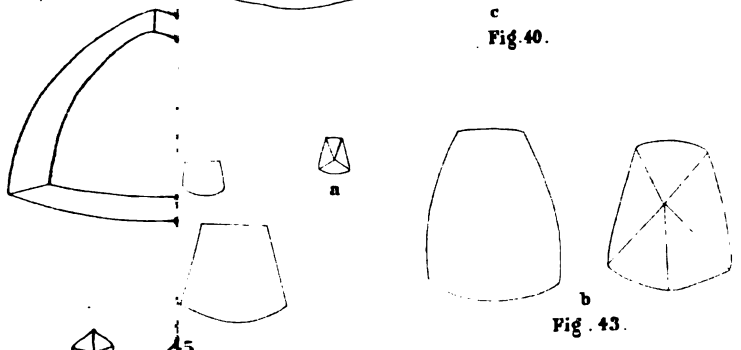


Fig. 43.

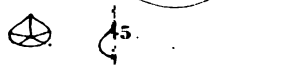


Fig. 45.

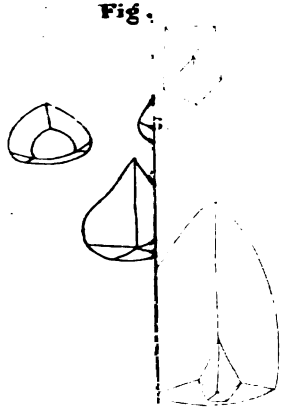


Fig. 52.

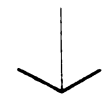


Fig. 58.

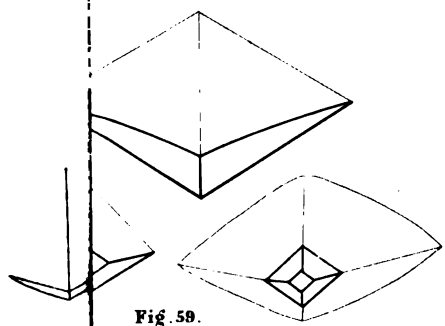


Fig. 59.

Fig. 60.

Lith Anst v Th Bannwarth, Wien

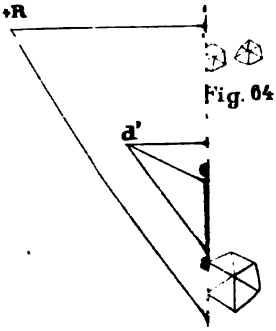


Fig. 64

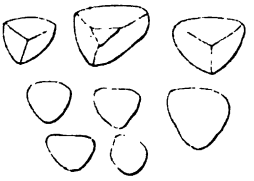


Fig. 65.

Fig. 69

Fig.

Fig. 61,A

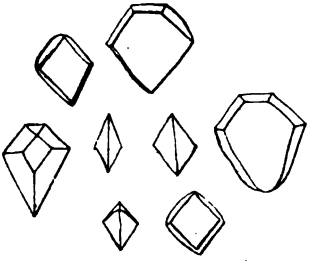


Fig. 78

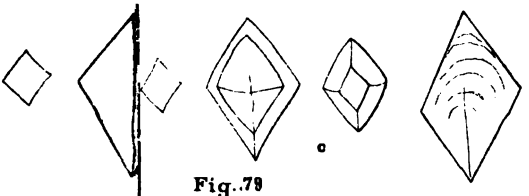


Fig. 79

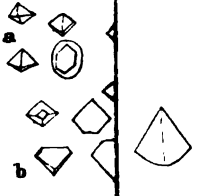


Fig. 8

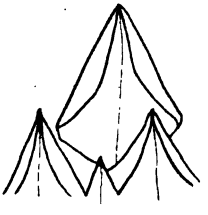


Fig. 88

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien

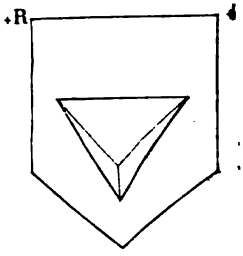


Fig. 89.

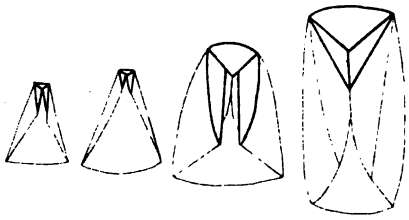


Fig. 94.

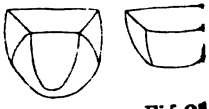


Fig. 93.

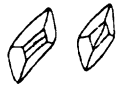


Fig. 100.

Fig. 104.

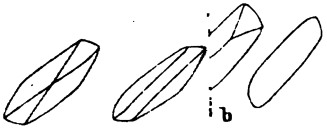


Fig. 105.

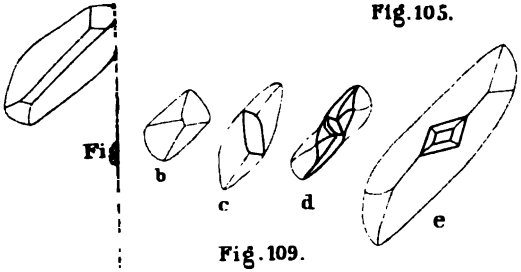


Fig. 109.

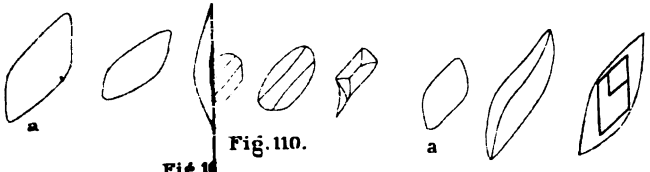


Fig. 110.

Fig. 111.

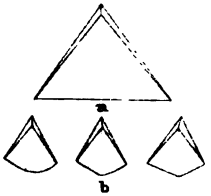


Fig. 112.

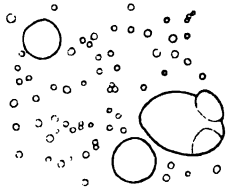


Fig. 119.

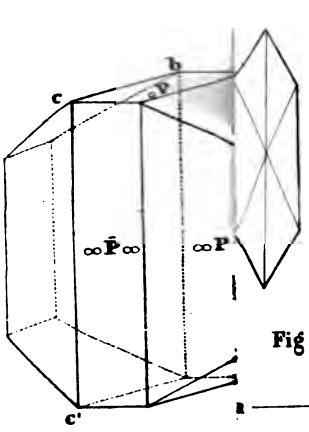


Fig. 120.

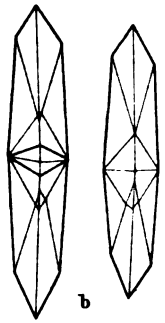


Fig. 123.

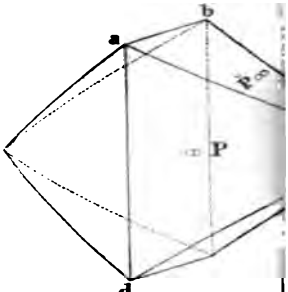


Fig. 121.

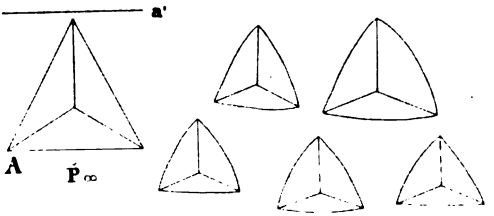


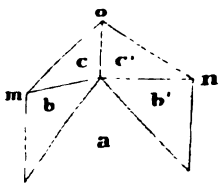
Fig. 126.

Fig. 130.

Fig. 127.

Fig. 136.

Fig. 137.



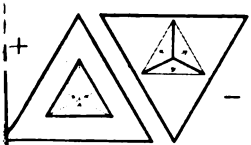


Fig. 138.

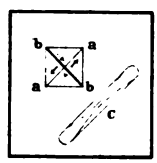


Fig. 139.

Fig. 64. Ebenso, mit 10% Salpetersäure nach circa 10 Secunden.
„ 65. Ebenso mit 5% Salpetersäure nach circa 30 Secunden. Vergr. 500.
„ 66. Auf einer polirten, natürlichen Basis der Stufe *F*. Mit circa 35% Salzsäure.
„ 67. Auf einer künstlich angeschliffenen Basis eines Krystalles der Stufe *H*. Mit 20% Phosphorsäure. Vergr. 160.
„ 68. Auf einer natürlichen, polirten Basis eines Krystalles der Stufe *F*. Mit 20% Phosphorsäure. Vergr. 500.
„ 69. Ebenso.
„ 70. Vertiefte Ecke des Rhomboëders $-2R$ auf der Fläche $-\frac{1}{2}R$.
„ 71. Ätzfiguren auf der natürlichen Fläche $-\frac{1}{2}R$ eines Krystalles der Stufe *D*. Mit 20% Phosphorsäure. *a* kurze Ätzung, *b* und *c* länger dauernde Ätzung.
„ 72. Ebenso. Mit 40% Salzsäure. Vergr. 200.
„ 73. Projection des Rhomboëders $-2R$ auf seine eigene Fläche.
(Fig. 74—88 Ätzfiguren auf natürlichen Flächen des Rhomboëders $-2R$ sämmtlich von der Stufe *C*.)
„ 74. Concentrirte Ameisensäure. *a* längere, *b* kurze Ätzung. Vergr. 160.
„ 75. Ebenso nach 20 Secunden dauernder Ätzung. *a* häufige, *b* seltenere Formen. Vergr. 500.
„ 76. 50% Ameisensäure. Vergr. 500.
„ 77. 30% „ „ 160.
„ 78. 30% „ „ 500.
„ 79. Käufliche, concentrirte Essigsäure. *a* nach 20 Secunden, *b* nach $1\frac{1}{3}$ Minuten, *c* nach 3 Minuten. Vergr. 500.
„ 80. Käufliche, concentrirte Salpetersäure. Momentan. Vergr. 500.
„ 81. 20% Salpetersäure. Vergr. 500.
„ 82. 10% „ „ 500.
„ 83. 40% käuflicher Salzsäure. Nach circa 2 Secunden. *a* Vergr. 500, *b* Vergr. 160.
„ 84. Concentrirte, käufliche Phosphorsäure. Kurze Einwirkung. *a* und *b* häufigste Formen, die übrigen seltener.
„ 85. 20% Phosphorsäure. *a* kurze, *b* längere Ätzung. Vergr. 200.
„ 86. 10% Phosphorsäure.
„ 87. Concentrirte Chromsäure. Nach etwa 4 Secunden. Vergr. 500.
„ 88. Ebenso nach längerer Ätzung.

Tafel V.

(Fig. 89—97 ∞R, 98—111 $\infty P2$, 112—116 $-4R$, 117—118 $R3$, 119 Glas.)

Fig. 89. Vertiefte Ecke des Lösungsrhomboëders $-2R$ auf der I. Prismenfläche. $+RR$ Combinationskante des Grundrhomboëders.
Fig. 90—97 Ätzfiguren auf natürlichen Protoprismenflächen des Kalkspathes, grösstentheils von Krystallen der Stufe *E*.
„ 90. Concentrirte Ameisensäure. *a* Wenige Secunden, *b* etwa 15 Secunden, *c* längere Ätzung. Vergr. 500.

Fig. 91. Concentrirte Essigsäure. Kurze Einwirkung.
„ 92. Concentrirte käufliche Salpetersäure. Vergr. 160.
„ 93. Verdünnte Salpetersäure.
„ 94. 40% Salzsäure, circa 4 Secunden. Vergr. 500.
„ 95. Concentrirte Phosphorsäure. Vergr. 500.
„ 96. 20% Phosphorsäure. Vergr. 160.
„ 97. Concentrirte Chromsäure.
„ 98. Projection des Lösungsrhomboëders $-2R$ auf die Deuteroprismenfläche. $+RR$ Combinationskante des Grundrhomboëders.

Fig. 99—111. Ätzfiguren auf den natürlichen Deuteroprismenflächen von Krystallen der Stufe *L* mit Ausnahme der Fig. 103 und 105. Sämmtliche Ätzfiguren sind so gestellt, dass sie der Deuteroprismenfläche der Fig. 98 entsprechen.

„ 99. Concentrirte Ameisensäure. Vergr. 160.
„ 100. Ebenso. Nach etwa 12 Secunden. Neigung der langen Diagonale der Ätzfiguren zur Prismenkante, etwa 27°. Vergr. 500.
„ 101. Concentrirte Ameisensäure. Vergr. 500. Verschiedene Formen von Ätzfiguren.
„ 102. Ebenso.
„ 103. 50% Ameisensäure. Künstlich angeschliffene Fläche am Spaltungsrhomboëder. *a* Vergr. 160, *b* Vergr. 500.
„ 104. Concentrirte, käufliche Essigsäure. Ätzfiguren dicht gedrängt, daher ihre Contouren nicht sicher zu ermitteln. Die Diagonale bildet mit der Prismenkante einen Winkel von 63—65°.
„ 105. Verdünnte Salpetersäure. Künstliche Fläche an einem Krystalle $-2R$ der Stufe *C*.
„ 106. Concentrirte Salpetersäure. Kurze Wirkung. *a* häufigste Figur, Vergr. 500.
„ 107. 40% Salzsäure. Vergr. 500.
„ 108. Concentrirte Phosphorsäure. *a* häufigste Form nach kurzer Einwirkung.
„ 109. Ebenso nach längerer Ätzung. *a*, *b* häufig; *c*, *d*, *e* Ätzfiguren, in welchen sich secundär stark vertiefte, verwickelte Ätzflächen gebildet haben.
„ 110. 20% Phosphorsäure.
„ 111. Concentrirte Chromsäure. *a* häufigste Form.
„ 112. *a* Projection der vertieften Seitenecke des Lösungsrhomboëders auf die Fläche von $-4R$. *b* Ätzfiguren mit concentrirter Ameisensäure nach etwa $1^1/_2$ Minuten auf einer Fläche $-4R$ der Stufe *D*. Vergr. 160.
„ 113. Ätzfiguren auf $-4R$ der Stufe *O* mit concentrirter Ameisensäure.
„ 114. Ebenso.
„ 115. Auf $-4R$ der Stufe *D* mit 20% Phosphorsäure.
„ 116. Auf $-4R$ der Stufe *D* mit 20% Salpetersäure.
„ 117. *a* Projection der vertieften Ecke des Lösungsrhomboëders auf die Fläche von $R3$. ss' scharfe Polkante von $R3$. *b* Ätzfiguren mit ver-

dünnter Salpetersäure auf der Fläche eines Krystalles der Stufe *N*. Vergr. 160.

Fig. 118. *a* Projection der vertieften Ecke des Lösungsrhomboëders auf die Fläche *R*3. *ss*' scharfe Polkante von *R*3. *b* Ätzfiguren auf der Fläche *R*3 eines Krystalles der Stufe *L* mit concentrirter Ameisensäure. Vergr. 160.

„ 119. Gruppe von Ätzfiguren auf einer Glasplatte nach kurzer Einwirkung von schmelzendem Ätzkali. Vergr. 500.

Tafel VI.

(Fig. 120—136 Aragonit, 137—139 Zinkblende, zum Theil nach Becke copirt.)

Fig. 120. Schema eines Aragonitkrystalles mit den hauptsächlichsten untersuchten Flächen. Die Flächen rechts vorn mit den Naumann'schen Symbolen bezeichnet. *aa*' Richtung der Brachyaxe, *bb*' der Makroaxe, *cc*' der Hauptaxe.

„ 121. Die muthmassliche primäre Lösungsgestalt des Aragonites ∞P, $\breve{P}\infty$.

„ 122. *A* Projection der Lösungsgestalt auf das Brachypinakoid. *aa*' Richtung der Brachyaxe, *ac* der Hauptaxe.

Ätzfiguren auf dem Brachypinakoid eines Krystalles von Horschenz nach längerer Ätzung mit concentrirter Ameisensäure. Vergr. 160.

„ 123. *A* Projection des Prismas ∞P und der Richtung der Brachydomenkante (*aa*') auf die Basis.

Ätzfiguren auf der Basis mit concentrirter Ameisensäure. *a* auf einer künstlich angeschliffenen Basis eines Krystalles von Horschenz nach längerer Ätzung. Vergr. 160. *b* und *c* auf einer natürlichen Fläche eines Krystalles von Herrengrund. *b* längere Ätzung, *c* kurze Ätzung. Vergr. 460.

„ 124. *A* Projection des Brachydomas $\breve{P}\infty$ und der Richtung der Prismenkante (*cc*') auf das Makropinakoid.

Ätzfiguren auf einem künstlich angeschliffenen Makropinakoid an einem Krystalle von Horschenz nach längerer Ätzung mit Ameisensäure. Vergr. 210.

„ 125. *A* Projection der Lösungsgestalt (Fig. 121) auf die Prismenfläche ∞P. *cc*' stumpfe Prismenkante.

Ätzfiguren auf der natürlichen Prismenfläche eines Krystalles vom Banate mit concentrirter Ameisensäure. *a* nach etwa $^3/_4$ Minuten, *b*, *c*, *d* nach längerer Ätzung, wodurch sich aus den Dreiecken secundäre Fünfecke entwickeln. Vergr. 210.

„ 126. *A* Projection der Lösungsgestalt (Fig. 121) auf die Brachydomenfläche $\breve{P}\infty$. *aa*' stumpfe Brachydomenkante.

a Ätzfiguren nach minutenlanger Ätzung mit concentrirter Ameisensäure auf der natürlichen Brachydomenfläche $\breve{P}\infty$ eines Krystalles vom Banate. Vergr. 460.

(Sämmtliche Projectionen in Fig. 122—126 sind als projicirte Hohlformen zu denken.)

Fig. 127. Lösungsgestalten auf der künstlichen Basis eines Krystalles von Horschenz nach circa halbstündiger Ätzung mit concentrirter Ameisensäure. Bei α zuerst entstehende dreiflächige Ecken, weiter nach vorne die daraus hervorgehenden dachartigen Lösungsgestalten. Vergr. 460.

„ 128. Wie 127. Gruppe grosser Lösungsgestalten. *aa'* Brachydoma, *bb'* Pyramide, *c* Makrodoma.

„ 129. Wie Fig. 127. Gruppe grosser Lösungsgestalten verschiedener Form. Links eine Combination von Brachy- und Makrodoma, darunter eine Gestalt wie in Fig. 128; rechts zwei Lösungsgestalten, bei welchen an Stelle der Makrodomenfläche zwei durch eine sehr stumpfe Kante getrennte Pyramidenflächen getreten sind.

(Fig. 127—129 sind entsprechend der Figur 123 *A* orientirt.)

„ 130. Lösungsgestalten auf der künstlichen Basis eines Krystalles von Horschenz durch Ätzen mit 50% Ameisensäure dargestellt. (Vergl. Text, pag. 811.)

„ 131. Eine Lösungsgestalt der Fig. 130 auf einer Makrodomenfläche projicirt, welche sowohl die Haupt- als Brachyaxe unter 45° schneidet.

„ 132. Lösungsgestalten der Basis mit concentrirter Ameisensäure dargestellt und von der Form der Fig. 129 rechts, auf die Makropinakoidfläche projicirt. Der Contour der Spitzen entspricht daher dem Kantenwinkel des Brachydomas (*aa'*, Fig. 128), welcher in den abgebildeten Gestalten circa 115—118° betrug.

„ 133. Lösungsgestalten mit concentrirter Ameisensäure auf der künstlichen Makropinakoidfläche eines Krystalles von Horschenz. α zuerst auftretende dreiflächige Ecken, weiter nach vorn complicirtere, daraus hervorgehende secundäre Lösungsgestalten. *mon* Kantenwinkel des Brachydomas. *a* Makropinakoid oder diesem nahestehendes Doma. *bb'* Pyramide mit langer Hauptaxe, *cc'* Pyramide.

„ 134. Lösungsgestalten auf der künstlichen Basis eines Krystalles von Horschenz mit concentrirter Phosphorsäure. Vergr. 210.

„ 135. Lösungsgestalten auf dem künstlichen Makropinakoid eines Krystalles von Horschenz mit concentrirter Phosphorsäure. Vergr. 210.

„ 136. Lösungsgestalten auf einer künstlichen Makrodomenfläche, welche Haupt- und Brachyaxe unter Winkeln von nahezu 45° schneidet, mit concentrirter Phosphorsäure. Vergr. 210. (Vergl. Text, p. 813.)

Fig. 137. Lösungsgestalt (Ätzhügel) auf einer Dodekaëderfläche der Zinkblende. Copie nach F. Becke. (Vergl. Text, pag. 819.)

„ 138. Diagramm zur Erläuterung der Ätzerscheinungen auf dem positiven und negativen Tetraëder der Zinkblende. (Vgl. Text, p. 819.)

„ 139. Projection des positiven Tetraëders auf eine Würfelfläche der Zinkblende. *aa* Tetraëderkante auf der Würfelfläche anliegend, *bb* Tetraëderkante über der Würfelfläche liegend. *c* Ätzfigur der Würfelfläche der Zinkblende. Letztere copirt nach F. Becke. (Vergl. Text, pag. 820 u. 821.)

INHALT.

	Seite
Einleitung	760
VII. Capitel. Die Ätzfiguren auf der Spaltungsfläche des Kalkspathes. Abhängigkeit der Formen von der Natur, Concentration und Temperatur der Säure	763
VIII. Capitel. Entwicklung der Ätzfiguren auf der Spaltungsfläche. Abhängigkeit der Form von der Geschwindigkeit der Entwicklung. Instantane und retardirte Ätzfiguren	770
IX. Capitel. Versuch einer Erklärung der Ätzfiguren der Spaltungsflächen. Chemische Härtecurve. Zusammenfassung der bisher gewonnenen Resultate	777
X. Capitel. Die Ätzfiguren der Basis, der Rhomboëder $-\frac{1}{2}R$ und $-2R$, der Prismen ∞R und $\infty P2$, sowie einiger anderer natürlicher Flächen des Kalkspathes	785
XI. Capitel. III. Die Lösungsflächen des Aragonites	801
XII. Capitel. Theoretische Schlussbetrachtungen und Thesen	816
Fortsetzung des Verzeichnisses der zur Untersuchung benutzten Kalkspathkrystalle	827
Tafelerklärung	828

Druckfehler in der ersten Abhandlung.

Seite 450, Zeile 6 von oben, lies isländischer statt inländischer.

„ 18 „ „ „ $-\frac{11}{4}R, R$ „ $\frac{11}{4}R$.

„ 21 „ „ „ $-\frac{11}{4}R$ „ „

Seite

v. Wroblewski, Über den Gebrauch des siedenden Sauerstoffs, Stickstoffs, Kohlenoxyds, sowie der atmosphärischen Luft als Kältemittel. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 667

Klemenčič, Experimentaluntersuchung über die Dielektricitätsconstante einiger Gase und Dämpfe. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 712

v. Ebner, Die Lösungsflächen des Kalkspathes und des Aragonites. II. Die Ätzfiguren des Kalkspathes. III. Die Lösungsflächen des Aragonites. (Mit 6 Tafeln.) [Preis: 2 fl. = 4 RMk. 760

Preis des ganzen Heftes: 5 fl. = 10 RMk.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. BAND. IV. und V. HEFT.

Jahrgang 1885. — April und Mai.

(Mit 7 Tafeln, 1 Karte und 7 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1885.

INHALT

des 4. und 5. Heftes April und Mai 1885 des XCI. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

IX. Sitzung vom 16. April 1885: Übersicht 839

v. Lang, Messung der elektromotorischen Kraft des elektrischen Lichtbogens. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 844

Exner, F., Über eine neue Methode zur Bestimmung der Grösse der Moleküle. [Preis: 22 kr. = 44 Pfg.] 850

Aulinger, Über das Verhältniss der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu dem von Hertz aufgestellten Princip der Einheit der elektrischen Kräfte. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.) 880

Oppert, Die astronomischen Angaben der assyrischen Keilinschriften. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 894

X. Sitzung vom 23. Apri 1885: Übersicht 915

Haitinger u. *Lieben*, Untersuchungen über Chelidonsäure. — II. Abhandlung. (Mit 1 Tabelle.) 919

Gläser, Über die Einwirkung des Kaliumhypermanganats auf unterschwefeligsaures Natron 969

Mertens, Zur Theorie der elliptischen Functionen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 974

Le Paige, Über die Hesse'sche Fläche der Flächen dritter Ordnung. [Preis: 8 kr. = 16 Pfg.] 981

Mahler, Astronomische Untersuchung über die in der Bibel erwähnte ägyptische Finsterniss. (Mit 1 Karte.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 987

Czermak u. *Hiecke*, Pendelversuche. (Mit 6 Tafeln.) [Preis: 1 fl. 20 kr. = 2 RMk. 40 Pfg.] 1002

XI. Sitzung vom 7. Mai 1885: Übersicht 1015

Linnemann, Verarbeitung und qualitative Zusammensetzung des Zirkons. (Mit 2 Holzschnitten.) 1019

Zikes, Über die Chlorhydrine des Butenylglycerins 1032

Horbaczewski, Über künstliche Harnsäure und Methylharnsäure. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1040

Gegenbauer, Über die ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 1047

Lippich, Über polaristrobometrische Methoden, insbesondere über Halbschattenapparate. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 1059

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. Band. IV. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

IX. SITZUNG VOM 16. APRIL 1885.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 7. April d. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, des Herrn Geheimrathes und Professors Dr. Carl Theodor v. Siebold in München.

Die Anwesenden geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt als Fortsetzung zu dem von der königl. grossbritannischen Regierung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zum Geschenk gemachten grossen Werk: „Report of the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger during the Years 1873—1876" den XI. Band. (Zoologie.)

Se. Eminenz Herr Cardinal-Erzbischof Dr. Ludwig Haynald übermittelt einen Abdruck der von ihm verfassten „Denkrede auf Dr. Eduard Fenzl".

Das w. M. Herr Hofrath L. Schmarda übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. Othmar Emil Imhof, ersten Assistenten des mikroskopischen Instituts und Privatdocenten an der Universität in Zürich, betitelt: „Faunistische Studien in 18 kleineren und grösseren österreichischen Süsswasserbecken".

Das w. M. Herr Prof. v. Barth übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium der Staatsgewerbeschule in Bielitz: „Über die Einwirkung des Kaliumhypermanganats auf unterschwefligsaures Natron", von Herrn M. Gläser.

Das c. M. Herr Hofrath V. Ritter v. Zepharovich in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Orthoklas als Drusenmineral im Basalt."

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen".

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Weiss in Prag übersendet eine Arbeit unter dem Titel: „Über gegliederte Milchsaftgefässe im Fruchtkörper von *Lactarius deliciosus*".

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann übersendet eine Abhandlung: „Über das Verhältniss der Weberschen Theorie der Elektrodynamik zu dem von Hertz aufgestellten Princip der Einheit der elektrischen Kräfte", von Herrn Ed. Aulinger, Assistent an der technischen Hochschule in Graz.

Der Secretär legt eine von Herrn Mathias Lerch, stud. math. in Berlin, eingesendete Mittheilung: „Über einen Reihenausdruck für die Anzahl der in einem beliebigen kreisförmigen Gebiete befindlichen Wurzeln einer algebraischen Gleichung" vor.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Leopold Kastner in Wien vor, welches die Überschrift trägt: I. „Ideen über ein Schutz- und Heilmittel gegen die Cholera". II. „Ideen über ein Schutzmittel gegen die Phylloxera und gegen den Wurzelpilz des Weinstockes".

Das w. M. Herr Hofrath Franz Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung: „Ein Beitrag zur Kenntniss der Fische des böhmischen Turons", von Herrn Prof. Dr. Gustav Laube.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. Theodor Ritter v. Oppolzer überreicht eine ihm von Seite des Herrn Julius Oppert in Paris für die kais. Akademie zugesandte Abhandlung, betitelt: „Die astronomischen Angaben der assyrischen Keilinschriften."

Das w. M. Herr Prof. v. Lang überreicht eine Arbeit des Herrn Prof. Dr. F. Exner in Wien, betitelt: „Über eine neue Methode zur Bestimmung der Grösse der Moleküle".

Ferner berichtet Herr Prof. v. Lang über einen Versuch, den er jüngst unternommen, um die elektromotorische Gegenkraft des elektrischen Lichtbogens direct zu messen.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem Universitätslaboratorium des Prof. Dr Přibram in Czernowitz: „Über ein neues Trinitrophenol", von Herrn Josef Zehenter.

Herr Dr. E. Mahler in Wien überreicht eine Abhandlung: „Astronomische Untersuchung über die in der Bibel erwähnte ägyptische Finsterniss".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série, tome XIV, 49e année. Nos. 8—13. Paris, 1885; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische zu Berlin. Sitzungsberichte Nr. XL—LIV. Berlin, 1884; 8°.

— kaiserliche Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XXI. Nr. 3—4, Halle a. S., 1885; 4°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents, 6e série, 5e année, 2e cahier. Paris, 1885; 8°.

Apotheker-Verein, allg. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen. XXIII. Jahrgang, Nr. 8—11. Wien, 1885; 8°.

British Museum: Catalogue of Lizards. 2. edition. Vol. I. London, 1885; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Österreichische Statistik. VII. Band, 1. Heft. Bericht über die Erhebung der Handelswerthe und Hauptergebnisse des auswärtigen Handels im Jahre 1883. Wien, 1884; gr. 4°. — VIII. Band. 1. Heft. „Statistik der Sparkassen für das Jahr 1882". 2. Heft. „Bewegung der Bevölkerung im Jahre 1883". Wien, 1885; gr. 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang IX. Nr. 16—26. Cöthen, 1885; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome C. 1er semestre. Nos. 10—13. Paris, 1885; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. VI. Jahrgang, 1885. Heft III. März. Berlin, 1885; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang Nr. 19. Berlin, 1884; 8°. — XVIII. Jahrgang Nr. 5. Berlin, 1885; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift XLVI. Jahrgang Nr. 11—15. Wien, 1885; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. X. Jahrgang, Nr. 11—15. Wien, 1885; 4°.

Johns Hopkins University: American Chemical Journal, Vol. VI. Nr. 6. Baltimore, 1885; 4°.

Journal für praktische Chemie. 1884. Nr. 21 und 22. Leipzig, 1884; 8°. 1885. Nr. 2, 3 und 4. Leipzig. 1885; 8°.

Kiew; Universitätsnachrichten. Tome XXIV. Nr. 11 und 12. Kiew. 1884; 8°.

Königsberg, Universität: Akademische Schriften. 42 Stücke 8° und 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 29e année, 3e série, tome XV, 520e livraison — Avril 1885. Paris; 4°.

Nature. Vol. XXXI. Nos. 803—806. London, 1885; 8°.

Observatory, the: A monthly Review of Astronomy. Nos. 94—96. London, 1885; 8°.

— the Adelaide and other places in South Australia and the northern territory: Meteorological Observations during the year 1882. Adelaide, 1885; Folio.

Pagenstecher, Prof.: Die Vögel Süd-Georgiens, nach der Ausbeute der deutschen Polarstation in 1882 und 1883. Hamburg, 1885; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Beiträge zur Kenntniss der Flora der Vorwelt. Band II. Die Carbon-Flora der Schatzlarer Schichten von D. Stur. Wien, 1885; gr. 4°.

Smithsonian Institution: Annual Report of the Board of Regents for the year 1882. Washington, 1884; 8°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4e série, 38e année, 1er cahier. Paris, 1885; 8°.

— mathématique des France: Bulletin. Vol. XIII. Nr. 2. Paris, 1885; 8°.

St. Petersburg, Universität, Naturforscher-Gesellschaft: Arbeiten. Vol. XII—XV. St. Petersburg. 1881—1884. Über die Stabilität der ellipsoidalen Formen des Gleichgewichts rotirender Flüssigkeiten von Ljapunov. St. Petersburg, 1884; 4°.

Verein, Nassauischer für Naturkunde: Jahrbücher. Jahrgang 37. Wiesbaden, 1884; 8°.

Weyrauch, Jacob, J. Dr.: Das Princip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer. Leipzig, 1885; 8°. — Aufgaben zur Theorie elastischer Körper. Leipzig, 1885; 8°.

Wiener Medicinische Wochenschrift. XXXV. Jahrgang Nr. 11—15. Wien, 1885; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. V. Jahrgang. 1885. 3. Heft. März. Berlin, 1885; 4°.

Messung der elektromotorischen Kraft des elektrischen Lichtbogens.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

(Mit 2 Holzschnitten.)

Der Widerstand galvanischer Elemente, von denen gleiche Exemplare zu Gebote stehen, kann bekanntlich mit der Wheatstone'schen Brücke dadurch bestimmt werden, dass man eine gleiche Anzahl derselben gegeneinander schaltet und den Widerstand dieser Combination auf die gewöhnliche Weise ermittelt. Dividirt man das gefundene Resultat durch die Anzahl der benützten Elemente, so erhält man den Widerstand eines derselben.

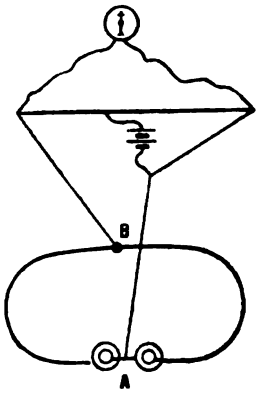
Eine andere Methode, welche auch eine gerade Anzahl gleicher Elemente erfordert, ist folgende: Sämmtliche $(2n)$ Elemente werden hintereinander geschaltet und durch einen passenden Drathwiderstand geschlossen. Auf diesem Drathe suche man nun zuerst den Punkt B, welcher dasselbe Potential hat wie der Halbirungspunkt A der Batterie auf der Verbindung des n^{ten} mit dem $(n+1)^{ten}$ Elemente. Hat man diesen Punkt B gefunden, so kann man dann auf die gewöhnliche Weise mit der Wheatstone'schen Brücke den Widerstand der Leitung zwischen den Punkten A und B bestimmen. Da zwischen A und B zwei, wenigstens näherungsweise identische Leitungen existiren, so wird der gefundene Widerstand, bei gehöriger Berücksichtigung der Zuleitungsdräthe, die Hälfte des Widerstandes der halben Batterie sein. Bei gleicher Anzahl von Elementen ist also das unmittelbare Beobachtungsresultat dieser Methode nur der vierte Theil von dem der ersten Methode.

Das Aufsuchen des Punktes B besteht natürlich darin, dass man auf dem Schliessungsdrath der Batterie den Punkt sucht,

der mit *A* verbunden keinen Strom gibt. Hiezu kann man gleich das Galvanometer der Wheatstone'schen Brücke benützen, nur darf dasselbe in diesem Falle nicht in die Brücke gelegt sein. Man kann ja bekanntlich in der ursprünglichen Wheatstone'schen Drathcombination, Messbatterie und Galvanometer vertauschen, welche Anordnung ja auch in dem Siemens'schen Universalgalvanometer befolgt ist.

Beistehender Holzschnitt, Fig. 1, gibt eine Übersicht der Schaltung nach der zweiten Methode. Bei einem mit dem Siemens'schen Universalgalvanometer und zwei kleinen Daniell'schen Elementen angestellten Versuche erhielt ich nach der ersten Methode als Gesammtwiderstand dieser zwei Elemente 0·69. Die beiden Elemente wurden hierauf hintereinander geschaltet und durch einen kurzen, dünnen Drath geschlossen; die zweite Methode ergab dann 0·17, was in der That der vierte Theil der ersten Zahl.

Fig. 1.



Nachdem ich so die Brauchbarkeit der zweiten Methode geprüft hatte, beschloss ich nach derselben die elektromotorische Gegenkraft des elektrischen Lichtbogens zu bestimmen. Edlund[1], welcher diese Erscheinung vor längerer Zeit auffand, bestimmte sie dadurch, dass er den scheinbaren Widerstand des elektrischen Lichtbogens bei verschiedener Entfernung der beiden Kohlen mass. Dieser Widerstand ist nicht wie ein gewöhnlicher proportional der Länge, sondern ist eine lineare Function derselben. Der constante Theil dieser Function kann als eine elektromotorische Gegenkraft aufgefasst werden.

Ähnliche Versuche wurden später mit Hilfe von Dynamomaschinen zuerst von Frölich[2] und in jüngster Zeit von Peukert[3] angestellt. Besonders die letzten Messungen scheinen

---

[1] Pogg. Ann. Bd. 131 (1867) S. 536. — Bd. 133 (1868) S. 353. — Bd. 134 (1868) S. 250, 337 — Bd. 139 (1870) S. 353. — Bd. 140 (1870) S. 552.

[2] Elektrot. Zeitschrift 1883, S. 150.

[3] Zeitschrift für Elektrotechnik 1885, S. 111.

sehr sorgfältig ausgeführt zu sein und gaben eine Gegenkraft von 35 Volt., welcher hohe Betrag offenbar Herrn Peukert befremdete, obwohl er mit dem Resultate meiner eigenen Messung in bester Übereinstimmung ist.

So wahrscheinlich nun die bisherigen Versuche, die Ansichten Edlund's über den Widerstand des elektrischen Lichtes machen, so bilden diese Versuche doch mehr eine indirecte Bestätigung, und es dürfte nicht ohne Interesse sein, durch den nachfolgenden Versuch auch einen directen Nachweis der elektromotorischen Gegenkraft des elektrischen Lichtes zu erhalten. Über die eigentliche Natur dieser Erscheinung gibt das Nachfolgende allerdings keinen Aufschluss.

Es wurden 58 Bunsenelemente mittlerer Grösse hintereinander geschaltet und durch zwei elektrische Lichter (L, L^1) möglichst symmetrisch geschlossen. Die beiden Lichter waren natürlich auch hintereinander geschaltet; zu denselben wurden Kohlenstäbe von 5 Mm. Durchmesser benützt. Beide Kohlen waren mittelst horizontaler Schlitten durch Schrauben verstellbar, so dass der Lichtbogen, dessen Bild mit einer Linse auf die Wand projicirt wurde, leicht regulirt werden konnte. Die Regulirung des einen Lichtes besorgte Prof. F. Exner, die des andern Dr. E. Lecher. Das gleichzeitige Brennen beider Lichter war freilich eine grosse Schwierigkeit, doch gelang es nach einigen Versuchen immerhin die beiden Lichter gleichzeitig und in gleicher Stärke für einige Secunden ohne Zischen zum Leuchten zu bringen. Die Entfernung der beiden Kohlen betrug hiebei freilich nur etwa $^1/_3$ Mm.

Das Siemens'sche Universalgalvanometer erwies sich in diesem Falle als viel zu empfindlich und wurde durch eine einfache Messbrücke mit geradem *Pt*-Drath (92 Cm. lang) ersetzt, unter Benützung einer verticalen Telegraphenbussole von Hipp. Als Messbatterie dienten sechs grössere Smee-Elemente und als Vergleichswiderstand eine Drathrolle von 4 *SE*.

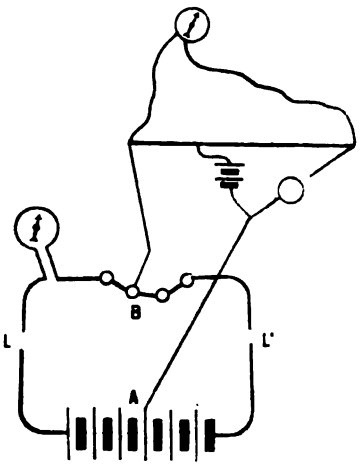
Von den beiden Punkten *A* und *B* lag der erstere natürlich auf der Verbindung des 28. mit dem 29. Elemente; der Punkt *B* dagegen an dem Ende einer Contactkurbel, welche über eine Reihe von eilf Widerständen zu $0{\cdot}1\,SE$ spielt. Diese Widerstände in den Kreis der Batterie symmetrisch eingeschaltet, waren je aus zwei Spiralen 2 Mm. dicken Kupferdrathes gebildet, und erwärmten

sich nur unbedeutend; sie reichten zur Auffindung des Punktes *B* nur hin, wenn die beiden Lichter nicht zu ungleich brannten.

Statt jedes Lichtes konnten auch Widerstände eingeschaltet werden, um dieselbe Stromstärke wie beim Leuchten der Kohlen zu erzielen. Hiezu standen nur zwei Widerstandskästen mit aufgerollten Dräthen von ungefähr 1 *Mm* Dicke zur Verfügung. Diese Dräthe erhitzten sich ungeheuer, was für den angegebenen Zweck ziemlich gleichgiltig ist. Wollte man jedoch aus den nachfolgenden Messungen nicht nur die elektromotorische Kraft des Lichtbogens, sondern auch seinen allerdings fast verschwindenden Widerstand ableiten, so müsste man den genauen Werth der eingeschalteten Widerstände kennen.

Zur Messung der Stromstärke war in der Hauptleitung eine Tangentenbussole eingeschaltet, welche durch eine Nebenschliessung ausgeschaltet werden konnte. Prof. K. Exner hatte die Güte, diese Bussole abzulesen; der Natur der Sache nach war dies auch mit grossen Schwierigkeiten verbunden, da die Nadel der Bussole meist mehr Zeit erfordert hätte, um ganz zur Ruhe zu kommen, als die Lichter constant erhalten werden konnten. Leider stand mir kein anderes Ampèremeter mit rascherer Angabe zur Verfügung. Der Holzschnitt, Fig. 2, gibt eine Übersicht der jetzigen Versuchsanordnung.

Fig. 2.



Mit den beiden Lichtern wurden nun im Ganzen folgende zwölf Messungen ausgeführt. Die erste Columne enthält die Ordnungszahl des Versuches, die zweite gibt die Stromstärke in Ampère, die dritte den beobachteten Widerstand in Centimeter. Dieser Widerstand wäre noch um den Widerstand der zwei Zuleitungsdräthe zur Brücke zu verringern und dann mit 2 zu multipliciren um den Widerstand der halben Batterie mehr dem eines Lichtes und der halben Hauptleitung zu erhalten.

8. IV 1885	Nr. 2	7·21 *A*	1·77 Ω
	3	4·27	1·62
	4	4·27	1·62
	5	4·49	1·85
	8	4·27	1·89
	9	4·14	1·70
	10	4·49	1·70
	11	8·21	1·70
	12	4·49	1·85
	13	3·46	1·77
	14	4·27	1·96
	15	4·27	2·15
	Mittel	4·33	1·82

Bei Bildung dieses Mittels wurden die Beobachtungen 2, 11 und 13 nicht berücksichtigt, welche in der Stromstärke jedesfalls fehlerhaft sind.

Zwischen diesen Beobachtungen wurden solche angestellt, wo jedes der elektrischen Lichter durch einen Widerstand ersetzt war. Natürlich wurden beide Widerstände gleichgewählt und ist ihre gemeinsame Grösse in der nachfolgenden Aufzählung der Versuche in *S E.* angegeben. Dem früher Gesagten zufolge können aber diese Zahlen wegen der Erwärmung der Dräthe zu keinen weiteren Rechnungen benützt werden.

Nr. 1	8 *SE*	3·73 *A*	6·72 Ω
6	6	5·11	5·66
7	7	4·49	6·04
16	7	4·65	6·04
17	8	4·07	6·53
18	8	4·06	7·02
19	7	4·49	6·04
Mittel		4·37	6·29

Vergleicht man die Mittel beider Versuchsreihen, für welche die Stromstärke gleich ausfällt, so sieht man, dass die beobachteten Widerstände sich um 4·47 Ω, also für eine Hälfte der Hauptleitung um 8·94 Ω unterscheiden. Soviel beträgt somit der durch

die elektromotorische Gegenkraft eines der elektrischen Lichter compensirte Widerstand. Um daher diese Kraft selbst zu finden, haben wir nur diesen Widerstand mit der Stromstärke zu multipliciren, was eine elektromotorische Kraft von $39\,V$ gibt.

Auf die absolute Grösse der letzten Zahl lege ich natürlich keinen besonderen Werth. Dazu müsste der Versuch mehr als einmal und wo möglich mit einer stärkeren Batterie angestellt werden. Ich weiss aber nicht, ob ich in nächster Zeit im Stande sein werde, den Versuch zu wiederholen. Derartige Experimente sind mir nämlich durch die ungünstigen Räumlichkeiten des physikalischen Cabinets ungeheuer erschwert. Den beschriebenen Versuch mussten wir in einem wenige Quadratmeter grossen, niedrigen, gewölbten Raum ausführen, in welchen die Stiege mündet, die nach dem Keller führt, wo die Batterie aufgestellt war. Die Salpetersäuredämpfe, sowie das zur Ventilation nöthige Öffnen der Fenster verursachten mir einen heftigen Katarrh, der mich vor einer Wiederholung des Experimentes sehr abschreckt.

Namentlich wäre die Untersuchung auch für andere Körper, statt der Kohle durchzuführen.

Über eine neue Methode zur Bestimmung der Grösse der Moleküle.

Von Prof. **Franz Exner.**

I.

Es ist bekannt, dass die Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen in Ruhe auf einander wirken, nicht allein von deren Quantität und Entfernung abhängt, sondern auch noch von der Natur des Mediums, das dieselben umgibt. Ist diese Kraft im leeren Raum gleich F, so wird sie, wenn der Raum mit irgend einem Dielektricum erfüllt ist, gleich $\frac{F}{K}$, wo K eine diesem Dielektricum eigenthümliche Constante bedeutet.

Es hat schon Faraday diese Veränderung in der Wirkung auf eine bestimmte Constitution des Dielektricums zurückgeführt, indem er dasselbe als aus leitenden Partikelchen bestehend annimmt, die aber von einander durch isolirende Zwischenschichten (den leeren Raum) getrennt sind. Die Induction, welche von den wirksamen Massen auf die kleinen leitenden Theilchen ausgeübt wird und in ihnen eine Neuvertheilung der Elektricität hervorruft, führt zu der besprochenen Änderung der Kraft. Auch zur Bestimmung der Grösse der Constante K, der sogenannten Dielektricitätsconstante des betreffenden isolirenden Mediums, hat Faraday zuerst den Weg gezeigt. Ladet man einen Condensator von bestimmter Gestalt bis zu einer bestimmten Potentialdifferenz der Belegungen, einmal wenn letztere nur durch den leeren Raum, das andere Mal wenn sie durch irgend einen Isolator getrennt sind, so nimmt derselbe zwei verschiedene Elektricitätsmengen auf: Q_1 und Q_2; dabei ist immer $Q_2 > Q_1$. Diese Ladungen sind den Dielektricitätsconstanten der Zwischen-

medien proportional und setzen wir die des leeren Raumes $=1$, so wird $K=\frac{Q_2}{Q_1}$. Auf diese einfache Weise lassen sich die betreffenden Constanten für verschiedene Körper bestimmen; sie müssen nach dem Vorstehenden alle >1 sein.

Es hat Clausius[1] den Zusammenhang zwischen der Constitution eines Isolators und dessen Dielektricitätsconstante näher erörtert und ist zu dem Resultate gekommen, dass letztere wesentlich vom Werthe der Raumerfüllung durch leitende Substanz abhängt, wobei jedoch die Voraussetzung zu Grunde liegt — und diese ist für das Folgende von Wichtigkeit — dass die leitenden Partikelchen im Isolator als kugelförmig angesehen werden können. Diese Voraussetzung als statthaft angenommen, gelangt man zu dem Ausdrucke:

$$K=\frac{1+2v}{1-v}$$

wo v jenen Bruchtheil des ganzen vom Dielektricum eingenommenen Raumes bezeichnet, der durch leitende Materie occupirt ist. Obigen Ausdruck können wir auch schreiben:

$$v=\frac{K-1}{K+2},^2$$

Gehen wir nun zu dem speciellen Fall eines gasförmigen Dielektricums über. Für ein solches werden wir die kleinsten leitenden Partikelchen als kugelförmig ansehen können, ohne damit über den Rahmen der üblichen Annahmen hinauszugehen; die isolirenden Zwischenschichten sind hier durch den leeren Raum gebildet und die obige Grösse v gibt somit das Verhältniss des von der Substanz des Gases thatsächlich eingenommenen Raumes zu dessen scheinbaren Volumen.

---

[1] Die mechanische Behandlung der Elektricität. III. Abschnitt.

[2] Der Bruch $\frac{K+2}{K-1}$ drückt auch, wie Boltzmann (Sitzungsber. der Wiener Akademie, Bd. 70. 1874) gezeigt hat, aus, um wie vielmal eine leitende Kugel stärker von irgend einer elektrischen Ladung angezogen wird, als eine gleichgrosse dielektrische unter gleichen Umständen, wenn K die Dielektricitätsconstante des betreffenden Isolators ist.

In seiner epochemachenden Arbeit „zur Grösse der Luftmoleküle“ hat Loschmidt[1] diese Grösse v zum ersten Male dazu benützt, um aus ihr einen Schluss auf die Dimensionen der Moleküle zu ziehen; er hat ihr den Namen „Condensationscoëfficient“ gegeben und bestimmte sie aus dem Volumen, welches die Gase im tropfbar flüssigen Zustande zeigen, gegenüber dem im gasförmigen Zustande ihnen zukommenden. Eine derartige Bestimmung liefert freilich für v nur einen oberen Grenzwerth, da ja auch in flüssigem Zustande der Raum keineswegs vollständig von Materie erfüllt ist, doch war dieser Umstand für die damalige erste und grundlegende Bestimmung der Grössenordnung des Molekules nicht von Belang.

Im Vorstehenden ist nun der Weg gezeigt, diese Grösse v direct auf elektrischem Wege an jeder Substanz im gasförmigen Zustande zu bestimmen; es ist also nicht nöthig, dazu Messungen am verflüssigten Gase zu machen, auch erhält man für v nicht einen Grenzwerth, sondern dessen wirklichen Werth, insolange die kleinsten Partikelchen als Kugeln angesehen werden können.

Die Relation, welche die Grösse v mit dem Molekuldurchmesser verbindet und welche auch von Loschmidt in seiner oben erwähnten Arbeit zur Auswerthung des letzteren verwendet wurde, findet ihren Ausdruck in der folgenden von der Gastheorie gelieferten Gleichung:

$$\sigma = 6\sqrt{2} \cdot v \cdot \lambda$$

Hier bedeutet σ den Molekuldurchmesser, v den obigen Coëfficienten und λ die mittlere Weglänge. Leider sind die Werthe von λ in vielen Fällen gegenwärtig noch nicht mit der wünschenswerthen Genauigkeit bestimmt, jedenfalls dürften die aus den Diffusionsversuchen abgeleiteten mehr Vertrauen verdienen, als die den Reibungs- und Transpirationsversuchen entstammenden, welch' letztere durchwegs zu gross bestimmt zu sein scheinen.

Es sind daher im Folgenden auch der Berechnung von σ, wo es möglich ist, die aus den Diffusionsversuchen stammenden Werthe von λ zu Grunde gelegt.

---

[1] Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 52. 1865.

Bevor ich an die Mittheilung der betreffenden Tabellen gehe, muss ich noch auf Folgendes aufmerksam machen. Es bietet zwar die experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstante bei Gasen keine besonderen Schwierigkeiten dar, allein es eröffnet sich uns noch ein anderer und einfacherer Weg zur Bestimmung von v. Wie nämlich aus der Maxwell'schen Theorie des Lichtes hervorgeht, ist die Dielektricitätsconstante eines Isolators identisch mit dem Quadrate seines Brechungsexponenten n, also $K = n^2$, eine Beziehung, die, soweit sie bisher experimental verfolgt ist, im Grossen und Ganzen zutrifft. Speciell für Gase wurde sie durch die bekannten Untersuchungen Boltzmann's[1] entschieden bestätigt, desgleichen für die festen Isolatoren[2], wie Paraffin, Schwefel etc. Wenn wir zunächst bei gasförmigen Körpern stehen bleiben, so können wir also unbedingt an Stelle von K den Werth n^2 einführen, so dass unsere Formel für v übergeht in:

$$v = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

Der Werth der vorliegenden Methode scheint mir demnach hauptsächlich in dem Umstande zu liegen, dass zur Bestimmung von σ ausser dem bekannten λ nur noch der Brechungsexponent n erforderlich ist, eine Grösse, die für die meisten Gase schon mit grosser Genauigkeit bekannt, jedenfalls aber leicht und exact am gasförmigen Medium bestimmbar ist. Wir sind dadurch in die Lage gesetzt, die Grösse σ für alle Gase, für die λ bekannt ist, anzugeben, ohne dass wir an specielle Eigenthümlichkeiten derselben, wie z. B. leichte Verflüssigung, gebunden wären; dadurch wird aber eine wesentliche Verbreiterung des der Untersuchung zugänglichen Gebietes geschaffen.

In der folgenden Tabelle gebe ich zunächst eine kurze Zusammenstellung der Werthe von v für einige Gase, und zwar unter A, die aus der Dichtigkeit im gasförmigen und flüssigen Zustande berechneten Condensationscoëfficienten und unter B dieselben Grössen nach der Formel $v = \frac{K-1}{K+2}$ oder $v = \frac{n^2-1}{n^2+2}$. Die Werthe unter A sind von O. E. Meyer[3] berechnet.

[1] Sitzungsber. der Wiener Akademie. Bd. 69. 1874.

[2] Sitzungsber. der Wiener Akademie. Bd. 67. 1873.

[3] Theorie der Gase. p. 226.

Tabelle I.

	A	*B*
H_2O	0·00081	0·00017
NH_3	0·00119	0·00026
H_2S	0·00168	0·00043
CO_2	0·00198	0·00031
N_2O	0·00204	0·00033
Cl_2	0·00238	0·00051
C_2N_2	0·00270	0·00056

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die Condensationscoëfficienten, auf die übliche Weise bestimmt, um das 4—5fache zu gross sein können, und in demselben Masse werden dann auch die Dimensionen der Molekülе zu gross gefunden.

In der folgenden Tabelle II sind angegeben unter *A* die mittleren Weglängen λ, und zwar wo es möglich war die Zahlen, welche Stefan aus den Diffusionsversuchen von Loschmidt berechnete, sonst die Zahlen, welche O. E. Meyer[1] als Resultate der Transpirationsversuche Graham's angibt; unter *B* die Werthe von v, und zwar für jene Gase, für welche K von Boltzmann[2] bestimmt wurde, nach der Formel $v = \frac{K-1}{K+2}$ für die übrigen nach $v = \frac{n^2-1}{n^2+2}$, wobei für n die Werthe von Dulong[3] für 0° und 760 Mm. Druck zu Grunde gelegt wurden. Colonne *C* enthält die daraus berechneten Molekülдurchmesser σ. Zur Vergleichung sind noch für jene Gase, bei welchen σ aus λ (Diffusion) berechnet wurde, unter *D* die Werthe von σ aus λ (Reibung) beigesetzt.

---

[1] Theorie der Gase. p. 142.

[2] L. c.

[3] Ann. d. Ch. et Ph. XXXI.

Tabelle II.

Gas	*A* λ aus Diffusion $=10^{-7}$ mal	*B* $v=\frac{K-1}{K+2}$ $=10^{-5}$ mal	*C* σ in Cm. $=10^{-9}$ mal	*D* σ in Cm. $=10^{-9}$ mal
Luft	71	17	10	14
CO_2	50	31	13	17
H_2	139	8·7	10	14
CO	65	23	13	19
N_2O	42	33	12	19
	λ aus Reibung			
CH_4	83	31	21	
C_2H_4	56	44	21	
		$v=\frac{n^2-1}{n^2+2}$		
NH_3	71	26	16	
H_2O	63	17	9	
N_2	97	20	17	
NO	94	20	16	
O_2	104	18	16	
H_2S	60	43	22	
HCl	70	30	18	
C_2N_2	40	56	19	
SO_2	46	44	17	
Cl_2	45	51	19	

Auffallend ist bei Durchsicht dieser Tabelle, dass die Werthe von σ nicht sehr verschieden sind, so dass für alle betrachteten Gase ziemlich die gleiche Molekülargrösse resultirt; eine Ausnahme scheint nur Wasserdampf zu machen, doch ist dabei zu bemerken, dass die Zahl für λ_{H_2O} in vorstehender Tabelle

die einzige ist, die — von den aus Reibungsversuchen gewonnenen — nicht von Graham stammt, sondern von Kundt und Warburg,[1] also mit den übrigen eigentlich nicht vergleichbar ist.[2] Guglielmo[3] findet aus Diffusionsversuchen für dieselbe Grösse statt $63 \cdot 10^{-7}$ die Zahl $89 \cdot 10^{-7}$, woraus sich für σ der Werth $13 \cdot 10^{-7}$ ergeben würde.

Im Allgemeinen sind die Abweichungen in der Bestimmung der λ ziemlich bedeutende, je nachdem dieselben aus Diffusions- oder Reibungsversuchen hergeleitet sind; damit variirt auch der Werth von σ. Da jetzt allgemein die Bestimmungen der mittleren Weglängen aus den Diffusionsversuchen als die zuverlässigeren betrachtet werden, so müssen wir auch für die σ die kleineren Werthe als die wahrscheinlicheren bezeichnen.

Es ist von Interesse die in Tabelle II für die σ gegebenen Werthe mit den bisher bekannten Bestimmungen zu vergleichen; leider basiren alle angewendeten Methoden auf particulären Eigenschaften der Körper, so dass nach jeder derselben meist nur wenige, oft nur einzelne Substanzen untersucht werden konnten. Soweit mir derartige Bestimmungen bekannt sind — abgesehen von den älteren Methoden, die nur sehr hoch gelegene Grenzwerthe liefern — theile ich dieselben in der folgenden Tabelle mit den hier gewonnenen zusammengestellt mit. Die Einheit ist überall das Centimeter.

---

[1] Pogg. Ann. Bd. 155.

[2] Herr Hofrath Stefan hatte die Güte mir mitzutheilen, dass aus einer neuerlichen Berechnung von Diffusionsversuchen seinerseits für λH_2O der Werth $62 \cdot 10^{-7}$ sich ergibt; der in der Tabelle aufgeführte Werth $9 \cdot 10^{-9}$ für σ würde also einem λ (Diffusion) entsprechen und sich den übrigen aus Diffusionsversuchen abgeleiteten σ anschliessen.

[3] Atti della R. Acc. Tor. XVIII. (1882) und Rep. d. Ph. XIX. p. 568.

Tabelle III.

Substanz	Faraday[1]	Loschmidt[2]	O. E. Meyer[3]	W. Thomson[4]	O. E. Meyer[5]	V. d. Waals[6]	Rühlmann[7]	Hodges[8]	Exner
Au	$\sigma < 2 \cdot 10^{-8}$	—	—	—	—	—	—	—	—
Luft	—	$67 \cdot 10^{-9}$	—	—	$42 \cdot 10^{-9}$	$30 \cdot 10^{-9}$	—	—	$10 \cdot 10^{-9}$
H_2O	—	—	$44 \cdot 10^{-9}$	$> 10^{-8}$	—	—	—	10^{-8}	$9 \cdot 10^{-9}$
NH_3	—	—	$45 \cdot 10^{-9}$	—	—	—	—	—	$16 \cdot 10^{-9}$
H_2S	—	—	$89 \cdot 10^{-9}$	—	—	—	—	—	$22 \cdot 10^{-9}$
CO_2	—	—	$114 \cdot 10^{-9}$	—	$6 \cdot 10^{-9}$	$18 \cdot 10^{-9}$	$16 \cdot 10^{-9}$	—	$13 \cdot 10^{-9}$
N_2O	—	—	$118 \cdot 10^{-9}$	—	—	—	—	—	$12 \cdot 10^{-9}$
C_2N_2	—	—	$96 \cdot 10^{-9}$	—	—	—	—	—	$19 \cdot 10^{-9}$
SO_2	—	—	$80 \cdot 10^{-9}$	—	—	—	—	—	$17 \cdot 10^{-9}$
Cl_2	—	—	$96 \cdot 10^{-9}$	—	—	—	—	—	$19 \cdot 10^{-9}$
Zn_1Cu	—	—	—	$> 10^{-9}$	—	—	—	—	—
N_2	—	—	—	—	$26 \cdot 10^{-9}$	—	$34 \cdot 10^{-9}$	—	$17 \cdot 10^{-9}$
H_2	—	—	—	—	$66 \cdot 10^{-9}$	$14 \cdot 10^{-9}$	$41 \cdot 10^{-9}$	—	$10 \cdot 10^{-9}$

[1] Pogg. Ann. Bd. 101. 1857.

[2] Sitzungsber. der Wiener Akademie. Bd. 52. 1865.

[3] Theorie der Gase. Nach Loschmidt's Methode aus den Condensationscoëfficienten berechnet.

[4] Vortrag in d. R. Inst. of Gr. Br. 1883. Und Rep. d. Ph. Bd. 21. p. 182.

[5] Theorie der Gase. Aus den Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze berechnet.

[6] Aus der Veränderlichkeit der Ausdehnungscoëfficienten berechnet.

[7] Handbuch d. mech. Wärmetheorie II; aus den Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze berechnet.

[8] Sill J. XVIII. p. 135. Aus der Verdampfungswärme berechnet.

Nach dieser Zusammenstellung kann es kaum mehr zweifelhaft sein, dass man gegenwärtig im Stande ist, die Grössenordnung der Molekülldurchmesser anzugeben; dieselbe wäre in Centimetern gleich 10^{-8}.

Aus den in Tabelle II unter *B* mitgetheilten Zahlen für die Raumerfüllung v in Gasen lassen sich auch die entsprechenden Verhältnisszahlen für die einzelnen Atome der Constituenten ableiten. Um die Zahlen möglichst zu vervollständigen, habe ich noch die Grösse v für Schwefel-, Phosphor- und Quecksilberdampf nach den Berechnungsexponenten-Bestimmungen von Le Roux[1] berechnet. Es ergibt sich

Tabelle IV.

Substanz	n	$v=\frac{n^2-1}{n^2+2}$
S_4	1·00163	0·00108
P_4	1·00136	0·00091
Hg	1·00056	0·00037

Zieht man diese Substanzen bei, so erhält man für die relative Raumerfüllung φ durch die Atome folgende Zahlen:

Tabelle V.

Substanz	φ	Loschmidt
H	4·4	3·5
N	10	12
O	9	11
Cl	25	22·8
S	27	26
P	23	—
Hg	37	—
C (aus CO—O)	14	14

[1] Ann. de Ch. et Ph. (3) LXI.

Diese der Beobachtung direct entnommenen Zahlen stimmen gut mit den von Loschmidt nach dem Vorgange Kopp's seinerzeit aufgestellten und in der beigesetzten Columne angeführten.

Man kann nun die Werthe von v für die übrigen in Tabelle II aufgezählten Gase aus den vorstehenden Zahlen für die Constituenten berechnen und kommt so, wie die folgende Tabelle zeigt, zu einer guten Übereinstimmung mit den direct beobachteten Werthen.

Tabelle VI.

Substanz	v. beobachtet	v. berechnet
Luft	0·00017	0·00019
CO_2	31	32
N_2O	33	34
CH_4	31	32
C_2H_4	44	45
NH_3	26	23
H_2O	17	18
NO	20	19
H_2S	43	36
HCl	30	29
C_2N_2	56	48
SO_2	44	45

Bedeutende Differenzen ergeben sich nur bei H_2S und C_2N_2; ob dieselben auf Beobachtungsfehler bei Bestimmung der Brechungsexponenten zurückzuführen sind, oder ob sie der Wirklichkeit entsprechen, muss dahingestellt bleiben. Wäre letzteres der Fall, so wird man vielleicht im Laufe der Zeit gerade aus solchen Differenzen am ersten einen Schluss auf die Constitution der betreffenden Molekule ziehen können.

Aus den Loschmidt'schen Zahlen in Tabelle V hat O. E. Meyer[1] die Molekularvolumina w für die übrigen Gase berechnet und ich stelle die so erhaltenen Zahlen in der folgenden Tabelle mit den beobachteten Grössen v aus Tabelle II zusammen.

Nach dem Gesetze Avogadro's sind letztere Zahlen den Molecularvolumen proportional.

[1] Theorie der Gase. p. 220.

Tabelle VII.

Substanz	$v.10^{-5}$	w
Luft	17	23
CO_2	31	35
H_2	8·7	7
CO	23	25
N_2O	33	35
CH_4	31	28
C_2H_4	44	42
NH_3	26	22·5
H_2O	17	18
N_2	20	24
NO	20	23
O_2	18	21
H_2S	48	38
HCl	30	26·3
C_2N_2	56	56
SO_2	44	48
Cl_2	51	45·6

Die Übereinstimmung der beiden Reihen muss im Ganzen als um so befriedigender bezeichnet werden, als die Werthe von v, jedes für sich ganz unabhängig von den übrigen das Resultat einer Beobachtung ist; auch hier zeigt sich bei H_2S wieder die grösste Differenz, so dass der Gedanke naheliegt, dass der Brechungsexponent desselben mit einem Fehler behaftet ist.

II.

Es ist auffallend, dass die Dielektricitätsconstanten isolirender Körper und damit auch deren Brechungsexponenten zwischen verhältnissmässig engen Grenzen eingeschlossen sind. Die untere Grenze bildet die Einheit und Werthe über 2 für Brechungsexponenten oder über 4 für Dielektricitätsconstanten gehören

schon zu den Seltenheiten; dann aber erfolgt plötzlich ein Sprung, die Dielektricitätsconstante wird unendlich gross und der Brechungsexponent nimmt unbestimmbare Werthe an, wir stehen an der Grenze zwischen Isolatoren und Leitern. Wenn wir an dem Zusammenhange zwischen Raumerfüllung und Dielektricitätsconstante festhalten, so gibt es, glaube ich, nur eine einzige physikalische Deutung für diesen plötzlichen Sprung, obgleich es dahingestellt bleiben muss, ob dieselbe auch vom Standpunkte des Chemikers aus acceptabel erscheint.

Die Eingangs erwähnte Relation zwischen Raumerfüllung und Dielektricitätsconstante hat nur Giltigkeit, so lange man die kleinen leitenden Partikelchen als von einander isolirt und als kugelförmig betrachten darf; diese Bedingung ist aber wahrscheinlich nur in den seltensten Fällen, wenn überhaupt je erfüllt. Es fragt sich nur, wie weit eine Abweichung von der Kugelform für die vorstehenden Betrachtungen von Belang sein kann. Da wir über die Form der kleinsten Theilchen gar nichts wissen, so hat eine speciellere Erörterung dieser Frage vorläufig noch kein Interesse, doch lässt sich nach den Inductionserscheinungen im Allgemeinen jedenfalls voraussagen, dass der Einfluss der Form kein wesentlicher sein wird, so lange dieselbe nicht zu sehr von der Kugelgestalt abweicht. Hätte man es also z. B. mit Würfeln, Oktaëdern, Tetraëdern u. dgl. zu thun, so würde der Einfluss vielleicht noch kaum oder gar nicht bemerkbar sein; anders aber, wenn in der Grundform eine Dimension besonders vorherrscht, wie z. B. bei nadelförmigen Prismen u. dgl. Hier müsste der Fehler ein sehr bedeutender sein, denn die Grösse der Induction richtet sich nach der grössten Dimension des Körperchens, und ein solches Prisma in die Richtung der Kraftlinie gebracht, würde fast so wirken wie eine Vollkugel, deren Durchmesser gleich der Längsausdehnung des Prisma ist.

Die aus unserer Formel berechnete Grösse ν würde dann viel zu gross gefunden und man kann allgemein sagen, dass die berechnete Raumerfüllung immer eine obere Grenze ist, denn sie gibt eigentlich das Volumen der Kugel, die das Partikelchen einhüllt, respective die Summe aller dieser Elementarkugeln. Dieser Umstand ist für die weiteren Folgerungen noch von Wichtigkeit.

Was nun den Unterschied zwischen Isolatoren und Leitern, respective den plötzlichen Sprung der Dielektricitätsconstante in's Unendliche anlangt, so wäre darüber Folgendes zu bemerken. Wir gelangen nach dem Vorgange Faraday's zu einer ganz befriedigenden Erklärung des Verhaltens der Isolatoren, wenn wir annehmen, dass deren kleinste Theilchen so gut aus leitender Materie bestehen, wie die der Metalle, dass dieselben aber durch den leeren Raum von einander isolirt seien, und wenn wir weiter annehmen, dass dieselben angenähert die Kugelgestalt haben und dass sie angenähert gleichmässig im Raume vertheilt sind. Denken wir uns aber nun die letztere Bedingung nicht erfüllt, denken wir uns z. B. die Moleküle kettenförmig aneinandergereiht, durch grössere oder geringere Strecken, oder zu einem Raumgitter vereinigt, so muss eine solche Anordnung der Materie in elektrischer Beziehung wesentlich anders wirken. Die Induction durch einen derartig von einem Gitter occupirten Raum hindurch geht bekanntlich gerade so vor sich, als wäre der Raum vollständig mit leitender Substanz erfüllt, d. h. die Dielektricitätsconstante desselben wird unendlich gross. Zur Erzielung dieser Wirkung ist aber die Annahme gar nicht einmal nothwendig, dass das Gitter durchaus leitend sei, es genügt, wenn die einzelnen leitenden Theile desselben nach einer Richtung ausserordentlich nahe aneinander zu liegen kommen, jedenfalls viel näher als bei gleichförmiger Vertheilung im Raume, wie bei den Isolatoren. Eine derartige Anordnung der Materie würde also das dielektrische Verhalten der Leiter erklären. Das Criterium des Metalles wäre demnach nicht an die Substanz des Atoms, auch nicht an den Charakter des Moleküls gebunden, sondern an den Charakter der Molekülverkettung zur sichtbaren Materie. Diese Ansicht kann selbstverständlich nicht darauf Anspruch machen, als der wirkliche Ausdruck der Thatsachen zu gelten, sie scheint mir nur eine Möglichkeit zu bieten, über diesen schwierigen Punkt hinwegzukommen und es bleibt immer fraglich, ob sie auch in anderer Hinsicht, namentlich in chemischer, befriedigt.

Wenn wir bei gasförmigen Medien, also bei den besten Isolatoren stehen bleiben, so werden wir unsere Formel für die Raumerfüllung v insolange richtig anwenden können, als die

Formen der kleinsten Theilchen nicht zu sehr von der Kugelgestalt abweichen. Aus der Grösse v ergibt sich aber eine sehr wichtige und so viel ich weiss, bisher nicht beachtete Constante, nämlich das wahre specifische Gewicht der Substanzen, denn v drückt denjenigen Bruchtheil eines Cubikcentimeters aus, der von der Materie des Gases wirklich occupirt ist, also das thatsächliche Volumen desselben, durch dessen Division in die Dichte oder in das gewöhnliche specifische Gewicht wie eben das wahre specifische Gewicht erhalten.

In der folgenden Tabelle sind die betreffenden Werthe für die untersuchten Gase zusammengestellt, indem für v die Werthe aus Tabelle II entnommen sind; die specifischen Gewichte der Gase sind in Grammen pro Cubikcentimeter angegeben und die wahren specifischen Gewichte auf $H_2O = 1$ bezogen, drücken also gleichfalls in Grammen das Gewicht der Substanz pro Cubikcentimeter aus.

Tabelle VIII.

	Substanz	Gewicht in Gm. pro 1 Ccm. $= 10^{-5}$mal	$v = 10^{-5}$mal	Wahres spec. Gewicht $H_2O = 1$	Wahres spec. Gewicht berechnet
A.	H_2	8·9	8·7	1·02	—
B.	CH_4	72	31	2·32	2·26
	C_2H_4	126	44	2·86	2·74
	NH_3	76	26	2·92	3·28
	SH_2	152	43	3·54	4·25
	OH_2	80	17	4·71	4·50
	ClH	162	30	5·40	5·47
C.	Luft	129	17	7·58	—
	CO	125	23	5·44	—
	CO_2	197	31	6·36	6·12
	NO	134	20	6·70	7·05
	N_2O	196	33	6·00	6·78
	Cl_2	319	51	6·26	—
	S_4	575	108	5·32	—
	P_4	561	91	6·16	—
	N_2	126	20	6·30	—
	O_2	142	18	7·89	—
	C_2N_2	233	56	4·16	4·86
	SO_2	290	44	6·59	6·35
D.	Hg	900	37	24·32	—

In dieser Tabelle gibt die vorletzte Columne die wahren specifischen Gewichte der untersuchten Substanzen an; dieselben zerfallen augenscheinlich in vier Gruppen, deren erste (*A*) durch den Wasserstoff gebildet wird. Dieser hat von allen Körpern das geringste wahre specifische Gewicht; es wiegt ein Cubikcentimeter, ganz mit Wasserstoffsubstanz erfüllt, fast genau 1 Grm., also soviel wie das gleiche Volumen Wassers.

Die zweite Gruppe (*B*) enthält die Verbindungen des Wasserstoffes und man bemerkt, dass letzterer sein geringes specifisches Gewicht in dieselben überträgt, denn ihre Dichte ist um so geringer, je beträchtlicher ihr Gehalt an Wasserstoff ist. Die dritte Gruppe (*C*) wird gebildet durch C, S_4, P_4, Cl_2, N_2, O_2 und deren Verbindungen mit einander; sie zeigt eine auffallende Constanz der specifischen Gewichte, die um den ungefähren Mittelwerth $= 6$ schwanken.

Die vierte Gruppe (*D*) endlich enthält nur Quecksilber mit dem hohen Werthe 24·32; da das gewöhnliche specifische Gewicht desselben gleich 13·6 ist, so geht daraus hervor, dass das scheinbare Volumen des Quecksilbers unter gewöhnlichen Umständen schon etwas mehr als bis zur Hälfte von Materie occupirt ist, was eine viel dichtere Raumerfüllung bedeutet als bei anderen Substanzen beobachtet werden kann, wo dieselbe meist zwischen den Werthen $\frac{1}{8} - \frac{1}{3}$ bei festen Körpern und zwischen $\frac{1}{11} - \frac{1}{6}$ bei Flüssigkeiten schwankt. Es wäre wohl denkbar, dass die besonderen physikalischen Eigenschaften des flüssigen Quecksilbers zum Theil wenigstens in dieser dichten Raumerfüllung ihren Grund hätten. Es erscheint sehr wünschenswerth, auch von den übrigen Grundstoffen die wahren specifischen Gewichte zu kennen, was sich durch eine Bestimmung der Brechungsexponenten und Dichte ihrer Dämpfe erzielen liesse. Ich beabsichtige, eine derartige Untersuchung auszuführen, und hoffe, dass sich daraus weitere Schlüsse über die Gruppirung der Grundstoffe werden ziehen lassen. Auf einen Umstand möchte ich hier noch aufmerksam machen: es ist schon vielfach von der Einheit der Materie gesprochen worden, also von der Identität der sogenannten Grundstoffe der Substanz nach, und man hat es stets als ein grosses Hinderniss bei Verfolgung dieser Ansicht empfunden,

dass die specifischen Gewichte der Körper so sehr verschieden sind, denn dieselben variiren von 0·000088 bei Wasserstoff bis ungefähr 21 bei Platin, d. h. um mehr als das 200.000fache, oder um mehr als das 130.000fache zwischen Wasserstoff Quecksilber. Geht man aber auf die wahren specifischen Gewichte zurück, so erscheint dieses Multiplum schon auf den Werth 24 reducirt und würde sich in Bezug auf Wasserstoff und Platin ungefähr auf 45 belaufen; denn so gross wäre das wahre specifische Gewicht des Platins, wenn wir dessen Brechungsexponenten gleich 1·9 setzen[1] und unter der allerdings sehr fraglichen Voraussetzung, dass man unsere Betrachtungsweise auch noch auf Metalle anwenden darf. Der Bestimmung des wahren specifischen Gewichtes durch die Raumerfüllung v liegt aber noch die Voraussetzung zu Grunde, dass die den Raum erfüllenden Partikelchen kugelförmig seien. Wie wir sahen, wird der Fehler in der Bestimmung von v um so beträchtlicher, je mehr dieselben von der Kugelgestalt abweichen und zwar wird dann v immer zu gross und somit das wahre specifische Gewicht zu klein gefunden. Nehmen wir aber — die Einheit der Materie vorausgesetzt — das constituirende Wasserstoffatom nicht als kugelförmig an, sondern als prismatisch von etwa drei- bis vierfacher Höhe des Durchmessers und setzen voraus, dass die Atome der übrigen Substanzen sich als Conglomerate von solchen Prismen mehr und mehr der Kugelform nähern, so erklären sich leicht die noch vorhandenen Unterschiede der beobachteten wahren specifischen Gewichte.[2] Da wir aus mechanischen Gründen gezwungen sind, die letzten Constituenten als kugelförmig anzusehen, so müssten wir noch die weitere Annahme hinzufügen, dass das Wasserstoffatom aus zahlreichen kugelförmigen Theilchen — sagen wir dem Äther — gebildet wäre. Der Vortheil der hier dargelegten Ansicht liegt darin, dass wir zur Erklärung der Differenzen in

---

[1] Nach Quincke.

[2] Es ist nicht nöthig, gerade den Wasserstoff als ursprünglichen Constituenten zu betrachten, man könnte auch von jedem anderen Körper ausgehen, indem die grösseren oder geringeren specifischen Gewichte sich durch eine mehr oder minder günstige Raumerfüllung erklären; so lange jedoch das Atomvolumen des Wasserstoffes das kleinste unter den bekannten bleibt, wird man auch am passendsten von diesem ausgehen.

den specifischen Gewichten nicht genöthigt sind, auf eine Verdichtung der Urmaterie zurückzugreifen, sondern dass wir lediglich durch die Annahme einer geänderten Anordnung der constituirenden Partikelchen den Thatsachen gerecht werden. Auch würde dadurch vielleicht das Auftreten zahlreicher Spectrallinien in den Spectren selbst einatomiger Gase, wie des Quecksilbers, dem Verständnisse näher gerückt werden.

Aus den in Tabelle VIII mitgetheilten wahren specifischen Gewichten kann man dieselben für die einzelnen Constituenten entnehmen, und zwar für H_2, S_4, P_4, Cl_2, N_2, O_2 und Hg direct und für *C* aus einer der Verbindungen, zum Beispiel aus CO. In der folgenden Tabelle sind diese Werthe mit den Zahlen φ der Tabelle V, welche die relativen Volumina der Atome angeben, zusammengestellt.

Tabelle IX.

Substanz		φ	Wahres spec. Gewicht $H_2O = 1$
A.	H	4·4	1·02
C.	(aus CO) C	14	3·84
	(aus Diamant) C	—	5·58
	S	27	5·32
	P	23	6·16
	Cl	25	6·26
	N	10	6·30
	O	9	7·89
D.	Hg	37	24·32

Kohlenstoff zeigt, aus gasförmigen Verbindungen berechnet, ein viel niedrigeres specifisches Gewicht, wie als Diamant; letzterer mit der Dichte 3·50 und dem Brechungsexponenten $n = 2 \cdot 46$ liefert für das wahre specifische Gewicht den Werth 5·58, wodurch auch der Kohlenstoff sich der Gruppe *C* anreiht. Es scheint also die Raumerfüllung durch Kohlenstoff sich im

Diamanten mehr der Kugelform zu nähern, als in den gasförmigen Verbindungen.

Aus den Werthen der vorstehenden Tabelle lassen sich die wahren specifischen Gewichte der Verbindungen berechnen und mit den der directen Beobachtung entnommenen vergleichen; die Berechnung muss natürlich unter Rücksichtnahme auf die Atomvolumina auf folgende Weise geschehen: bezeichnen $n_1 n_2 \ldots$ die Anzahl der Atome einer Substanz im Molekül, dessen wahres specifisches Gewicht S berechnet werden soll und $\varphi_1 \varphi_2 \ldots$ die Atomvolumina, sowie $s_1 s_2 \ldots$ die wahren specifischen Gewichte der Constituenten, so ist $S = \frac{n_1\varphi_1 s_1 + n_2\varphi_2 s_2 + \ldots}{n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 + \ldots}$. Auf diese Art wurden die in Tabelle VIII, letzte Colonne unter „berechnet“ aufgeführten Zahlen für die wahren specifischen Gewichte der Verbindungen gewonnen.

Auch hier zeigt H_2S wieder eine grössere Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung, als alle anderen Wasserstoffverbindungen, was die früher gelegentlich der Tabellen VI und VII ausgesprochene Vermuthung bestärkt, dass für H_2S der Werth r zu gross und somit das wahre specifische Gewicht zu klein ermittelt ist. Ausserdem zeigen noch die Verbindungen des Stickstoffs beträchtliche Differenzen, und zwar durchgehends in dem Sinne, dass die aus den Constanten der Verbindungen entnommenen Werthe kleiner sind, als die aus den Constituenten abgeleiteten; es ist bei diesen Verbindungen also die Raumerfüllung eine ungünstigere, d. h. weniger der Kugelform sich anschliessende als bei den Constituenten.

Es ist nicht ohne Interesse, die wahren specifischen Gewichte der Substanzen, wie sie sich aus dem Vorangegangenen ergeben, mit den Dichten der verflüssigten Gase zu vergleichen, weil sich daraus ein Masstab für die Raumerfüllung in letzteren ergibt; ich stelle die Zahlen, so weit ich solche auffinden konnte, in der folgenden Tabelle zusammen.

Tabelle X.

Substanz	Wahres spec. Gewicht $H_2O = 1$	Specifisches Gewicht in flüss. Zustande
H_2	1·02	0·6—0·88[1]
O_2	7·89	0·9[2]
Cl_2	6·26	1·33[3]
H_2O	4·71	1·00
SO_2	6·59	1·36[4]
C_2N_2	4·16	0·87[3]
N_2O	6·00	0·87[4]
CO_2	6·36	0 86[4]
Fest „	—	1·94[5]
HCl	5·40	0·85[6]
NH_3	2·92	0·62[4]
C_2H_4	2·86	0·36[7]
H_2S	3·54	0·91[7]

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass bei den verflüssigten Gasen stets noch ein beträchtlicher Theil des scheinbaren Volumens, drei Viertel bis acht Neuntel desselben, von Materie frei ist, selbst die feste Kohlensäure füllt in gepresstem Zustande nur ein Drittel des von ihr eingenommenen Raumes wirklich aus. Die relativ grösste Verdichtung zeigt, nach den allerdings sehr schwankenden Angaben Graham's, der Wasserstoff im Zustande der Occlusion im Palladium; die angegebenen Werthe als richtig vorausgesetzt, würde derselbe den occupirten Raum bis zu zwei Drittel wirklich erfüllen.

---

[1] Graham, aus Verdichtung im Palladium.
[2] Pictet und Cailletet.
[3] Faraday.
[4] Andreef.
[5] Landolt.
[6] Ansdell.
[7] Bleekrode.

Wir haben im Vorhergehenden die wahren specifischen Gewichte der Körper aus den physikalischen Eigenschaften der gasförmigen Verbindungen derselben abgeleitet, wir können dasselbe auch in Bezug auf die verflüssigten Gase thun, insoweit uns deren Dichten und Brechungsexponenten bekannt sind. Aus den letzteren finden wir auf bekannte Weise die Raumerfüllung v und aus dieser und der Dichte das wahre specifische Gewicht. In der folgenden Tabelle sind die betreffenden Werthe zusammengestellt, indem ich die Brechungsexponenten der verflüssigten Gase einer später noch zu erwähnenden Arbeit von Bleekrode[1] entnehme.

Tabelle XI.

Substanz	Dichte	n	Wahres spec. Gewicht Gas	Wahres spec. Gewicht Flüssigkeit
SO_2	1·359	1·351	6·59	6·54
C_2N_2	0·866	1·327	4·16	4·27
N_2O	0·870	1·204	6·00	6·66
CO_2	0·863	1·196	6·36	6·89
HCl	0·854	1·257	5·40	5·26
Cl_2	1·330	1·367	6·26	5·92
NH_3	0·616	1·325	2·92	3·06
C_2H_4	0·361	1·180	2·86	3·11
H_2S	0·910	1·390	3·54	3·82
H_2O	1·000	1·329	4·71	4·90

Es zeigt sich im Allgemeinen eine gute Übereinstimmung zwischen den Werthen, die aus dem gasförmigen und jenen, die aus dem flüssigen Zustande abgeleitet wurden, in den meisten Fällen sind letztere etwas grösser, d. h. es ist die Raumerfüllung im Molekül im flüssigen Zustand eine etwas vollständigere. Übrigens können die Zahlen auf grosse Genauigkeit nicht Anspruch machen, da die Brechungsexponenten der verschiedenen

[1] J. de Ph. (2) IV. März 1885.

Flüssigkeiten nicht alle für dieselbe Lichtart angegeben sind, keiner aber für Strahlen von sehr grosser Wellenlänge, wie es eigentlich die Berechnung erfordern würde; um so mehr wird man zugeben müssen, dass die Voraussetzungen, unter denen die Zahlen abgeleitet wurden, nicht allzu hypothetischer Natur sind.

Da man, wie eben angedeutet wurde, auch aus den physikalischen Constanten der Flüssigkeiten, deren wahres specifisches Gewicht bestimmen kann, so ist es naheliegend, diess wenigstens für einige besonders bemerkenswerthe Repräsentanten der Kohlenwasserstoffe zu thun, für welche ja durchwegs die Grössen n und d genau ermittelt sind; man kann die so an den Flüssigkeiten erhaltenen Werthe dann mit jenen vergleichen, die nach der Constitutionsformel aus dem Atomvolumen und dem wahren specifischen Gewichte der Constituenten berechnet werden. Als Beispiel mögen hier die beiden ausgezeichneten Isolatoren Benzol und Terpentinöl dienen.

	Benzol		Terpentinöl
Formel	C_6H_6	Formel	$C_{10}H_{16}$
n	1·490	n	1·466
d	0·885	d	0·887
W. sp. G. aus n, d,	3·1	W. sp. G. aus n, d,	3·2
W. sp. G. aus Formel	3·2	W. sp. G. aus Formel	3·0

Es scheint also bei diesen Körpern die Raumerfüllung im Moleküle keine wesentlich günstigere oder ungünstigere zu sein als bei den Constituenten.

Ein besonderes Interesse dürfte vielleicht die Untersuchung isomerer Reihen bieten, weil man hier erwarten darf, durch Unterschiede im wahren specifischen Gewichte auf das Vorhandensein von Unterschieden in der Raumerfüllung, d. h. auf eine verschiedene Anordnung im Molekül geführt zu werden. Ich theile im Folgenden als Beispiel eine solche Reihe mit.

Tabelle XII.

Substanz	Formel	n^1	d^1	Wahres specifisches Gewicht berechnet	
				ausFormel	aus n, d
Aceton	C_3H_6O	1·357	0·792	3·36	3·65
Allylalkohol ..	„	1·410	0·854	„	3·45
Propylaldehyd...	„	1·361	0·807	„	3·63
Amylformiat	$C_6H_{12}O_2$	1·396	0·880	„	3·62
Iso-Capronsäure .	„	1·412	0·924	„	3·69
Methylvalerat ...	„	1·393	0·879	„	3·67

Man ersieht aus diesen Zahlen, dass bei vorstehenden Körpern die Raumerfüllung durchwegs eine bessere ist als in den Constituenten, denn das beobachtete wahre specifische Gewicht ist grösser als das berechnete; ersteres ist auffallend gleich bei fünf Substanzen der Reihe, nur Allylalkohol zeigt einen beträchtlich niedrigeren Werth, woraus man schliessen kann, dass die räumliche Anordnung der Masse im Molekül bei ihm mehr von der Kugelform abweicht als bei den übrigen, wenngleich noch immer weniger als bei den Constituenten.

Um schliesslich noch für eine aus vier Constituenten bestehende Verbindung ein Beispiel anzuführen, erwähne ich den gleichfalls in Landoldt's Tabellen aufgeführten Trichloressigester $C_4H_5Cl_3O_2$; für diesen ist $n = 1·448$ und $d = 1·383$, woraus sich das wahre specifische Gewicht gleich 5·16 ergibt, während die Berechnung nach der Constitutionsformel den Werth 4·96 liefert. Hier ist also wieder die Raumerfüllung in der Verbindung eine etwas dichtere als in den Bestandtheilen.

Die im Vorangegangenen mitgetheilten Tabellen sollen selbstverständlich nur als Beispiele für die hier eingeschlagene Methode zur Bestimmung der wahren specifischen Gewichte gelten.

Da diese Methode keine anderen Bestimmungen als die der Brechungsexponenten und der Dichten voraussetzt, so ist zu

[1] Nach Landoldt's Tabellen.

erwarten, dass das Gebiet, auf welches sie sich anwenden lässt, ein sehr ausgedehntes sei, und nur wenn letztere Bedingung erfüllt ist, wird man hoffen dürfen, einen Blick in die Molecularconstitution der Materie werfen zu können.

Was bisherige Versuche zur Bestimmung des wahren specifischen Gewichtes anlangt, so ist mir nur der Weg bekannt, den Maxwell angezeigt hat, nämlich die Berechnung des von der Materie eines Gases wirklich occupirten Raumes aus dem Moleculardurchmesser und der Anzahl der Molekule in der Volumseinheit. Letztere ergibt sich aus dem Querschnitte eines Moleküls und aus der Querschnittssumme, für welche Grösse die Kinetische Gastheorie einen Ausdruck liefert. Auf diesem Wege wurde das wahre specifische Gewicht für Luft ungefähr $= 7$ gefunden ($H_2O = 1$), was mit unserem Werthe $7 \cdot 58$ in genügender Übereinstimmung steht.

Da Maxwell's Methode die Kenntniss der Moleculargrösse voraussetzt, so ist dieselbe nur auf gasförmige Medien anwendbar; auch basiren ihre Resultate auf einer genauen Bestimmung der mittleren Weglänge.

III.

Die Grösse v, die durch den Ausdruck $\frac{K-1}{K+2}$ oder $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ charakterisirt ist, drückt das Verhältniss des von einer bestimmten Menge eines Körpers wirklich occupirten Raumes zu deren scheinbaren Volumen aus. Wird der Körper comprimirt, z. B. bis seine Dichte d den doppelten Werth erreicht hat, so ist klar, dass auch die Raumerfüllung v auf das Doppelte gestiegen ist; beide Grössen gehen einander proportional, aus welcher Ursache auch immer eine derartige Compression oder Dilatation resultire.

Es folgt somit die Gleichung

$$\frac{K-1}{K+2} \cdot \frac{1}{d} = \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} = \text{Constante}.$$

Was eine solche Relation zwischen dem Brechungsexponenten und der Dichte anlangt, so ist bekannt, dass dieselben schon seit Newton's Zeiten gesucht und in den verschiedensten Formen gefunden wurde.

Newton selbst setzt (vom Standpunkte der Imanationstheorie ausgehend) $\frac{n^2-1}{d}$ = Constante und nennt diese Grösse das specifische Brechungsvermögen der betreffenden Substanz. Es hat sich der Ausdruck in dieser Form sehr lange erhalten, weil er für Gase durch die Untersuchungen von Biot und Arago[1] sowie von Dulong[2] experimentell vollkommen bestätigt wurde. Doch lässt sich leicht zeigen, dass der Newton'sche Ausdruck, in seiner Anwendung auf Gase, nur ein specieller Fall der vorstehenden allgemeinen Formel ist. Für Gase ist nämlich der Brechungsexponent stets eine nur wenig von der Einheit abweichende Grösse, für n^2+2 kann man daher für alle Gase mit grosser Annäherung die Zahl 3 setzen. Die allgemeine Formel übergeht somit in $\frac{1}{3}\,\frac{n^2-1}{d}$ = Constante oder $\frac{n^2-1}{d}$ = Constante wie bei Newton.

Versucht man die Formel Newton's auch auf flüssige oder feste Körper anzuwenden, so stösst man sofort auf Widersprüche mit den Thatsachen; man hat daher versucht, auf empirischem Wege andere Relationen zwischen n und d aufzustellen, welche der Bedingung der Constanz genügen sollten. So wurde die Formel $\frac{n-1}{d}$ = Constante als eine rein empirische eingeführt und an einem sehr umfangreichen Beobachtungsmateriale auch angenähert bestätigt gefunden.[3] Für Gase trifft diese Bestätigung selbstverständlich am schärfsten zu, da wegen der geringen Abweichung der n von der Einheit die Grössen $n-1$ und n^2-1 einander proportional sind. Wie zu erwarten war, hat man sich nicht lange mit dieser ganz willkürlich aufgestellten Formel begnügt, der durchaus keine bestimmte physikalische Bedeutung zukam,

---

[1] Mem. d. Inst. VII. (1807).

[2] Ann. d. Ch. et d. Ph. XXXI.

[3] Vgl. Gladstone & Dale, Ph. Mag. XXVI. 484.
Landolt, Pogg. Ann. CXXIII.
Brühl, Ann. d. Ch. CC. 139. CCIII. 1 und 255.
Mascart, C. R. LXXVIII. 617, 679, 801.
Wüllner, Pogg. Ann. CXXXIII. 1.
Damien, C. R. XCI. 323.

sondern man war bestrebt, aus bestimmten Annahmen über die Constitution der Materien selbst Relationen zwischen n und d abzuleiten. Die ersten derartigen Bestrebungen gingen von Schrauf[1] aus, den seine Untersuchungen über die Lichtbewegung gleichfalls zur Formel Newtons $\frac{n^2-1}{d} =$ Constante allerdings nur als Näherungsformel führten.

Später erschienen zwei wichtige Arbeiten, die mir erst bei Durchsicht der hier einschlagenden Literatur bekannt wurden, von A. Lorentz[2] „über die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte" und von L. Lorenz[3] „über die Refraktionsconstante". Beide Autoren kommen unabhängig von einander zu derselben Relation zwischen n und d, indem sie ihren Rechnungen die Annahme zu Grunde legen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes durch die Raumerfüllung bedingt sei; für die Raumerfüllung, also für unsere Grösse v, erhalten sie den Werth $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ d. i. denselben, der aus der Betrachtung der Dielektricitätsconstante folgt und daraus ergibt sich ihnen die Gleichung $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} =$ Constante, welche am Eingange dieses Abschnittes schon aufgestellt wurde. Auch in der Gleichung von Lorenz ist für n der Werth für sehr grosse Wellenlängen zu substituiren. Da Lorenz selbst durch sehr exacte Messungen mittelst einer Interferenzmethode die volle Giltigkeit seiner Formel für gasförmige und auch flüssige Körper nachgewiesen hat, so bin ich der Mühe überhoben, hier weitere Belege für deren Richtigkeit anzuführen. Nur die Resultate der Berechnung eines festen Körpers des Steinsalzes will ich erwähnen, um auch hierfür ein Beispiel zu geben. Es ist für ClNa die Änderung des Brechungsexponenten mit der Temperatur sehr genau von Stefan[4] bestimmt bis zu Temperaturen über 90°, ausserdem ist der Ausdehnungscoëfficient nach Fizeau bekannt. Man findet für die Temperaturen 20° und 90° die Dichten

[1] Physikalische Studien 1867.
[2] Wied. Ann. IX. 641.
[3] Wied. Ann. XI. 70.
[4] Sitzungsber. der Wiener Akademie. LXIII. (1871).

$d_{20} = 2 \cdot 100$ und $d_{90} = 2 \cdot 082$, sowie die Brechungsexponenten $n_{20} = 1 \cdot 5391$ und $n_{90} = 1 \cdot 5365$. Daraus ergibt sich der Werth von $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d}$ bei $20° = 0 \cdot 1492$ und bei $90° = 0 \cdot 1499$. Übrigens muss hervorgehoben werden, dass die Übereinstimmung dieser beiden Zahlen keine derartige ist, dass sie nicht auch durch andere Formen erreicht wurde; so liefert z. B. unter zu Grundelegung derselben Zahlen für n und d bei 20° und 90° die Formel $\frac{n-1}{d}$ die Werthe $0 \cdot 2566$ und $0 \cdot 2577$, die in ebenso guter Übereinstimmung stehen.

Die Formel $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} =$ Constante ist auch ausser von Lorenz, noch anderweitig experimentell bestätigt worden. So namentlich von Prytz,[1] von Nasini[2] und in jüngster Zeit von Bleekrode;[3] letzterer wendet dieselbe auf die condensirbaren Gase an und findet die Werthe merklich constant gleichgiltig, ob die Grössen n und d an dem Körper in gasförmigen oder im flüssigen Zustande bestimmt wurden. Die Constanz der Werthe ist in diesem Falle auch beträchtlich grösser als bei Anwendung der Formel $\frac{n-1}{d} =$ Constante.

Wenn demnach die Formel $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} =$ Constante auch experimentell als vollkommen bestätigt gelten kann, so ist es um so bedauerlicher, wenn später wieder andere rein empirische Formeln zur Anwendung kommen, wie z. B. die von Johst.[4] Auf Grund von Messungen an Gemischen von Anilin und Alkohol stellt Johst die Formeln auf

$$\frac{\sqrt{n}-1}{d} = \text{Constante und } \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{1}{d} = \text{Constante},$$

die den bekannten Formeln nachgebildet sind. Allein, wenn jeder auf Grund einiger Beobachtungen an vereinzelten Körpern eine

---

[1] Wied. Ann. XI. 104.
[2] Rend. d. R. Acc. d. Lincei. 1885. 74.
[3] J. d. Ph. (2) IV. März 1885.
[4] Wed. Ann. XX. 47.

empirische Formel aufstellt, nur desshalb, weil sie gerade diesen Beobachtungen sich besser anpasst, so wird man schliesslich sehr viel Mühe und Zeit umsonst vergeudet haben, denn ein wirkliches Resultat kann, wie ich glaube, doch immer nur aus der Vergleichung von Beobachtungen mit einer Formel hervorgehen, deren physikalische Bedeutung eine bekannte ist; und das ist bei der Formel $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} =$ Constante der Fall, wo der Bruch $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ die bestimmte Bedeutung der Raumerfüllung hat. Es ist durchaus nicht zu verlangen, dass diese Formel für alle Fälle vollkommen entsprechen soll, denn die Voraussetzungen, unter denen sie abgeleitet ist, treffen gewiss in Wirklichkeit nicht immer zu, aber gerade aus diesen Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung kann man — wenn man eben weiss, was für eine physikalische Bedeutung der berechnete Werth hat — wichtige Schlüsse auf die Constitution der Körper ziehen. Dagegen lehrt uns die wenn auch noch so gute Übereinstimmung mit einer empirischen Formel, deren physikalische Deutung unbekannt ist, einfach gar nichts.

Zwei Körper haben bisher durchaus nicht den gewöhnlichen Zusammenhang zwischen Dichte und Brechungsexponenten ergeben, das Glas und das Wasser. Ersteres hat bekanntlich einen mit der Temperatur wachsenden Brechungsexponenten, was den Beobachtungen an allen anderen Substanzen, sowie unserer Formel widerspricht, doch ist zu bedenken, dass letztere nur für Strahlen von sehr grosser Wellenlänge gilt, und da liegen allerdings Beobachtungen vor, die diesen Widerspruch zu lösen scheinen. Es hat schon Van der Willigen[1] gefunden, dass ein Flintglasprisma zwar die gelben und blauen Strahlen bei höherer Temperatur stärker bricht, als bei niedriger, dagegen die rothen, also langwelligen, schwächer. Eine gleiche Beobachtung hat Hastings[2] gemacht, auch er findet für die rothen Strahlen bei Crownglas eine Abnahme des n mit der Temperatur, für die übrigen Strahlen dagegen eine Zunahme. Wenn diese Beobachtungen richtig wären, so würden sie das abnorme Verhalten

[1] Arch. d. Mus. Teyler I. 64.

[2] Sill. J. (3) XV. 269.

des Glases in Übereinstimmung mit unserer Formel vollkommen erklären. Es ist aber Stefan[1] bei seinen Untersuchungen über die Refraction des Glases zu anderen Resultaten gekommen, es haben sich die erwähnten Beobachtungen, wenigstens an seinen Glassorten, nicht bestätigt; der Brechungsexponent zeigte sich auch für unendlich lange Wellen stets mit der Temperatur wachsend. Es ist also das Verhalten des Glases in dieser Beziehung noch nicht ganz aufgeklärt; jedenfalls hat man es im Glase mit einer, was die Molekularstructur anlangt, schwer definirbaren Substanz zu thun.

Der zweite Körper, der ein abnormes Verhalten zeigt, ist das Wasser; die Dichte des Wassers hat bei 4° ein Maximum, und man sollte nach unserer Formel daher bei dieser Temperatur auch ein Maximum des Brechungsexponenten erwarten. Es hat aber schon vor längerer Zeit Jamin[2] den Nachweis geliefert, dass letzterer sich von 0° an stetig mit der Temperatur ändert, auch über 4° hinaus. Dieser Widerspruch wurde von L. Lorenz in seiner schon früher erwähnten Arbeit vollständig zu Gunsten unserer Formel gelöst. Es hat nämlich Jamin die Brechungsexponenten nur für weisses Licht mittelst der Interferenzen bestimmt, Lorenz dagegen untersuchte die Dispersion bei verschiedenen Temperaturen und berechnete aus derselben den von der Dispersion befreiten Brechungsexponenten, also den für unendlich lange Wellen giltigen. Da zeigte sich denn, dass dieser in der That bei 4° ein Maximum habe und dass also auch das Wasser in seinem Verhalten gegen das Licht bei Dichteänderungen sich unserer Formel anschliesst. Diese Beobachtung Lorenz's würde ganz mit den Resultaten übereinkommen, die V. d. Willigen und Hastings an Glasprismen erhalten haben.

Es hat schon vor längerer Zeit Stefan[3] auf eine eigenthümliche Beziehung zwischen der mittleren Weglänge eines Gases und dessen Brechungsexponenten aufmerksam gemacht. Von der Ansicht ausgehend, dass die Moleküle eines Gases als Kugeln verdichteten Äthers zu betrachten seien, gelangte er zu der Vermuthung, dass die brechende Kraft eines Gases, also die Grösse

[1] Sitzungsber. der Wiener Akademie. LXIII. 1871.

[2] C. R. XLIII. (1856).

[3] Sitzungsber. der Wiener Akademie. LXV. (1872).

$n-1$ um so kleiner sein müsse, je grösser die mittlere Weglänge λ wäre. Diese Vermuthung zeigt sich auch durchgehends bestätigt, ja für eine Reihe von Gasen, wie H_2, O_2, Luft, CO, CO_2 und N_2O, zeigt das Product $(n-1)\lambda$ sogar ziemlich constante Werthe; dieselben liegen, nach Weglassung des Factors 10^{-11}, zwischen 192 und 224. Bei anderen, namentlich leichter condensirbaren Gasen und Dämpfen liegt der Werth jedoch beträchtlich höher bis ungefähr 300, wie unter anderem aus einer diesbezüglichen Zusammenstellung von E. Wiedemann[1] hervorgeht. Dieser Zusammenhang zwischen den Grössen $n-1$ und λ lässt, wie ich glaube, noch eine präcisere Deutung zu.

Wir haben nämlich zur Bestimmung des Molekulardurchmesser σ die Gleichung:

$$\sigma = C \,.\, v \,.\, \lambda,$$

wo C eine Constante bedeutet und v die Raumerfüllung, also die Grösse $\frac{n^2-1}{n^2+2}$.

Für Gase ist aber allgemein $n^2+2=3$ zu setzen und $n^2-1=2(n-1)$; dadurch übergeht obige Gleichung in:

$$\sigma = C' \,.\, (n-1)\lambda,$$

wo C' abermals eine Constante bedeutet. Man sieht also, dass der Ausdruck $(n-1)\lambda$ eine Grösse bedeutet, welche dem Durchmesser des Moleküls proportional ist. Vergleicht man die in Tabelle II aufgeführten Werthe von σ in dieser Hinsicht, so wird man finden, dass dieselben, namentlich bei den schwerer condensirbaren Gasen, keine sehr grossen Differenzen aufweisen. Dieselben treten aber sehr entschieden auf beim Übergang zu den Dämpfen. Während z. B. (für aus Diffusionsversuchen berechnete λ) der Werth von σ bei $H_2=10$, Luft $=10$, $CO=13$, $CO_2=13$, $N_2O=12$ ist (multiplicirt mit 10^{-9}), wird derselbe für Ätherdampf $=19$ und für Schwefelkohlenstoffdampf $=27$.[2]

---

[1] Wied. Ann. V. 142.

[2] Ich verdanke einer gütigen Mittheilung des Herrn Hofrathes Stefan die Kenntniss der von ihm aus Diffusionsversuchen abgeleiteten λ, nämlich für Äther $23\cdot10_{-7}$ und für Schwefelkohlenstoff $23\cdot10_{-7}$.

Zum Schlusse möchte ich noch auf folgenden Umstand aufmerksam machen. In der Eingangs erwähnten Untersuchung hat Clausius gezeigt, dass die Dielektricitätsconstante in einer bestimmten Weise von der Raumerfüllung abhängig sei; andererseits hat L. Lorenz in einer gleichfalls schon citirten Arbeit nachgewiesen, dass, ganz unabhängig von jeder elektrischen Beziehung, das Quadrat des Brechungsexponenten eben dieselbe Function der Raumerfüllung ist. Die Identität zwischen der Dielektricitätsconstante und dem Quadrate des Brechungsexponenten würde sich somit von selbst ergeben und darthun, dass sowohl die Fortpflanzung einer elektrischen Kraft durch ein Dielektricum hindurch als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in demselben in gleicher Weise von der Anordnung der Materie im Raume bedingt seien. Dieser Parallelismus müsste sich also auch ergeben, selbst wenn die beiden Vorgänge ihrem Wesen nach ganz differenter Natur wären.

Über das Verhältniss der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu dem von Hertz aufgestellten Princip der Einheit der elektrischen Kräfte.

Von **Eduard Aulinger,**
Assistenten der Physik am k. k. Polytechnikum in Graz.

(Mit 2 Holzschnitten.)

In seiner Abhandlung: „Über die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik“ [1] hat Herr Hertz einen Grundsatz aufgestellt, welcher sich als äusserst fruchtbar erwies, indem er ihm gestattete, eine Gruppe von bisher gänzlich unbekannten Erscheinungen, wenn auch nicht mit voller Sicherheit vorauszusagen, so doch als wahrscheinlich zu erkennen. Er bezeichnet diesen Grundsatz als das Princip der Einheit der elektrischen Kräfte, dem er natürlich ein Princip der Einheit der magnetischen Kräfte an die Seite stellt. Er spricht diesen Grundsatz zunächst in folgenden Worten aus: „Die von Strömen ausgeübten magnetischen Kräfte sind in allen ihren Wirkungen gleichwerthig mit gleich grossen und gleichgerichteten Kräften, die von Magnetpolen ausfliessen.“ In Bezug auf die Inductionserscheinungen kömmt hiezu noch der Satz: „Diejenigen elektrischen Kräfte, welche aus Inductionswirkungen entspringen, sind nach jeder Richtung gleichbedeutend mit gleichen und gleichgerichteten Kräften elektrostatischer Quelle.“

Ich habe mir in der gegenwärtigen Abhandlung die Aufgabe gestellt, die Beziehungen des Hertz'schen Princips zur Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu untersuchen. Bevor ich jedoch an diese Aufgabe gehe, muss ich einer Unklarheit in der

[1] Wiedemann's Annalen. 1884. Neue Folge. Bd. XXIII.

Hertz'schen Fassung seines Princips erwähnen, auf welche mich Herr Prof. Boltzmann im Gespräche aufmerksam machte. Der erste oben citirte auf die elektromagnetischen Wirkungen Bezug habende Theil des Princips dürfte wohl kaum ganz strenge sein; denn wird die Identität von allen Kräften behauptet, so ist er nicht richtig, da bei den Kräften, welche von elektrischen Strömen ausgehen, zu den magnetischen Wirkungen auch noch die der elektrostatischen Ladung der Leitungsdrähte hinzukommen, welche bei den von Magneten selbst ausgehenden Kräften fehlen. Es kann also die Identität blos von den magnetischen Kräften behauptet werden. Diese können aber nicht als solche definirt werden, welche auf Magnetpole allein wirken, sondern vielmehr als solche, welche entweder auf Magnetpole oder auf geschlossene elektrische Ströme von constanter Geschwindigkeit wirken. Etwas Ähnliches gilt natürlich von dem auf die Inductionswirkungen Bezug habenden Theil des Hertz'schen Princips.

Ich will es hier ganz unentschieden lassen, ob die Hertz'sche Fassung seines Principes durch passende Ergänzungen vollkommen einwurfsfrei gemacht werden könnte, glaube aber, dass es die grosse Wichtigkeit dieses Principes entschuldigen wird, wenn ich hier eine veränderte Form desselben anführe, welche mir ebenfalls von Herrn Professor Boltzmann gesprächsweise mitgetheilt wurde, und welche, wie es scheint, sehr klar und frei von jedem circulus vitiosus ist. Ob hiemit der Grundgedanke, von welchem Herr Hertz ausging, getroffen ist, oder nicht, muss natürlich ebenfalls unentschieden bleiben, und mein Zweck ist jedenfalls erreicht, wenn die nachfolgenden Ausführungen zur Klarstellung dieser von Herrn Hertz in die Elektrodynamik ganz neu eingeführten Betrachtungsweise ein Weniges beitragen.

Die in Rede stehende Fassung des Hertz'schen Principes lautet folgendermassen: „Wenn in einem endlichen oder unendlichen Raume (elektromagnetischem Felde) an jedem Punkte Grösse und Richtung der elektrostatischen Kraft (das heisst der Kraft, welche auf eine im betreffenden Punkte ruhend gedachte Elektricitätsmenge Eins[1] wirkt) und Grösse und Richtung der

[1] Dieselbe sowie der später erwähnte Nordpol Eins dürfen natürlich die Vertheilung der Elektrisirung und Magnetisirung im Felde nicht stören.

magnetischen Kraft (das heisst der Kraft, welche auf einen daselbst als ruhend und unveränderlich gedachten Nordpol Eins wirkt) gegeben sind, so sind damit sämmtliche magnetischen und elektrischen Kräfte, welche im ganzen Felde auf bewegte und veränderliche Elektricitäten und Magnetismen wirken, vollständig und eindeutig bestimmt, gleichgiltig, welchen Ursprungs die magnetischen und elektrischen Kräfte sind."

Adoptiren wir von vornherein die Amper'sche Anschauung über das Wesen des Magnetismus, so dass der Magnetismus blos als die Wirkung molekularer elektrischer Ströme aufgefasst wird, so sind die magnetischen Kräfte bestimmt, sobald die Kräfte gegeben sind, welche auf geschlossene elektrische Ströme von constanter Intensität wirken. Wir können also unser Princip auch in folgender Weise aussprechen: „Die in einem elektrischen Felde wirksamen elektrischen Kräfte sind vollständig und eindeutig bestimmt, sobald wir in jedem Punkte des Feldes die Kräfte kennen, welche auf eine daselbst ruhende und auf eine mit constanter Geschwindigkeit bewegte Elektricitätsmenge wirken". Es mögen diese elektrischen Kräfte was immer für einen Ursprung haben, sobald sie in diesen beiden Fällen dieselbe Wirkung ausüben, üben sie in allen anderen Fällen, namentlich auch auf Elektricitätsmengen, welche sich mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegen, dieselbe Wirkung aus.[1]

Wir sehen sofort, wie aus diesem Principe alle Schlüsse des Herrn Hertz mit voller Klarheit folgen. Wir haben einen Raum A, in welchem sich eine magnetische Doppelschicht befindet, wobei der unendlich kleine Raum zwischen den beiden Belegungen als vom Raume A ausgeschlossen betrachtet wird. Aus den blossen Gesetzen der Wechselwirkung zwischen Magnetpolen und elektrischen Strömen folgt, dass ein in diesem Raume befindlicher elektrischer Strom auf die Doppelschicht gewisse Kräfte ausüben würde, und daher aus dem Principe der Gleichheit der

[1] Noch einfacher verhält sich in dieser Beziehung das Gravitationsgesetz. Da ist die Natur eines Raumes bereits vollständig bestimmt, wenn man in jedem Punkte die auf eine ruhende Masse Eins wirkende Kraft nach Grösse und Richtung kennt. Dadurch ist bereits die Kraft bestimmt, welche auf eine mit constanter Geschwindigkeit bewegte Masse wirkt, was für elektrische Kräfte nicht gilt.

Wirkung und Gegenwirkung, dass auch umgekehrt die Doppelschicht auf jeden im Raume *A* befindlichen elektrischen Strom ebenfalls gewisse Kräfte ausübt. Nun denken wir uns einen zweiten Raum *B*, in welchem ein elektrischer Strom von passender Intensität fliesst, dessen Bahn congruent der Begrenzung der Doppelschicht ist. Um die Verhältnisse in beiden Räumen absolut gleich zu machen, denken wir uns entweder die Peripherie der Doppelschicht isolirend und genau mit derselben statischen Elektricität geladen, die den Strom im Raume *B* treibt, oder wir denken uns den Strom in bekannter Weise durch ein unendlich feines Stromnetz ersetzt, welches schon durch eine verschwindende elektrostatische Ladung getrieben werden kann. Die beiden Räume *A* und *B* sind dann so beschaffen, dass die elektrostatischen und magnetischen Kräfte in ihnen vollkommen gleich sind; da wir nun sahen, dass im Raume *A* auf alle elektrischen Ströme Kräfte wirken müssen, so folgt aus unserem Principe, dass dies auch im Raume *B* der Fall sein muss; das heisst, dass der im Raume *B* befindliche elektrische Strom auf alle anderen daselbst befindlichen Ströme Kräfte ausüben muss; mit anderen Worten: Aus dem Gesetze der Wechselwirkung von Strömen und Magneten folgt mittelst unseres Principes die Wechselwirkung von Strömen untereinander. Natürlich habe ich hier längst Bekanntes gesagt, und lege nur Werth auf die vollkommen scharfe Fassung der Prämissen.

Mit nicht geringerer Schärfe lässt sich aus unserem Principe die Schlussfolgerung Hertz' über die Wechselwirkung erlöschender Ringmagnete ableiten. In einem Raume *A* befinde sich eine elektrische Doppelschicht. Aus den blossen Gesetzen der Induction folgt, dass, wenn etwa in diesem Raume noch ausserdem ein erlöschender Ringmagnet vorhanden wäre, er auf die Doppelschicht gewisse Kräfte ausüben würde, und aus dem Principe der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung folgt ferner, dass auch die elektrische Doppelschicht auf den Ringmagnet gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte ausüben müsse. In einem zweiten Raume *B* befinde sich ein erlöschender, unendlich dünner Ringmagnet von passender Erlöschungsgeschwindigkeit, dessen Mittellinie congruent mit der Begrenzung der im Raume *A* befindlichen elektrischen Doppelschicht ist. Aus den allgemein an-

erkannten Gesetzen der Elektrodynamik und der Induction folgt, dass in beiden Räumen die elektrostatischen Kräfte genau gleich, die magnetischen aber gleich Null sind. Daher folgt aus unserem Principe, dass überhaupt alle elektrischen und magnetischen Kräfte in beiden Räumen gleich sein müssen. Nun sahen wir aber, dass im Raume *A* auf erlöschende Ringmagnete Kräfte wirken; aus unserem Principe folgt daher mit Nothwendigkeit, dass dies auch im Raume *B* der Fall sein muss; das heisst, dass erlöschende Ringmagnete auf andere erlöschende Ringmagnete Kräfte ausüben müssen.

Man sieht, dass sich aus dem hier aufgestellten Principe die Schlussfolgerungen Hertz' mit voller Nothwendigkeit ergeben müssen. Freilich klingt das Princip in dieser Fassung keineswegs so selbstverständlich, wie in der Hertz'schen Fassung. Da die elektrischen Kräfte nicht wie das Newton'sche Gravitationsgesetz blos von der relativen Lage der Theilchen, sondern auch von deren Geschwindigkeit, also den Differentialquotienten ihrer Coordinaten nach der Zeit abhängen, so erscheint es als nicht ganz selbstverständlich, dass die Kräfte durch die Coordinaten sämmtlicher Theilchen und deren erste Differentialquotienten vollständig bestimmt sein müssen, dass nicht auch zum Beispiele noch die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit von Einfluss auf die Kräfte sind. Weit mehr von vornherein evident klingt das Hertz'sche Princip von der Einheit der elektrischen Kräfte, allein es erscheint zweifelhaft, ob demselben eine allgemeinere Fassung gegeben werden könne, in welcher es evidenter ist, als unser aufgestelltes Princip, und doch mit derselben Strenge zu den Hertz'schen Folgerungen führt.

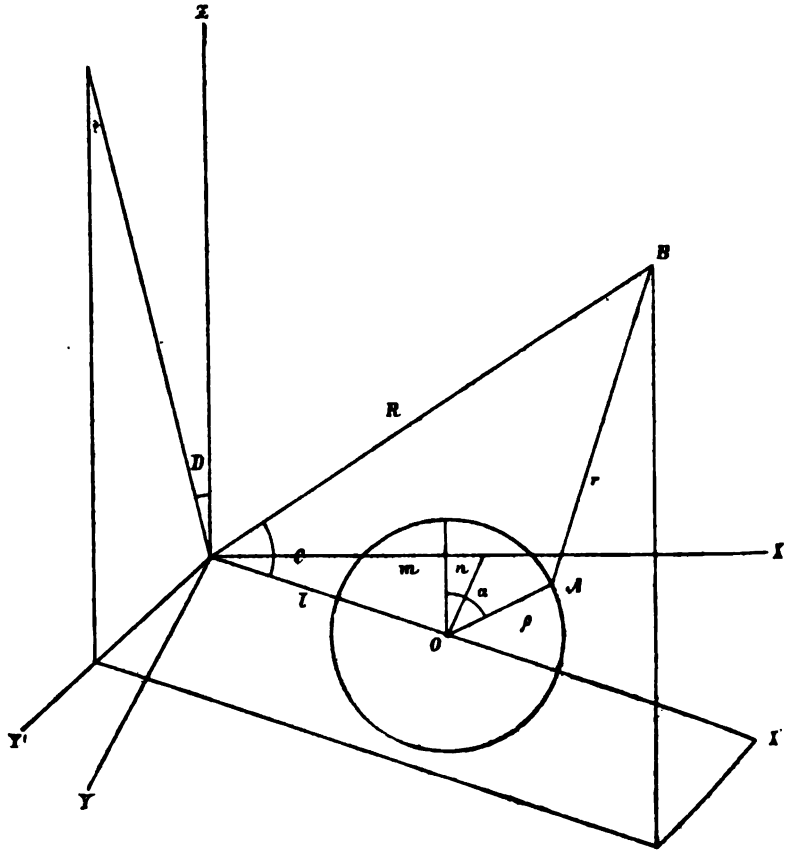
In der bisherigen Fassung scheint mir Herr Hertz unsere Annahme doch auch implicit zu machen; denn er behauptet auf Seite 87: „Rühren insbesondere die elektrischen Kräfte, welche auf den Ringmagnet wirken, gar nicht von elektrischen Massen, sondern von einem zweiten erlöschenden Ringmagnet her, so ist ihre Vertheilung dieselbe, als rührten sie von einer elektrischen Doppelschicht her; nach unserer Annahme von der Einheit der elektrischen Kraft findet daher auch zwischen den beiden erlöschenden Ringmagneten Wechselwirkung statt, etc.“ Nun lehrt

aber die Erfahrung blos, dass erlöschende Ringmagnete und elektrische Doppelschichten auf ruhende und mit constanter Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen dieselben Kräfte ausüben; dass sie auch auf rasch veränderliche Ströme, also insbesondere auf andere erlöschende Ringmagnete nach allen Richtungen dieselben Kräfte ausüben müssen, kann, wie mir scheint, nur erschlossen werden, wenn man annimmt, dass die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten der elektrischen Theilchen auf die zwischen ihnen wirkenden Kräfte ohne Einfluss sind. Der blossen Einheit der elektrischen Kräfte würde es meines Erachtens nicht widersprechen, wenn eine elektrische Doppelschicht zwar auf ruhende und mit constanter Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen ebenso wie ein mit constanter Geschwindigkeit erlöschender Ringmagnet, auf mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen, also speciell auf andere erlöschende Ringmagnete anders wirken würde, wie es in der That Weber's Theorie ergibt.

Ein Gleiches gilt natürlich von dem, was Herr Hertz auf S. 94 nach Formel 3) sagt; denn, um das Potential zweier erlöschender Ringmagnete auf einander aus den Hertz'schen Kräften 3) abzuleiten, muss man wieder aus der Thatsache, dass elektrische Doppelschichten auf ruhende und mit constanter Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen dieselben Kräfte ausüben, wie mit constanter Geschwindigkeit erlöschende Ringmagnete, den Schluss ziehen, dass sie auf veränderliche Ströme dieselben Kräfte ausüben. Dass insbesondere aus der Einheit der elektrischen Kräfte allein die Hertz'schen Folgerungen noch nicht abgeleitet werden könnten, scheint besonders dadurch erwiesen zu sein, dass das Weber'sche Gesetz nicht zu denselben führt, während es doch kein Gesetz geben kann, welches die volle Einheit der elektrischen und magnetischen Kräfte so sehr wahrt, wie das Weber'sche Gesetz, was Herr Hertz selbst bemerkt. Das Weber'sche Gesetz steht also auch mit jedem Principe in Widerspruch, aus welchem sich folgerichtig die Schlüsse Hertz' ergeben, und in der That steht es mit dem hier ausgesprochenen Principe in Widerspruch, da ja nach Weber die elektrischen Kräfte auch von den zweiten Differentialquotienten der Coordinaten der elektrischen Massen nach der Zeit abhängen.

Dagegen muss das Maxwell'sche Gesetz zu allen Folgerungen Hertz' führen, da es den Gesammtzustand des Feldes und daher auch alle darin auftretenden Kräfte als nur abhängig von den Positionen und Geschwindigkeiten der daselbst befindlichen elektrischen Massen annimmt. Herr Hertz sagt: „Die Behauptung, dass diese Kräfte specielle Fälle einer allgemeineren Kraftäusserung sind, würde Sinn und Bedeutung verlieren, wollte man zulassen, dass sich dieselben anders als durch Grösse und Richtung, dass sie sich auch noch durch Wesen und Wirkungsweise von einander unterscheiden könnten." Es scheint hienach fast, als ob er glauben würde, dass auch das Weber'sche Gesetz, das sicher keinen Unterschied der elektrischen Kräfte nach

Fig. 1.



Wesen und Wirkungsweise kennt, mit seinem Principe der Einheit der elektrischen Wirkung im Einklange stünde. Es müsste dann auch die Weber'sche Theorie die von Hertz erschlossenen Kräfte zwischen erlöschenden Ringmagneten liefern, und daher erschien es mir wichtig, zu prüfen, erstens in welchem Verhältnisse die Weber'sche Theorie zu dem hier aufgestellten Principe steht, und zweitens, was aus ihr über die Wechselwirkung zweier erlöschender Ringmagnete folgt.

Was den ersten Punkt betrifft, so genügt es vollkommen, in einem möglichst einfachen speciellen Beispiele nachzuweisen, dass die Weber'sche Theorie in der That diesem Principe widerspricht.

Es sei (Fig. 1) B ein Punkt der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R; x, y, z dessen Coordinaten, deren Ursprung im Kugelmittelpunkte liegt; $d\sigma$ sei ein Oberflächelement der Kugel und e' die Menge der positiven Elektricität auf der Flächeneinheit; im Innern der Kugel befinde sich ein Kreis vom Radius ρ; man kann dann das Coordinatensystem immer so wählen, dass der Kreismittelpunkt in die XY-Ebene und die Kreisebene parallel zur XZ-Ebene zu liegen kömmt; es seien ferner ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes A der Peripherie des Kreises, ds ein Längenelement derselben und e die Menge der positiven Elektricität auf der Längeneinheit. Es sind dann die nach dem Weber'schen Gesetze zwischen den Elementen im Abstande r wirkenden Kraftcomponenten:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= ee'.ds.d\sigma\frac{x-\xi}{r^3}\left[1+\frac{a^2}{16}\left\{2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\right] \\ p_y &= ee'.ds.d\sigma\frac{y-\eta}{r^3}\left[1+\frac{a^2}{16}\left\{2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\right] \\ p_z &= ee'.ds.d\sigma\frac{z-\zeta}{r^3}\left[1+\frac{a^2}{16}\left\{2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Nennen wir den Winkel, den der Radius $\rho = OA$ mit einer etwa der Z-Richtung parallelen Anfangslage einschliesst, α, die Coordinaten des Kreismittelpunktes m und n, so ist:

$$\xi = m + \rho\sin\alpha; \quad \eta = n; \quad \zeta = \rho\cos\alpha.$$

Behufs der auszuführenden Integration über die Kugel wollen wir die Coordinaten des Punktes B durch andere ausdrücken, wobei die neue Axe X' die Mittelpunkte der Kugel und des

Kreises verbindet. Es sei dann Winkel C die Poldistanz und Winkel D die Länge von der Z-Axe an gezählt, X' die Polaraxe der Kugel; dann erhalten wir:

$$x' = R\cos C; \quad y' = R\sin C\sin D; \quad z = R\sin C\cos D,$$

oder:

$$x = R\frac{m}{l}\cos C - R\frac{n}{l}\sin C\sin D$$

$$y = R\frac{n}{l}\cos C + R\frac{m}{l}\sin C\sin D$$

$$z = R\sin C\cos D,$$

wobei $l = \sqrt{m^2+n^2}$ ist.

Führen wir diese Werthe in:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

ein, so bekommen wir, da:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ und:}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = m^2 + n^2 + \rho^2 + 2m\rho\sin\alpha$$

ist, für r^2 folgenden Werth:

$$r^2 = R^2 - 2R\{l\cos C + \frac{m\rho}{l}\sin\alpha\cos C - \frac{n\rho}{l}\sin\alpha\sin C\sin D + \\ + \rho\cos\alpha\sin C\cos D\} + (l^2 + \rho^2 + 2m\rho\sin\alpha), \qquad 2)$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{2}{R}\left\{l\cos C + \frac{m\rho}{l}\sin\alpha\cos C - \frac{n\rho}{l}\sin\alpha\sin C\sin D + \right.\right. \\ \left.\left. + \rho\cos\alpha\sin C\cos D\right\} + \frac{l^2+\rho^2+2m\rho\sin\alpha}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

Diesen Ausdruck entwickeln wir nach dem binomischen Satze in eine Reihe, wobei wir in der Summe Glieder höherer Ordnung als der zweiten der Grössen m, n, l und ρ gegenüber solchen von R vernachlässigen; wir erhalten somit:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 + \frac{3}{R}\left\{l\cos C + \frac{m\rho}{l}\sin\alpha\cos C - \frac{n\rho}{l}\sin\alpha\sin C\sin D + \right.\right. \\ \left.\left. + \rho\cos\alpha\sin C\cos D\right\} - \frac{3}{2R^2}(l^2+\rho^2+2m\rho\sin\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{15}{2R^2}\left\{l^2\cos^2 C + \frac{m^2\rho^2}{l^2}\sin^2\alpha\cos^2 C + \frac{n^2\rho^2}{l^2}\sin^2\alpha\sin^2 C\sin^2 D + \right.\right. \\ \left.\left. + \rho^2\cos^2\alpha\sin^2 C\cos^2 D + \right.\right. \qquad 3)$$

$$+ 2m\rho \sin\alpha \cos^2 C - 2n\rho \sin\alpha \cos C \sin C \sin D +$$
$$+ 2l\rho \cos\alpha \cos C \sin C \cos D -$$
$$- \frac{2mn\rho^2}{l^2} \sin^2\alpha \cos C \sin C \sin D + \frac{2m\rho^2}{l} \cos\alpha \sin\alpha \cos C \sin C \cos D -$$
$$- \frac{2n\rho^2}{l} \cos\alpha \sin\alpha \sin^2 C \cos D \sin D \Big\}\Big]$$

Der Einfachheit halber nehmen wir nun an, es sei die Kugel statisch etwa positiv geladen, es sei also α die einzige Veränderliche nach der Zeit, sobald Elektricität im Kreise fliesst. Dann haben wir unter Berücksichtigung von 2):

$$2r\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\rho\left\{-\frac{Rm}{l}\cos\alpha\cos C + \frac{Rn}{l}\cos\alpha\sin C\sin D +\right.$$
$$\left. + R\sin\alpha\sin C\cos D + m\cos\alpha\right\}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + M\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2, \qquad 4)$$

wobei auf den Coëfficienten von $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ bei Annahme eines positiven und eines negativen Stromes im Kreise keine weitere Rücksicht zu nehmen ist; überhaupt sind für uns nur Glieder mit $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ von Belang.

Es wären hierauf die Ausdrücke 3) und 4) und die vorhin gefundenen Werthe der Coordinaten in 1) zu substituiren, und nachdem $d\sigma = R^2 \sin C\, dC\, dD$ gesetzt wurde, in Bezug auf D von 0 bis 2π und in Bezug auf C von 0 bis π zu integriren. Die diesbezügliche Rechnung ist etwas weitläufig, so dass ich mich begnügen muss, die ermittelten Resultate mitzutheilen. Ich habe als Componenten der Wirkung der ganzen Kugel auf das Längenelement des Kreises $ds = \rho d\alpha$ folgende Werthe gefunden:

$$P_x = -\frac{ee'R\rho^2a^2\pi}{6}\cos\alpha\, d\alpha\, \frac{d^2\alpha}{dt^2}; \quad P_y = 0$$
$$P_z = \frac{ee'R\rho^2a^2\pi}{6}\sin\alpha\, d\alpha\, \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Man sieht sofort, dass eine Integration über den Kreis in Bezug auf α von 0 bis 2π keinerlei Translationswerthe ergibt; Dagegen erhalten wir ein Drehmoment für die Y-Richtung, und

zwar, wenn wir nun auch negative Elektricität $-e$ mit $-\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ im Kreise fliessen lassen:

$$D_y = -\frac{2}{3} e e' R\rho^3 a^2\pi^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Wie nun auch immer die Lage des Kreisstromes innerhalb der Kugel sei, jedenfalls wird dieses gefundene Drehmoment dadurch, dass wir erst höhere Potenzen von m, n, l und ρ gegen solche von R vernachlässigen, nur modificirt werden. Für ein Solenoid wäre statt des Längenelementes ein sich auch nach der Y-Richtung erstreckendes Element zu nehmen und die diesbezügliche Integration durchzuführen.

Berücksichtigen wir ferner, dass

$$2e\rho \frac{d\alpha}{dt} = i_{(\text{mech.})}$$

die Stromstärke im mechanischen Masse gemessen bedeutet, so dass:

$$2e\rho \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{di_{(\text{mech.})}}{dt}$$

ist, und bezeichnen wir mit E(mech.) die auf der ganzen Kugel vertheilte Elektricitätsmenge ebenfalls im mechanischen Masse, wobei also:

$$e' = \frac{E_{(\text{mech.})}}{4R^2\pi}$$

ist, so wird:

$$D_y = -\frac{a^2}{12} \cdot \frac{\rho^2\pi}{R} E_{(\text{mech.})} \cdot \frac{di_{(\text{mech.})}}{dt}.$$

Nun ist die Constante a des Weber'schen Gesetzes gegeben durch:

$$\frac{4}{a} = v\sqrt{2}, \text{ wobei } v = \frac{3.10^{10}\text{cm.}}{\text{sec.}}$$

das Verhältniss der elektrostatischen und elektromagnetischen Stromeinheit ist, nämlich $v.i_{(\text{magn.})} = i_{(\text{mech.})}$, $vE_{\text{magn.}} = E_{\text{mech.}}$; es ist also $\frac{a^2}{6} = \frac{4}{3v^2}$ und:

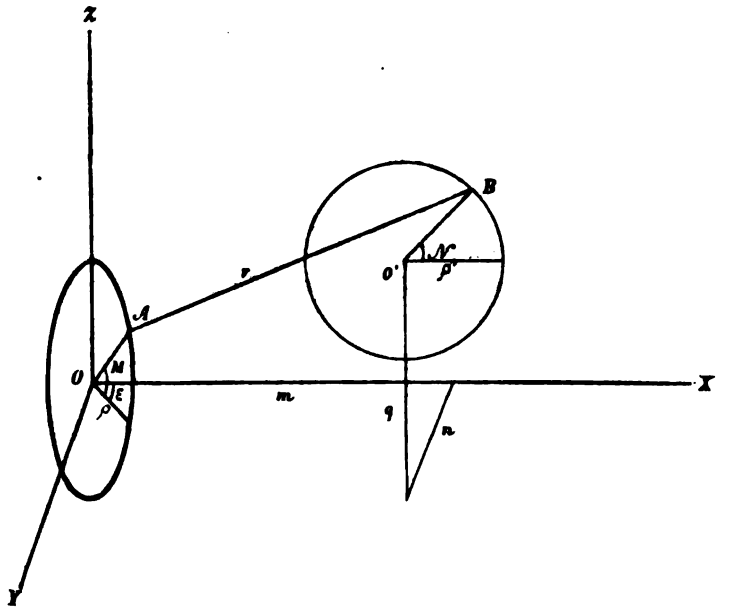
$$D_y = -\frac{2\pi\rho^2}{3v^2R} \cdot E_{\text{mech.}} \frac{di_{\text{mech.}}}{dt} = -\frac{2\pi\rho^2}{3R} E_{\text{magn.}} \frac{di_{\text{magn.}}}{dt}.$$

Bezeichnet man mit $K_{\text{magn.}}$ das Potential oder die elektromotorische Kraft im Innern der Kugel in magnetischem Masse gemessen, so ist $E_{\text{magn.}} = RK_{\text{magn.}}/v^2$, da die Capacität der Kugel im elektrostatischen Masse R, daher im elektromagnetischen R/v^2 ist. Es folgt also

$$D_y = -\frac{2\pi\rho^2}{3v^2} K_{\text{magn.}} \frac{di_{\text{magn.}}}{dt}.$$

Nehmen wir nun wieder unsere Räume A und B her, so ist in denselben, wenn etwa A an seiner Oberfläche positiv geladen ist, und B vollständig neutral angenommen wird, die statische Wirkung oder die Wirkung auf ruhende Elektricität in beiden Null, wogegen in A auf einen veränderlichen Strom ein Drehmoment ausgeübt wird; offenbar sind daher die Hertz'sche Theorie und das Weber'sche Gesetz im Widerspruche. Eine experimentelle Prüfung der obigen Formel dürfte ein experimentum crucis für die Weber'sche Theorie liefern.

Fig. 2.



Was nun das Verhalten zweier Ringmagnete anlangt, so wollen wir zunächst zwei Kreisströme betrachten, die beliebig im Raume liegen. Es wird in zwei Kreisen immer ein Durchmesserpaar zu finden sein, das parallel ist. Wählen wir den Mittelpunkt des einen Kreises O zum Coordinatenursprung, die Richtung der besagten parallelen Durchmesser zur Z-Richtung, und drehen dann das System um die Z-Axe so, dass die Ebene des zweiten Kreises O' in eine zur XZ-Ebene parallele Ebene zu liegen kömmt; es wird dann die Ebene des ersten Kreises mit der XZ-Ebene einen Winkel ε einschliessen. Es seien ρ und ρ_1 die Radien der Kreise, A und B Punkte der Peripherien mit den respectiven Coordinaten ξ, η, ζ und x, y, z; ferner m, n und q die Coordinaten des Kreismittelpunktes O'; endlich M und N die Winkel, welche die Radien OA und $O'B$ mit ihren respectiven Anfangslagen, die der XY-Ebene und einer zu dieser parallelen in O' entsprechen mögen, bilden. Sind dann ds und ds' die im Abstande r befindlichen Längenelemente in A und B, und e und e' die entsprechenden Elektricitätsmengen auf der Längeneinheit, so sind nach Einführung von ds' statt $d\sigma$ die vorhin in 1) aufgestellten Formeln für die Wirkung der Elemente beizubehalten.

Dabei sind:

$$\xi = \rho \cos\varepsilon \cos M; \quad \eta = \rho \sin\varepsilon \cos M; \quad \zeta = \rho \sin M,$$
$$x = m + \rho_1 \cos N; \quad y = n \quad ; \quad z = q + \rho_1 \sin N,$$

und es ist daher, wenn man $m^2+n^2+q^2 = \overline{OO'}^2 = R^2$ setzt:

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + \rho_1^2 - 2m\rho \cos\varepsilon \cos M - 2n\rho \sin\varepsilon \cos M - 2q\rho \sin M + 2m\rho_1 \cos N + 2q\rho_1 \sin N - 2\rho\rho_1 \cos\varepsilon \cos M \cos N - 2\rho\rho_1 \sin M \sin N.$$

Daraus folgt:

$$2r\frac{dr}{dt} = 2\rho\{m\cos\varepsilon \sin M + n \sin\varepsilon \sin M - q \cos M - \rho_1 \cos M \sin N + \rho_1 \cos\varepsilon \sin M \cos N\}\frac{dM}{dt} +$$
$$+ 2\rho_1\{q\cos N - m \sin N - \rho \sin M \cos N + \rho \cos\varepsilon \cos M \sin N\}\frac{dN}{dt}.$$

Setzen wir den Factor von $\frac{dM}{dt}$ gleich A, ebenso den von $\frac{dN}{dt}$ gleich B, so erhalten wir für den in 1) stehenden Klammerausdruck:

$$2r\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = A\frac{d^2M}{dt^2} + B\frac{d^2N}{dt^2} + Q,$$

wobei Q keine zweiten Differentialquotienten enthält.

Führen wir diesen Ausdruck in die Formeln 1) ein, und nehmen wir jetzt in beiden Kreisen Ströme nach beiden Richtungen mit entgegengesetzten Elektricitäten an, so finden wir, dass die Glieder mit den zweiten Differentialquotienten wegfallen. Dieselben werden also auch weder für die Kreisströme noch für Solenoide oder Ringmagnete, als deren Elemente die Kreisströme fungiren, eine Rolle spielen. Es machen sich also Änderungen der Intensität, also auch das Verlöschen zweier Ringmagnete unter einander nicht fühlbar, und der Widerspruch zwischen der Weber'schen und der Hertz'schen Theorie tritt auch hier zu Tage.

Um nicht missverstanden zu werden, bemerke ich noch, dass ich keineswegs etwa eine Vertheidigung der Weber'schen Theorie im Sinne hatte, sondern, dass mir im Gegentheile die von Hertz aus seiner Annahme erschlossenen Folgerungen die grösste Wahrscheinlichkeit zu haben scheinen.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet, Herrn Regierungsrath Professor Dr. Boltzmann für seine Anregung zu dieser Arbeit und für die mir vielfach gewährte Anleitung und Unterstützung meinen tiefgefühltesten Dank auszusprechen.

Die astronomischen Angaben der assyrischen Keilinschriften.

Von **Julius Oppert,**
Membre de l'Institut à Paris.

Die wichtige Frage der assyrischen Chronologie ist von der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien von Neuem angeregt, und zwar in einer so wissenschaftlich durchgreifenden Weise, wie sie sich bis jetzt noch keiner nur annähernd ähnlichen Behandlung zu erfreuen gehabt hat. Die beiden Gelehrten, die Herren Bernhard Schwarz und Eduard Freiherr v. Haerdtl, haben die Freundlichkeit gehabt, mir ihre mich im höchsten Grade interessirenden Arbeiten zuzusenden, und da diese verdienstlichen Leistungen der kaiserlichen Akademie ihre Veröffentlichung verdanken, erlaube ich mir, derselben als ein geringes Zeichen meiner Erkenntlichkeit einige Bemerkungen zu unterbreiten.

Schon vor dreissig Jahren hat der hochverdiente Edward Hincks einige astronomische Täfelchen, so weit es der damalige Stand der Keilschriftforschungen zuliess, einer Betrachtung unterzogen, und Rawlinson hat dann später in einer in ninivitischen Eponymenlisten verzeichneten Sonnenfinsterniss die von — 762, Juni 15, zu erkennen geglaubt. Ich habe hierauf selbst auch dem astrologischen und astronomischen Theil der Inschriften eine besondere Zuneigung entgegengetragen, die freilich in der Absicht wurzelt, für die allgemeine und namentlich für die biblische Zeitrechnung in den Keilschrifttexten Anhaltspunkte zu finden. Da ich mich seit meiner frühesten Jugend (in meinem 13. Jahre fand ich schon eine freilich längst bekannte Anwendung der cardanischen Regel) gern mit Mathematik und Astronomie beschäftigt hatte, kam mir dieses Studium und namentlich die strenge Geistes-

disciplin, die sie der sonst ungebändigten Forschung auferlegt, bei der Entzifferung dieser Documente zu Gute: ich habe letztere zum grossen Theil zuerst erklären können, ohne, wie es bei den Fachgenossen leider nur zu häufig vorkommt, die realen Wissenschaften auf das Empfindlichste zu verletzen. Längst habe ich die Keilschriftausdrücke der Planeten, mancher Fixsterne und mehrere Termini technici festgestellt, von denen einige mehr astrologischer, als astronomischer Natur sind. Nirgends mehr als in den chaldäischen Täfelchen bewahrheitet sich die seit Jahrhunderten bekannte Thatsache, dass die Astronomie sich oft der Sterndeuterei zu Liebe zu einer bedeutenden Höhe entwickelt hat.

Die ausgezeichnete, mühevolle und fast gigantische Arbeit des Freiherrn v. Haerdtl ist der bedeutendste Dienst, der der assyrischen Chronologie von streng wissenschaftlicher Seite her erwiesen worden ist. Die Bestimmung der Frühlingsnachtgleichen, der einzelnen Neomenien während 350 Jahre, die Berechnung der centralen für Ninive sichtbaren Sonnen- und Mondfinsternisse, bilden fortan das Handbuch der Assyriologen, sowie es sich um diese Phänomene handelt. Haben sich auch vor Kurzem bedeutende Fachmänner vernehmen lassen, um ihre Zweifel an der Möglichkeit der Zurückberechnung der Finsternisse zu erheben, so ist doch bis jetzt Pingré's verdienstliches Werk im Grossen und Ganzen nicht Lügen gestraft worden, und das hervorragende Haupt der Astronomen Wiens scheint, wie es aus seinen eigenen Werken und denen seiner Schüler hervorgeht, dieser Ungläubigkeit nicht mehr als nöthig Raum zu geben.

Ich werde mir nun erlauben, an die Arbeit des Freiherrn v. Haerdtl einige Anmerkungen anzuknüpfen, die aus meinen Studien der Keilschrifttexte hervorgehen, und die um so nöthiger sind, da aus einigen unrichtigen Übersetzungen ebenso unhaltbare Schlüsse gezogen werden könnten.

In dem neunten Jahre des Königs Asuredilel fand im Monat Sivan eine Sonnenfinsterniss statt. Von einer gänzlichen Verfinsterung gleich der des Archilochus und des Agathokles schweigt der Text; wir sehen, was aus der von Freih. v. Haerdtl bestätigten Liste Pingré's hervorgeht, dass es während jener 380 Jahre überhaupt keine totale Obscurität für Ninive gab. Rawlinson

hatte zuerst die vom 15. Juni 763 v. Chr. als die in Documenten gemeinte Eklipse angenommen, aber schon Hincks scheint gegen diese Annahme gewichtige Bedenken geltend gemacht zu haben, die aus der biblischen Chronologie entnommen sind. Da ich die Angaben der Bibel mit mathematischer Kritik untersucht habe,[1] was bisher noch nicht geschehen, und diese derart in sich consistent sind, dass an eine absichtliche, überdies interesselose Fälschung, sowie an fabricirte Irrthümer nicht gedacht werden kann, so erachte ich für gerathen, dem ungenügend berichtenden und auf jeden Fall nicht mit Sicherheit verstandenen Text, die sicheren biblischen Angaben nicht unterzuordnen.

Die Identificirung der Finsterniss mit der von 763 v. Chr. schnitt mindestens 46 Jahre aus der Zeitrechnung der Könige Judas heraus, und ich fand eine passende, die Eklipse von 809 v. Chr. 13. Juni. Diese meine Feststellung hatte die Annahme einer Unterbrechung der Eponymenliste zur Folge, die allerdings befremdend erschien, aber durch das Factum erklärt wurde, dass zeitweilig babylonische, nach eigenen Regierungsjahren rechnende Könige in Ninive herrschten. Die Verfechter der späteren Finsterniss mussten zu noch verzweifelteren Mitteln greifen: sie mussten die in der Bibel unterschiedenen Könige Phul und Teglathphalasar identificiren, welche an und für sich schon verwundbare Meinung durch neu gefundene Inschriften endgiltig beseitigt worden ist. Meine Ansicht, dass man die biblischen Daten auf Angaben der Finsternisse basiren muss, dass es aber ganz unerlaubt ist, mathematisch unter sich gegenseitig übereinstimmende Angaben. den assyrischen, missverstandenen fragmentarischen Überlieferungen unterzuordnen, habe ich seit 1866 in verschiedenen Schriften zu beweisen gesucht. Sie hat aus guten Gründen keine Widerlegung erlitten, aber wie es im Beginne neuer Wissenschaften häufig geht, man hat das Unabweisbare todtzuschweigen gesucht. Ein Aufsatz in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft (1868); meine Chronologie biblique (1868); mein Salomon et ses successeurs (1877) und verschiedene Artikel (unter anderen G. G. A. 1880, Stück 47) haben zur Genüge und mit noch nicht beseitigten Gründen dargethan, welche historische

[1] In meinem Buche: Salomon et ses successeurs, Paris 1877.

Schwierigkeiten man durch die Annahme der Finsterniss von 763 v. Chr. schafft, die durch die Ansetzung auf 809 v. Chr. entfernt werden. Ich erlaube mir auf diese meine Schriften zu verweisen, die alle gemachten Einwände besprechen und ihrem wahren Werth gemäss würdigen.

Die Verfasser der Eponymenlisten haben nur diese Sonnenfinsterniss angegeben, weil sie allein mit einem historischen Ereigniss, einem Aufstande in der uralten Stadt Elassar zusammenfiel, und daher ein Anrecht hatte, im Gedächtnisse des Volkes erhalten zu bleiben. Bedeutende Phänomene dieser Art sind in den Jahresangaben nicht verzeichnet, weil sich an sie kein Ereigniss knüpfte. Wir kennen als mit einer wichtigen Begebenheit zusammenfallend noch eine andere, ungleich kleinere Finsterniss, nämlich die der Thronbesteigung Assurnasirhabals; diese fand unter der Archontie des Assursezibanni statt, 121 Jahre vor der streitigen Finsterniss. Da die Gegner der Finsterniss von −808 keine Unterbrechung annehmen, so ist dieses Intervall von ihnen unbestritten. Es sind nicht 122, sondern 121 Jahre, die die beiden Phänomene trennen. Vor der Unterbrechung der Eponymenlisten waren die neuen Könige am 1. Nisan, der ihrer Thronbesteigung folgte, selbst Archonten: sie waren also unter dem letzten Eponymus ihres Vorgängers zur Regierung gekommen. Hier ist nun Freiherr v. Haerdtl nicht vollkommen von dem Wortlaute des Textes unterrichtet, denn sonst hätte er nicht bis auf zwei Jahre vor dem Tode des Tuklat-Ninip, Vater des Assurnasirhabal, hinaufsteigen können.

Die allerdings sehr bedeutende, fast totale Finsterniss vom 26. Januar 932 v. Chr., kann hier so wenig in Betracht kommen, wie die von 885; die eine fiel sogar noch während der vierten Eponymie, diese in die zweite vor der des neuen Königs. Der Text sagt wörtlich: „In dem Anfang meines Königthums, im Beginn meines Regierungsjahres verfinsterte sich Samas (der Sonnengott), der Richter der Himmelgegenden, in einer für mich günstigen Weise, und grossmächtig setzte ich mich auf den Thron.“

Diese schon 1868 gegebene, heute nach den Fortschritten in der Erklärung der astrologischen Texte als unantastbar dastehende Übersetzung schliesst alle Daten ausser −929

und —883 aus. Nun fand allerdings eine partielle Sonnenfinsterniss am 3. Juli 884 v. Chr. statt, aber sie war auch nur im nördlichen Asien und in Amerika sichtbar, bestand also für Ninive nicht. (S. G. G. A. 1879, pag. 799) Diese Thatsache vernichtet nun geradezu die Identification der Aufstandfinsterniss mit der von —762. Es kann nur die vom 2. Juni —929 gemeint sein, die nach Freiherrn v. Haerdtl selbst um 5 Uhr Abends in Ninive ihre grösste Phase erreicht hat. Ich habe schon (Chronol. bibl. pag. 10, G. G. A. 1879, pag. 800) angedeutet, dass diese Finsterniss ihren Kernschatten durch Mexiko, die Vereinigten Staaten, den Norden von Europa leitete, um im Turkestan mit total verfinstert untergehender Sonne zu enden. Dass sie astrologisch günstig war, hing von dem Stand der Planeten und Fixsterne ab, und Hunderte von erhaltenen Documenten beweisen, dass hierbei die Gestirne in Betracht kamen, die sich gerade im Meridian befanden. Auch werden sich die Astrologen von Ninive und Arbela wohl schon aus eigenem Selbsterhaltungstriebe gehütet haben, eine andere als günstige Vorbedeutung für die mit ihr zusammenfallende Thronbesteigung des neuen Königs zu sehen. Erwartet war aber dieses Phänomen, denn es schloss sich an die totale Eklipse vom 21. Mai —957 (958 v. Chr.) an, die die grösste war, die überhaupt in Ninive sichtbar gewesen, wie es auch Freiherr v. Haerdtl anerkennt; für diesen Zeitraum fehlen uns aber leider alle historischen Angaben.

Da wir nun die Geschichte der Thronbesteigung Assurnasirhabals sehr genau kennen, geht gerade aus der Untersuchung dieser Ereignisse hervor, dass die von Freiherrn v. Haerdtl angeführte Finsterniss vom 26. Januar —931 (932 v. Chr.) sich nicht auf das Datum des Beginnes seiner Herrschaft beziehen kann.

Zwei Monate höchstens trennen den Januar von der eigenen Eponymie des Königs, welcher uns ausführlich über seine Thaten berichtet. (S. Expédition de Mésopotamie, tome I, pag. 330). Nach der Finsterniss griff er das Land Nummi, die Hauptstadt Libi an und nahm diese, sowie vier andere Städte im Berge Rini; nach reichlicher Ausbeutung dieses gebirgigen Landes, wohin keiner seiner Ahnen hatte gelangen können, wandte er sich gegen Kirsari und andere Gegenden, deren Städte er eroberte und denen er Tribut auferlegte. Während er sich in Kirsari aufhielt,

empfing er die Tribute der Länder Khubuska und Kilzan, verliess dann Kirsari, worauf er Nistun und sieben andere Städte im südlichen Kaukasus angriff, die fast uneinnehmbare Stadt Nistun eroberte; er zerstörte hierauf alle Städte, die in den Wäldern lagen. Er nahm furchtbare Rache, führte den Häuptling Bubu nach Arbela, um ihn dort schinden zu lassen. Er liess eine Stele zur Verherrlichung seiner Triumphe machen, die er an der Quelle des Tigris aufstellte. Alles dieses aber kann der König nicht in acht Wochen gethan haben und kann deshalb nicht im Januar an die Regierung gekommen sein. Er erzählt hierauf, dass er erst am 25. Ab seiner eigenen Eponymie, also nach Freiherrn v. Haerdtl an dem 13. August 929 v. Chr. (—928), zu einem neuen Feldzug gegen Westen von Ninive aufgebrochen sei.

Es sind aber nicht allein die sehr auffallenden Sonnenfinsternisse in Betracht zu ziehen, sondern die erwarteten, selbst wenn sie nicht sichtbar waren. Wir haben es mit einem Volke zu thun, welches unsere Eintheilung des Tages in Stunden, unsere noch bestehende Woche und die noch bei uns benutzte Sexagesimaltheilung geschaffen. Daher sind auch die partiellen Sonnenfinsternisse von sehr grosser Wichtigkeit, weil man sie erwartete und nach den den Chaldäern bekannten Cyclen von 223 synodischen, 242 Drachenmonaten (6585·3 Tagen) die Mondknoten beobachtete. Dieses geht aus vielen Documenten hervor, von denen ich einige in Übersetzung geben will.

Hier ist ein längerer Bericht an den König (R. III, 51, 9):

„Dem Könige, meinem Herrn, Dein treuer Diener Mar-Istar. Heil dem Könige, meinem Herrn. Nebo und Merodach mögen dem Könige, meinem Herrn nahe sein; lange Tage, fleischliches Behagen und Zufriedenheit des Herzens mögen dem Könige, meinem Herrn, die grossen Götter geben!

„Am 27. Tage verschwand der Mond. Am 28., 29. und 30. Tage haben wir den Mondknoten der Finsterniss der Sonne beobachtet; die Zeit verging, eine Finsterniss fand nicht statt.

„Am 1. Tage, als sich der Neumondstag des Monates Thammuz neigte, ward der Mond wieder sichtbar über dem Planeten Merkur, wie ich dieses schon früher dem Könige, meinem Herrn, vorausgesagt; ich fehlte nicht.

„In der Stunde (*Kas-suta*) des Anu (Saturn) erschien er im Sinken, in dem Kreise des Regulus (Haupt der himmlischen Schaaren), doch war im Horizontnebel sein Streifen nicht deutlich zu erkennen.

„Ferner: Für diese Stunde des Anu hatte ich seine Conjunction dem Könige, meinem Herrn, vorausgesagt, wie er dann auch sich begegnete und unterhalb des Wagensternes (wohl Denebola) deutlich erschien. In der Stunde des Bel (Jupiter) verschwand er. Er hatte sich wohl dem Wagenstern genähert, aber seine Conjunction mit ihm war verhindert worden. Aber seine Conjunction mit dem Merkur in der Stunde Anus, wie ich dieses früher dem Könige, meinem Herrn, vorausgesagt hatte, war nicht verhindert worden.

„Der König und Herr wisse dieses."

Diese merkwürdige Inschrift handelt also von einer Sonnenfinsterniss, die nicht stattfand. Es ist anzunehmen, dass, da der Tag mit der Stunde Anu's (Saturn) beginnt, die erste Stunde des vom Vorabend angerechneten Tages ein Freitagabend war. Ich bezweifle daher, dass hier dieselbe Finsterniss gemeint ist, von der auch ein anderes Document spricht, nämlich die vom Freitag 16. Juni 660 v. Chr. (—659, 9, 341 nach meiner Bezeichnung). Es wäre wo möglich zu untersuchen, ob dieses mit dem Laufe des Merkur stimmt, und in einer Inschrift Assarhaddon's glaube ich eine Stelle gefunden zu haben, die von einer Begegnung, wo nicht von einem Durchgang des Merkur redet, der bei der Thronbesteigung des Königs im Sivan stattfand. Die merkwürdige Stelle aus dieser Inschrift Assarhaddon's (K. 2801, Brit. Mus.) lautet:

„Im Anfange meiner Herrschaft, meinem ersten Regierungsjahre, setzte mich Assur, der König der Götter, glücklich auf den Thron. Anu verlieh mir sein Diadem, Bel seinen Thron, Ninip seine Waffe, Nergal seinen Schild (*salummat*) und sie machten in dem Himmel und auf dem Erdenrunde günstige Vorzeichen .... Und Merkur erschien im Sivan und drang in die Mitte des Hauses der Sonne, und sprang hinaus verschwindend. (*Sakvesa ibanva ina Sivan yuqarrib va bit samsi ultappā naziz*)."

Die Worte sind klar; das Wort „*yuqarrib*" heisst nicht nach dem Hebräischen „näherte sich", was unsinnig wäre. Wenn sich Merkur der Sonne nähert, ist er unsichtbar. Merkwürdiger

Weise kann im April —680, zur Zeit der Thronbesteigung Assurhaddon's ein Merkurdurchgang stattgefunden haben,[1] aber die grosse Frage ist, ob die Assyrer im Stande waren, ein solches Phänomen zu beobachten.

Leider ist der oben mitgetheilte Text nicht datirt, wohl aber der soeben berührte (R. ib. 5), den ich schon 1868 (Grammaire assyrienne, 2ième éd., page 109) übersetzt habe:

„Dem Könige, meinem Herrn, Dein Diener Istar-nadin-habal, Haupt der Astrologen von Arbela. Heil dem Könige, meinem Herrn; Nebo, Merodach und Istar von Arbela mögen dem Könige, meinem Herrn, nahe sein! Am 29. Tage haben wir den Mondknoten beobachtet, haben aber den Mond nicht gesehen.

Am 2. Tage des Thammuz, der Eponymie des Belsunu, Präfecten der Stadt Khindana."

Aus der Eponymie des Belsunu, einen Monat nach diesem Täfelchen, ist aber der Cylinder datirt, in dem die von Herrn Schwarz besprochene Finsterniss angeführt ist, und welcher mit dem auf diese Eklipse folgenden Jahre abschliesst. Meine Ansetzung der Finsterniss auf den Montag 27. Juni julianisch, 20. Juni gregorianisch —660 (G. G. A. 1880, p. 1489) ist durch Herrn Schwarz bestätigt.

Von demselben Manne, der die für uns unschätzbare Sorgfalt hatte, seine Beobachtungen zu datiren, scheint die folgende Inschrift zu sein:

„Dem Könige, meinem Herrn, Dein Diener Istar-nadin-habal, Haupt der Astrologen sowie der Ersten von Arbela.[2] Nebo, Merodach und Istar von Arbela mögen dem Könige, meinem Herrn, nahe sein.

„Am 29. Tage haben wir den Mondknoten beobachtet; das Haus der Conjunction (*bit-tamarti*)[3] war bedeckt, wir haben den Mond nicht gesehen.

„Am 1. Schebat in der Eponymie des Bel-kas-sadua."

[1] Da am 9. November 1690 ein Merkurdurchgang stattfand, so kann neunmal 263 Jahre, das ist 2367 Jahre und ungefähr 30 Tage, vorher, also im November —677, dasselbe Phänomen stattgefunden haben, also auch $3\frac{1}{2}$ Jahre vorher im April —680. Im Mai —669 oder 670 v. Chr. gab es einen Venusdurchgang.

[2] Der Mann scheint Avancement gehabt zu haben.

[3] Opposition ist durch *sûqulti* ausgedrückt.

Wegen der soeben besprochenen Finsterniss kann diese Eponymie, die neunte in einem Listenfragmente, gar nicht viel weiter hinaufgerückt werden als 651 v. Chr. (—650, 9, 350) und auch nicht viel niedriger angesetzt werden. Es handelt sich hier um die in Hinterindien und in der Südsee sichtbare totale Finsterniss vom 2. December 651 v. Chr. (—650, 9, 350).

Seit Jahrhunderten hatten die Sarosperioden verfolgt werden können; namentlich mussten die bedeutenden Phänomene vom 31. Mai 957 und 12. Juli 885, sowie die vom 3. August 849, vom 15. August 831, 6. September 795, 15. September 777, 8. October 741, vielleicht die für Ninive nur wenig sichtbare totale Finsterniss vom 10. November 687 v. Chr. die Aufmerksamkeit der Sterndeuter auf das möglicher Weise eintreffende Himmelsereigniss gelenkt haben.

Es könnte scheinen, dass der 2. December julianisch, 25. November gregorianisch, für den Anfang des Schebat sehr frühe fällt; doch ist dieses schlechterdings kein Einwand. Obgleich die Chaldäer, die nach Geminus den Exeligmus oder den dreifachen Saros von 19, 756 Tagen bestimmt hatten, auch das metonische Verhältniss von 19 Jahren zu 235 synodischen Monaten schon gekannt haben müssen, war die Einschaltung, wie wir aus vielen Stellen sehen, sehr willkürlich, weil man in einem gegebenen Augenblick die nöthige Hinzufügung eines Monates aus astrologischen Rücksichten unterliess. Man half sich dann häufig mit der Einschaltung eines zweiten Elul, den wir beispielsweise in zwei Jahren hintereinander, im zweiten und dritten Jahre des Kambyses finden, was auf einen beträchtlichen Rückstand deutet. Nichtsdestoweniger hatte es acht Jahre vorher, im zweiten Jahre des Cyrus einen zweiten Elul, im darauffolgenden einen Veadar gegeben und dann noch im sechsten dieses Königs finden wir einen Veadar. Nach obiger Inschrift musste der Nisan am 28. Februar, der Veadar am 29. Januar, der Adar am 31. December, der Schebat am zweiten December beginnen. Die Frühlingsnachtgleiche fiel nicht immer in den Nisan, sie konnte auch in die ersten Tagen des Iyar hinabrücken, worauf man dann zu einem zweiten Elul seine Zuflucht nahm.

Auf die Regierung Sargon's (721—704) beziehen sich zwei Finsternisse, von denen nur die erste in Ninive sichtbar war.

Diese wird erwähnt, als in Harran, in Mesopotamien, ungefähr 1° nördlich und 4° westlicher gelegen als Ninive, am 24. April 723 v. Chr., die diejenige sein kann, von der Sargon sagt, dass sie auf ihn gedeutet wurde, wenn diese Stelle sich nicht auf eine der ptolemäischen Mondfinsternisse bezieht.

Die andere, nicht sichtbare, schloss sich an die vom 13. März 730 v. Chr. an; sie fand am 24. März 712 v. Chr. (—711, 9, 289), nach Sonnenuntergang statt, und war nur für die westlichen Regionen zu beobachten. Dieses Phänomen bezeichnet den grossen Mondcyklus, von dem Sargon als von einer Ära spricht. Der erste des Monates Nisan war die Epoche einer neuen Mondperiode von 1805 Jahren oder von 22, 325 synodischen Monaten, 24,227 Drachenmonaten; die vorhergehende hatte 2, 517 v. Chr. begonnen. Ich habe schon früher dargelegt, dass nach diesem hochwichtigen Datum von 712 v. Chr., das auch die Ägypter nach Herodot als die Epoche des Sethos kannten, sich der gemeinsame Ursprung der Sothisperioden von 1460 Jahren und der Lunarperioden von 1805 Jahren bis in das Jahr 11, 542 v. Chr. hinaufführen lässt. Über diese, auch durch die biblische Chronologie bestätigten Theorien, habe ich mich schon häufig ausgesprochen und brauche hier nicht darauf zurückkommen.

Ich muss mich jetzt zu der anderen Besprechung des Freiherrn v. Haerdtl wenden, die auf einer ganz unrichtigen Interpretation der Keilinschriften beruht; die ganze Discussion wird gegenstandslos. Es ist mir unbegreiflich, wie Hincks, der einer der ersten und bedeutendsten Keilschriftentzifferer war, in einem Texte drei Mondfinsternisse hat finden können, während doch nur die erste zu dieser Kategorie gehört; die beiden anderen sind Sonnenfinsternisse, was Hincks erkannt haben würde, wenn er den ganzen Text untersucht hätte. Hier ist die Übersetzung:

„Am 14. Nisan war eine Finsterniss des Mondknotens [des Vollmondes].

„In den Hainen ist Samen, die Ernte [Lücke]. (Folgt ein Commentar mit Erklärung von Worten, die sich nicht in diesem Bruchstücke finden, aber in dem nicht erhaltenen Theile angewandt waren.)

„Im Tisri fand eine Finsterniss des Mondknotens der Neomenie statt. Die Finsterniss fand statt (*iḫmuṭa*), mit der aufgehenden Sonne in dieser Vornacht hatte sie begonnen. (*iḫmuṭa*).“

Commentar: *tab* bedeutet *ḫamaṭu*, *tab* bedeutet auch *surrū*, beginnen; daher heisst *ḫamaṭu* anfangen.

„Die Finsterniss war schwarz (*iḫmuma*) bei der aufgehenden Sonne."

Commentar: *iḫmuṭa* = *surr, u* dasselbe gleicht *sakanu*, stattfinden, sie war schwarz im Anfange.

„Im Schebat fand eine Finsterniss des Mondknotens der Neomenie statt. Es war eine Finsterniss für das Land Umlias.

Das grosse Land wird mit dem kleinen Land in den Tiefen (?) sich beugen." (R. II, 39.)

Man kann übrigens auch das Ganze als eine Voraussagung fassen und übersetzen: Wenn am 14. Nisan eine Mondesfinsterniss ist, so wird die Frucht in den Gärten reichlich sein u. s. w. Wenn am Tisri die Sonne verfinstert aufgeht und im Schebat eine andere Finsterniss eintritt[1]), so betrifft sie das Land Umlias; das mächtige Land wird in dem kleinen besiegt werden. Dergleichen Portenta weisen die assyrischen Inschriften in Masse auf, von denen ich hier eine in erster Übersetzung geben will (R. III, 51, 9):

„Wenn der Mond dunkel wird und ausser der Zeit (*bara-ri*) weggeht, so bezieht sich diese Eklipse auf Akkad."

Commentar: *bara* = *lā*, nicht; *ri* = *adannu*, Zeit; „in der Nichtzeit" heisst am 12. und 13., wenn eine Finsterniss in dem Neumondsknoten (*simetan*, siehe oben) stattfand.[2]

„Wenn die Finsterniss auf der Rechten ist, wird die Regierung des Vaters der Gattin nicht verkürzt werden, sein Leben ist auf 80 (Jahre). Doch nur wenn die Rechte verfinstert. die Mitte frei geblieben ist.

„Wenn die Finsterniss auf der Rechten ist, so wird... (*padagir*) der Gattin nicht (Lücke), das Leben wird ausgedehnt (?), wenn die Finsterniss zur rechten....."

(Die Inschrift ist unvollständig).

Eine andere Inschrift lautet (ib. VIII):

„Wird der Mond am 1. Tage gesehen, ist es ein Wahrzeichen: das Herz des Landes wird erfreut. Wenn der Mond bei

---

[1] In demselben Jahre ist dies überhaupt unmöglich.

[2] In diesem Falle wird der Mond nicht von dem Erscheinen der Mondsichel, sondern von dem wirklichen Neumond an gerechnet. Das hier bezeichnete Phänomen ist eben ein Wunder.

seinem Erscheinen einen weissen Halo hat, verliert der König sein Erstgeburtsrecht."

„Von Istar-sum-esses.

Ganz dieselbe Inschrift ist von Nergal-edir unterzeichnet (ib. IX). Leider haben wir, ausser den angeführten Texten, keine datirten Angaben über Eklipsen.

Auf folgende Inschrift hat schon Fox-Talbot (Trans. of biblical archeology, t. I, pag. 6 und 352) hingewiesen; ich gebe hier die Übersetzung des Berichtes über einen verunglückten Feldzug:

„Dem Könige der Länder, meinem Herrn, Dein Diener Kudurru. Assur, Samas und Merodach mögen dem Könige, meinem Herrn, nahe sein. Wir wurden auf den Weg vom Könige, meinem Herrn, nach Agypten (*Misir*) entsendet. Im Monate Thammuz trat eine Sonnenfinsterniss ein. Unter meinen Leuten war keiner, dem das Wohl Assur's am Herzen lag, jeder floh für sich nach rechts oder links. Der König, mein Herr, befrage den Boten über die Kunde ihrer Schlechtigkeit und über die Wahrheit der Finsterniss des Tammuz. Wenn ich darf, werde ich flüchten vor das Angesicht des Königs und Herrn."

Da das Datum nicht angegeben ist, können wir nicht mit Bestimmtheit sagen, von welcher Finsterniss der Bericht (K. 131 des Brit. Mus.) redet. Möglicherweise ist es die schon besprochene, vom 27. Juni —660, vielleicht auch die vom 16. Juni —678, in welche Zeit die Züge Assarhaddon's nach Ägypten fallen, dieses ist am wahrscheinlichsten.[1] Eine spätere Finsterniss, die vom 6. Juni —650, scheint aus historischen Gründen weniger Berücksichtigung zu verdienen.

Um mich zu resumiren, fasse ich die Daten zusammen:

Finsterniss der	Thronbesteigung				
	Assurnasirhabals ..	930 v. Chr.	(9, 071)	2.	Juni
„	des Aufstandes in Assur	809 „	„ (9, 192)	13.	„
„	„ Krieges gegen Elam	661 „	„ (9, 340)	27.	„
„	unter der Eponymie des Belsunu	660 „	„ (9, 341)	16.	„
„	unter der Eponymie des Bel-kas-sadua	651 „	„ (9, 350)	2.	Dec.

[1] Solche Inschriften existiren aus der Seleukidenzeit.

Die Keilinschriften werden auch vielleicht dadurch den astronomischen Studien Nutzen bringen, wenn sie datirte Planetenconjunctionen[1] darbieten, was geschehen kann. Doch die Namen der Fixsterne sind zum Theil sehr schwer zu identificiren; nur einige wenige haben der Forschung nachgegeben. Wir kennen unter den Hunderten von verzeichneten Fixsternen: die Capella, den Regulus, den Antares, den Sirius und den Nordstern, der obgleich im 10. Jahrhundert 16 Grad vom Pol entfernt, den Phöniciern als Leitstern galt. Durch diese Identification, die seit kurzem bekannte Texte bestätigt haben, ist uns ein merkwürdiges culturhistorisches Factum zur Kenntniss gebracht, dass nämlich im 10. Jahrhundert v. Chr., Caravanen auf dem Landwege bis an die Ostsee gingen um Bernstein zu holen.

„Meine Unterhändler fischten in den Meeren der Passatwinde Perlen, und in den Meeren, in denen der Nordstern hoch steht, was wie Kupfer aussieht.“ Die Worte *ina tamati nipiḫ kakkab* (*kak'sidi*) *misrē* (Stern der Leitung) können gar nicht anders gefasst werden;[2] das Wort *nipiḫ* wird, wie auch im Arabischen, von der hochstehenden Sonne gebraucht, und jede andere Übersetzung ist falsch.

---

[1] Wäre es die Eklipse vom 26. Mai 669 v. Chr., so würde dies die auf der Ptolomäischen Canon basirte Chronologie um mindestens ein Jahr hinaufrücken.

[2] Siehe die Beweise hiefür in meinem l'Ambre jaune chez les Assyriens, Paris 1880. Ich hatte früher unrichtiger Weise das Wort *napaḫ* durch „aufgehen“ übersetzt, doch kann Venus nicht aufgehen, wenn die Sonne untergeht und die Araber wohnen nicht im Osten, sondern im Süden von Assyrien.

Anmerkung.

Für den in diesem Hefte zwischen pag. 907 bis 914 offen gebliebenen Raum war eine in der Sitzung vom 16. April 1885 vorgelegte Abhandlung: „Über ein neues Trinitrophenol“ von J. Zehenter bestimmt, welche vom Verfasser nach vollendetem Satze zurückgezogen wurde.

X. SITZUNG VOM 23. APRIL 1885.

Herr Dr. J. M. Eder, Professor an der Staatsgewerbeschule in Wien, übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Spectrographische Untersuchung von Normal-Lichtquellen und die Brauchbarkeit der letzteren zu photochemischen Messungen der Lichtempfindlichkeit".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Kenntniss des anatomischen Baues unserer Loranthaceen", Arbeit aus dem botanischen Laboratorium der technischen Hochschule in Graz von Herrn G. Marktanner-Turneretscher.
2. „Rationelle Verwerthung nicht steuerbarer Winkelunterschiede bei Cursbestimmungen zur See", von Herrn Franz Zehden, Capitän der Donau-Dampfschiffahrts-Gesellschaft in Turn-Severin.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht folgende Abhandlungen:

1. „Zur Theorie der elliptischen Functionen" von Herrn Regierungsrath Prof. Dr. F. Mertens in Graz.
2. „Über die Hesse'sche Fläche einer Fläche dritter Ordnung", von Herrn Prof. Dr. C. Le Paige in Lüttich.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit: „Untersuchungen über Chelidonsäure," II. Abhandlung von L. Haitinger u. Ad. Lieben.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia nacional de ciencias en Córdoba; Boletin. Tomo VII. Entrega 3. Buenos Aires, 1884; 8°. — Tomo VIII. Entrega 1. Buenos Aires, 1885; 8°.

Academia real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 246 & 247. Tomo XXI. Habana, 1884; 8°.

Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 54ᵉ année, 3ᵉ série, tome 9. No. 2. Bruxelles, 1885; 8°.

Academy of Natural Sciences of Philadelphia: Proceedings. Part III. November — December, 1884. Philadelphia, 1885; 8°.

— — Journal. 2ᵈ. series. Vol. IX. Part. I. Philadelphia, 1884; 4°.

— of science of St. Louis: The Transactions. Vol. IV. No. 3. St. Louis, 1884; 8°.

Accademia, Reale dei Lincei: Atti. Anno CCLXXXII.848 sib 1 1885. Serie quarta. Rendiconti. Vol. I°. Fascicoli 6° — 8°. Roma, 1885; 4°.

Archivio per le scienze mediche. Vol. VIII. Fascicolo 4° — Torino, 1884; 8°.

Berlin, Universität: Akademische Schriften pro 1882 — 1883. 24 Stücke; 4° & 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période, tome XIII. Nr. — 15. Février 1885. Genève, Lausanne, Paris, 1885; 8°

Bureau, k. statistisch-topographisches: Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrgang 1884. I. Band 1. & 2. Hälfte. Stuttgart, 1884—85; 4°. II. Band 1. & 2. Hälfte. Stuttgart, 1884—85; 4°.

Geological Survey of India: Records. Vol. XVIII, part 1. Calcutta, 1885; 8°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVIII. Jahrgang. Nr. 6. Berlin, 1885; 8°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XX. Band. April-Heft. Wien, 1885; 8°.

— physikalisch chemische: Bulletin. Tome XVII. Nr. 2. St. Petersburg, 1885; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVIII. Nr. 3. Wien, 1885; 8°.

Hermite Ch.: Acta mathematica. Sur quelques conséquences arithmétiques de formules de la théorie des fonctions ellip-

tiques. Berlin, Stockholm, Paris, 1884; 4°. — Sur les fonctions holomorphes. Paris, 1885; 4°. — Sur la théorie des fractions continues. Paris, 1885; 8°. — Sur la Reduction des Intégrales hyperelliptiques. Edinburgh; 8°.

Hortus Petropolitanus: Acta. Tomus VIII, fasciculus III. St. Petersburg, 1884; 8°. — Tomus IX, fasciculus I. St. Petersburg, 1884; 8°.

— — Descriptiones plantarum novarum et minus cognitarum. Fasciculus IX. Auctore E. Regel. Petropoli, 1884; 8°. — Fasciculus VIII. Suppl. auctore E. Regel. Petropoli, 1883; 8°. — Supplementum ad fasciculum VII, descriptionum plantarum Auctore E. Regel. Petropoli, 1880; 8°.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen. Vol. XIII. Nr. 3 & 4. Jahrgang 1885. Pola, 1885; 8°.

Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando: Anales. Seccion 2ª. Observaciones meteorologicas. Año 1883. San Fernando, 1884; Folio.

Instituut, het koninklijk voor de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen. 4e Volgreeks. Deel X. 3e Stuck. 's Gravenhage, 1885; 8°.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. IV. Nos 36 — 38. Baltimore, 1885; 4°.

— — American Journal of Mathematics. Vol. VII. No. 3. Baltimore, 1885; 4°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und Hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1885. Heft 2. Pola, 1885; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. 3. Band, 4. Heft und 77. Ergänzungsheft. Gotha, 1885; 4°.

Nature. Vol. XXXI. Nr. 807. London, 1885; 8°.

Osservatorio reale di Brera in Milano. Nr. XVIII. Milano, 1885; gr. 4°.

Repertorium der Physik. XXI. Band, 3. Heft. München und Leipzig, 1885; 8°.

Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa: Atti. Vol. IV. Pisa, 1885; 8°. Memorie. Vol. IV. Fascicolo 3°. — Pisa, 1885; 8°.

Société Ouralienne d'Amateurs des sciences naturelles. Tome VII, livr. 4. Jekaterinenburg, 1884; Folio.

— impériale des Amis des sciences naturelles, d'anthropologie et d'ethnographie. Tome XLV. Nos 1—3. Moscou, 1884; 4°.

Society, the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLV. Nos 4 & 5. London, 1885; 8°.

— of chemical Industry: The Journal. Vol. IV, Nr. 3. Manchester, 1885; 8°.

Vereeniging, nederlandsche dierkundige: Tijdschrift. Deel VI. Aflevering 2—4. Leiden, 1882—85; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher für Sachsen und Thüringen. Zeitschrift. Halle a. S., 1884; 8°.

— entomologischer in Stockholm: Entomologisk Tidskrift. Arg. 5. Häft. 3 & 4. Stockholm, 1884; 8°.

Untersuchungen über Chelidonsäure.

Von **L. Haitinger** und **Ad. Lieben.**

II. Abhandlung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. April 1885.)

Komansäure aus Chelidonsäure.

Wir haben bereits in unserer ersten Abhandlung[1] erwähnt, dass wir beim Erhitzen von Chelidonsäure ausser einem Destillat, das durch Abspaltung von zwei CO_2 entsteht und mit dem von Ost aus Komansäure erhaltenen sogenannten Pyrokoman identisch ist, die Bildung eines krystallinischen Sublimates beobachtet haben, welches bei fortgesetztem Erhitzen wieder verschwindet und wahrscheinlich durch Austritt nur eines Moleküles Kohlensäure aus Chelidonsäure entsteht.

Durch Abänderung der Versuchsbedingungen, indem wir nämlich Chelidonsäure im Vacuum erhitzten, gelang es uns jenes Sublimat in etwas grösserer Menge zu erhalten. Wir verwendeten hiezu ein langes und weites horizontal liegendes Glasrohr, das sich zur Hälfte seiner Länge in einem passenden Ölbade befand. Das Rohr stand einerseits mit einer gut wirkenden Wasserluftpumpe in Verbindung, anderseits war es durch einen Stopfen etc. derart verschlossen, dass man durch Regulirung eines Quetschhahnes einen ganz schwachen Luftstrom von aussen eintreten lassen konnte, welcher den Zweck hatte, die gebildeten Zersetzungsproducte möglichst bald der weiteren Einwirkung der Wärme zu entziehen. In dem im Ölbade ruhenden Theile der Röhre wurde die Chelidonsäure in dünner Schichte ausgebreitet und das Bad auf etwa 220—230° erhitzt. Auch unter diesen

[1] Monatshefte für Chemie 1884, pag. 339. Vergl. auch ebendaselbst 1883, pag. 273 u. 339, sowie Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft 1883 pag. 1259, 1884 pag. 1507 u. 1885 pag. 929.

Umständen ging die Kohlensäureabspaltung theilweise weiter vor sich als gewünscht wurde — es destillirte reichlich Pyrokoman — gleichwohl konnten aber doch noch erhebliche Mengen jenes Zwischenproductes gewonnen werden, welches sich als körnig krystallinisches Sublimat knapp neben dem im Ölbade befindlichen Theile des Rohres verdichtete. Die Ausbeute an letzterem Körper betrug etwa 15 Percent vom Gewichte der angewandten Chelidonsäure. Er war schwach gelblich gefärbt und konnte durch Umkrystallisiren aus heissem Wasser unter Zuhilfenahme von etwas Thierkohle leicht vollkommen weiss erhalten werden.

Die Elementaranalyse ergab, dass seine Zusammensetzung sich durch die Formel $C_6H_4O_4$ ausdrücken lässt, welche auch der von Ost[1] auf indirectem Wege aus Mekonsäure erhaltenen Komansäure zukommt.

0·3279 Grm. der über Schwefelsäure getrockneten Substanz lieferten bei der Verbrennung nach Kopfer 0·6168 Grm. CO_2 und 0·0891 Grm. H_2O.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_6H_4O_4$
C	51·80	51·42
H	3·03	2·86

Auch das sonstige Verhalten des Körpers stimmt mit den von Ost über die Komansäure gemachten Angaben völlig überein. Die Komansäure entsteht somit aus Chelidonsäure im Sinne der Gleichung

$$C_5H_2O_2 \cdot (COOH)_2 = C_5H_3O_2 \cdot COOH + CO_2$$

Da Komansäure fast bei derselben Temperatur in Pyrokoman und Kohlendioxyd zerfällt, bei der sie selber aus Chelidonsäure hervorgeht, schien es uns zweckmässig, zu ihrer Gewinnung noch einen anderen Weg, als den des Erhitzens freier Chelidonsäure, einzuschlagen. Der nahe liegende Versuch ein primäres Salz der Chelidonsäure (wir verwandten Natriumsalz) bei höherer Temperatur in komansaures Salz und Kohlendioxyd zu zerlegen, missglückte. Es wurden sehr reichliche Mengen von Pyrokoman

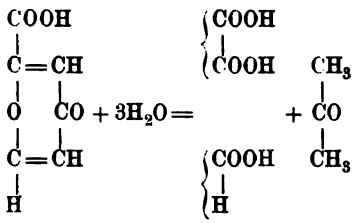
[1] Journ. f. prakt. Chemie 29, pag. 62.

erhalten, was darauf schliessen lässt, dass sich das saure Salz in der Hitze so verhält wie ein Gemenge von neutralem mit freier Säure. Weit bessere Erfolge erhielten wir bei Anwendung des primären Äthyläthers, welcher bei 225° in Kohlensäure und überdestillirenden Komansäureäther zerfällt. Das sofort krystallinisch erstarrende Destillat braucht zu völliger Reinigung nur einmal aus heissem Alkohol umkrystallisirt zu werden, und zeigt dann die von Ost für Komansäureäther angegebenen Eigenschaften, insbesondere den Schmelzpunkt von 102° (corrig.). (Ost gibt ihn zu 103° an.) In Wasser ist der Äther merklich löslich. Die Elementaranalyse der über Schwefelsäure getrockneten Substanz ergab:

0·2692 Grm. Substanz gaben nach Kopfer verbrannt 0·1200 Grm. H_2O und 0·5632 Grm. CO_2.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_5H_4O_4$
C	57·06	57·14
H	4·96	4·77

Die Constitution der Komansäure ergibt sich von selbst, sobald die der Chelidonsäure gegeben ist. Ist nun die Vorstellung richtig, die wir bezüglich der Chelidonsäure früher entwickelt haben, so muss die Komansäure (1 Molekül) beim Kochen mit starken Basen in Aceton (1 Molekül), Oxalsäure (1 Molekül) und Ameisensäure (1 Molekül) zerspalten werden.



Komansäure.

Es schien von Interesse diese Folgerung aus unseren theoretischen Vorstellungen einer experimentellen Prüfung zu unterwerfen. Dass die Komansäure bei Behandlung mit starken Basen sich gelb färbt (offenbar entsteht hier eine der Xanthochelidonsäure entsprechende Xanthokomansäure) und beim Kochen Oxalsäure

und Aceton liefert, hat Ost bereits angegeben. Von der Bildung der Ameisensäure erwähnt er nichts, sowie er auch über das Mengenverhältniss, in dem die Spaltungsproducte auftreten, nichts angibt. Nachdem wir uns von dem Auftreten der Ameisensäure unter den Spaltungsproducten durch qualitative Reactionen überzeugt hatten, lieferte der folgende quantitative Versuch eine weitere Bestätigung für die Richtigkeit unserer Anschauungen.

0·542 Grm. Komansäureäthyläther wurden mit überschüssigem, reinen Kalkhydrat und Wasser durch mehrere Stunden auf 100° erhitzt. Hierauf wurde Kohlensäure eingeleitet, erwärmt, vom kohlensauren und oxalsauren Kalk abfiltrirt und das Filtrat eingedampft. Der Abdampfrückstand, in Wasser aufgenommen und durch Filtriren von etwas ausgeschiedenem kohlensauren Kalk getrennt, lieferte nach neuerlichem Abdampfen der Lösung 0·2022 Grm. bei 100° getrockneten ameisensauren Kalk, der mittelst verdünnter Schwefelsäure in Sulfat übergeführt 0·2085 Grm. $CaSO_4$ gab.

Aus dem oben erhaltenen Gemenge von Calciumcarbonat und -oxalat wurde das Letztere durch Ausziehen mit Essigsäure rein erhalten und durch heftiges Glühen in Kalk übergeführt. Erhalten: 0·1810 Grm. CaO, entsprechend 0·41367 Grm. Calciumoxalat.

Vergleicht man diese Versuchsergebnisse mit den aus der präsumirten Gleichung

$$2C_5H_8O_2 . COOC_2H_5 + 3Ca(OH)_2 + 2H_2O =$$
$$= Ca(CHO_2)_2 + 2CaC_2O_4 + 2C_3H_6O + 2C_2H_5OH$$

berechneten, so ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung.

Für 100 Theile Komansäureäther berechnen sich

	aus dem Versuch	aus der Theorie
Calciumformiat	37·31	38·69
Calciumoxalat	76·32	76·19

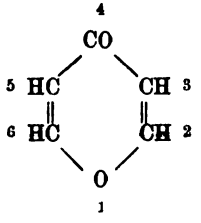
Das erhaltene Calciumformiat zeigt den richtigen Calciumgehalt. In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet
Calcium	30·32	30·77

Die Beziehungen der Chelidonsäure zur Komansäure und somit bis zu einem gewissen Grade auch zur Mekonsäure sind durch vorstehende Untersuchungen festgestellt. Alle drei Säuren, sowie auch deren Derivate, lassen sich auf den eigenthümlich constituirten Typus $C_5H_4O_2$ zurückführen, der ohne Zweifel auch

noch vielen anderen Verbindungen (z. B. wohl der Dehydracetsäure[1]) in ähnlicher Weise zu Grunde liegt, wie etwa Benzol, Pyridin, Furfuran ihren zahlreichen Derivaten. Demgemäss schlagen wir auch für den Körper $C_5H_4O_2$ statt des etwas schleppenden Namens Pyrokoman, der ausschliesslich an die Beziehung zur Komansäure erinnert, die weniger specielle und kürzere Bezeichnung Pyron vor. Die Komansäure wäre dann als Pyroncarbonsäure, die Chelidonsäure als Pyrondicarbonsäure und die Mekonsäure als Oxypyrondicarbonsäure zu betrachten.

Im Sinne der in unserer ersten Abhandlung angestellten theoretischen Betrachtungen über Chelidonsäure und damit auch über Pyron lassen sich zwei isomere Monocarbonsäuren, 4 Dicarbonsäuren und sechs Oxydicarbonsäuren des Pyron's voraussehen. Um die Nomenclatur der Pyronderivate in Übereinstimmung zu halten mit jener der aus ihnen zu erhaltenden Oxypyridin- und Pyridinderivate kann man die Wasserstoffatome des Pyrons im Sinne der Formel:



mit den Zahlen 2, 3, 5, 6 bezeichnen. Dann ist Chelidonsäure als [2, 6] Dicarbonsäure, Komansäure als [2] Monocarbonsäure des Pyrons zu betrachten und wäre Stelle 2 mit 6, sowie 3 mit 5 gleichwerthig. Die Mekonsäure, welche bekanntlich sehr leicht Kohlensäure abspaltet, enthält nur eines ihrer Carboxyle in gleicher Bindung wie Chelidonsäure und ist daher keinesfalls eine Oxychelidonsäure.

Übereinstimmend mit obiger Darlegung nimmt auch Ost an, dass Chelidonsäure carboxylirte Komansäure ist, nur ist sein Schluss, der sich auf das ähnliche Verhalten von Chelidonsäure und Komansäure gegen Basen, sowie auf die Identität der aus

[1] Monatshefte für Chemie 1885, pag. 103.

beiden Säuren erhaltenen Oxypyridine stützt, minder zuverlässig als der oben von uns gegebene Nachweis, dass Komansäure durch Kohlensäureabspaltung aus Chelidonsäure direkt hervorgeht.

Zur Ergänzung des hier und in unserer I. Abhandlung über die Äther der Chelidonsäure Mitgetheilten, schliessen wir hier die Beobachtungen an, die Herr Hofrath Prof. v. Zepharovich an den Krystallen des neutralen chelidonsauren Äthyläthers $C_7H_2O_6(C_2H_5)_2$ anzustellen die Güte hatte:

Krystallsystem Triklin

Elemente: $a:b:c = 1\cdot5794:1:0\cdot5033$,

$\xi(bc) = 96°\ 8'\ 50''$; $\eta(ca) = 109°\ 21'\ 50''$; $\zeta(ab) = 92°\ 9'\ 40''$.

Formen: $a(100)\infty P\breve{\infty}$. $b(010)\infty P\breve{\infty}$. $c(001)oP$. $\rho(20\bar{1})2'P\breve{\infty}$ $r'(\bar{1}01), P, \breve{\infty}$. $p(110)\infty P$. $o(111)P$.

Die Combinationen sind entweder von den nahezu gleich ausgedehnten drei Pinakoiden vorwaltend begrenzt, oder nach der Vertikale säulig, bei vorwiegendem (100) oder (010) gestaltet. Die Formen des ersten Habitus liessen genaue Messungen zu. (111) ist immer, (110), (201) und ($\bar{1}01$) sind nur selten und untergeordnet zu finden.

Flächen	Rechnung	Messung	Z
ac (100.001)	— —	70° 15·5	9
ab (100.010)	— —	85 31·4	10
bc (010.001)	— —	82 42·7	8
pa (110.100)	53 13	53 9	3
pc (110.001)	73 33·8	73 32	2
oa (111.100)	— —	57 47	8
ob (111.010)	— —	61 7.4	12
oc (111.001)	25 55	25 52·2	8
op (111.110)	47 38·8	47 37	3

Die Krystalle sind spaltbar nach (010). Die Auslöschungen sind auf sämmtlichen Flächen schief gegen die Kanten gerichtet; durch (001) und (111) sieht man je eine schief austretende opt. Axe.

Ammonchelidonsäure.

Mit dem Namen Ammonchelidonsäure haben wir in unserer vorläufigen Mittheilung die Verbindung bezeichnet, welche aus Chelidonsäure durch Einwirkung von Ammoniak entsteht, im Sinne der Gleichung

$$C_7H_4O_6 + H_3N = C_7H_5NO_5 + H_2O.$$

Lietzenmayer[1] und vor Kurzem auch Lerch,[2] der sie Chelidammsäure nennt, haben diese Verbindung bereits beschrieben. Wir haben für unsere Arbeit nur die Angaben des Ersteren benützen können. Er gibt für die Bereitung der Säure folgende Vorschrift, der wir im Wesentlichen gefolgt sind. Chelidonsaures Calcium, dasjenige Präparat, das man vom Safte des Chelidonium majus ausgehend zuerst rein erhält, wird mit Ammoncarbonat in Siedhitze zerlegt, die erhaltene Lösung mit überschüssigem Ammoniak $^1/_4$—$^1/_2$ Stunde gekocht, eingedampft und die neue Säure durch Salzsäure ausgefällt. Wir haben dem nur hinzuzufügen, dass es behufs vollständiger Umwandlung der Chelidonsäure rathsam ist, das Kochen mit Ammoniak längere Zeit, etwa 4—5 Stunden fortzusetzen und bei der Zerlegung des Ammonsalzes einen erheblichen Überschuss von Salzsäure anzuwenden, da andernfalls das ausfallende Product leicht etwas Ammoniak enthält. Die bei der Darstellung der Ammonchelidonsäure auftretende starke Gelbfärbung der Flüssigkeit, die bei fortgesetztem Kochen mit Ammoniak wieder abnimmt, lässt es wahrscheinlich erscheinen, dass eine intermediäre Bildung von Xanthosäure oder vielleicht einer dieser ähnlichen stickstoffhältigen Säure erfolgt.

Ammonchelidonsäure stellt ein weisses Pulver dar, das fast gar nicht in kaltem und nur schwer in heissem Wasser löslich ist. Sie unterscheidet sich schon hiedurch, sowie durch viele andere Reactionen, sehr scharf von Chelidonsäure. Von Alkalien wird sie farblos gelöst und bleibt auch beim Kochen damit völlig unverändert, ein Verhalten, welches man dazu benützen kann, eine etwaige Verunreinigung durch Chelidonsäure zu entdecken. Diese

---

[1] Inauguraldissertation, Erlangen 1878.

[2] Monatsh. f. Chemie 1884, pag. 383.

würde sich durch Gelbfärbung und Bildung von Oxalsäure bei fortgesetztem Kochen zu erkennen geben.

Zum Nachweise der Ammonchelidonsäure lässt sich das Auftreten einer gelben Färbung mit Eisenoxydulsalzen und einer rothgelben mit Eisenoxydsalzen benützen. Letztere Reaction wird bei Anwendung der neutralen Salze der Säure empfindlicher.

Sehr charakteristisch ist auch der von Lietzenmayer erwähnte gelatinöse in Wasser nur spurenweise lösliche Niederschlag, den Silbernitrat selbst in einer Lösung der freien Säure hervorbringt.

Durch Versetzen von Ammonchelidonsäure mit Bromwasser und Abdampfen erhält man Krystallnadeln eines Disubstitutionsproductes, dessen Lösung durch Eisenchlorid intensiv purpurroth gefärbt wird.

Ammonchelidonsäure löst sich in concentrirter Schwefelsäure farblos auf und kann damit selbst bis auf 200° erhitzt werden, ohne irgend eine Veränderung zu erleiden. Durch Verdünnen mit Wasser wird sie aus dieser Lösung wieder abgeschieden.

Beim Erhitzen für sich auf 230° oder mit Wasser auf 196° spaltet sich die Säure in Kohlendioxyd und Oxypyridin C_5H_5NO. Beim Erhitzen mit Zinkstaub liefert sie Pyridin.

Durch Einwirkung von Natriumamalgam in alkalischer Lösung verwandelt sie sich in eine syrupöse stickstoffhältige Säure.

Die Ammonchelidonsäure ist nach der von Lietzenmayer und Lerch ermittelten Zusammensetzung einiger ihrer Metallverbindungen und ihres Äthers eine starke zweibasische Säure, die aber unter Umständen auch drei Atome Metall binden kann. Jedenfalls enthält sie zwei Carboxylgruppen, was auch aus unseren anderweitigen Untersuchungen mit Sicherheit hervorgeht. Der Umstand, dass Ammonchelidonsäure in Mineralsäuren, selbst in verdünnten, viel löslicher ist, als in reinem Wasser, weist darauf hin, dass sie auch schwach basische Eigenschaften besitzt.

Chlorwasserstoffsaure Ammonchelidonsäure. Zur Darstellung dieser Verbindung erhitzten wir Ammonchelidonsäure mit concentrirter Salzsäure im geschlossenen Rohre, bis vollständige Lösung erfolgte. Beim Erkalten schieden sich kleine glänzende Krystalle ab, welche behufs Analyse auf Thonplatten

gebracht und über Ätzkalk und Schwefelsäure getrocknet wurden. Sie entsprechen der Formel: $C_7H_5NO_5.HCl+H_2O$.

0·2955 Grm. Substanz verbrauchten zur Neutralisation 14·1 CC. Ammoniak, das ist 0·0657 Grm. NH_3, das ist für 100 Theile der Verbindung 22·23, während die Rechnung für 3 Moleküle Ammoniak auf 1 Molekül der Verbindung 21·47 ergibt. Zur Ausfällung der ClH als AgCl war so viel $^1/_{10}$ normaler Silberlösung erforderlich, als 0·04445 Grm. HCl entspricht, das ist für 100 Theile der Substanz 15·04% HCl, während sich 15·87% berechnen.

Die Verbindung wird durch Wasser in ihre Componenten zerlegt.

Einwirkung der Wärme auf Ammonchelidonsäure. Erhitzt man Ammonchelidonsäure auf 120—140°, so verliert sie zunächst Krystallwasser. Dieser Verlust wurde von uns in einem Versuch bei 165° gleich einem Molekül für ein Molekül der Säure gefunden. Bei nachträglichem Stehen an der Luft wird das verlorene Wasser wieder vollständig aufgenommen.

1·9854 Grm. lufttrockene Säure verloren nichts über Schwefelsäure darauf bei 165°: 0·1816 Grm. Nach 14tägigem Stehen an der Luft wog die Substanz wieder 1·9788 Grm.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet
H_2O.....	9·15	8·96

Auch Lietzenmayer hat beim Erhitzen der Säure auf 140—150° Gewichtsabnahme beobachtet, sagt jedoch, dass diese erst bei 180—190° einem ganzen Molekül Wasser entspricht. Er neigt sich der Ansicht zu, dass das fortgehende Wasser nicht als Krystallwasser, sondern als zur Constitution der Säure gehörig aufzufassen sei.

Bei weiterem Erhitzen der Ammonchelidonsäure etwa auf 230—250° wird sie unter Bildung des weiter unten zu besprechenden Oxypyridins völlig zersetzt, und zwar im Sinne der Gleichung

$$C_7H_5NO_5 = C_5H_5NO+2CO_2,$$

deren Richtigkeit wir durch quantitativ ausgeführte Versuche bestätigt haben.

A. 2·2833 Grm. lufttrockene Säure ($C_7H_5NO_5+H_2O$) wurden in einem kleinen langhalsigen Kölbchen im Metallbade auf 230—250° und schliesslich noch einige Zeit auf 260° erhitzt. Zuletzt wurde ein Strom trockener Luft durchgeleitet. Das Kölbchen war mit einem Chlorcalciumrohre und einem Kaliapparat verbunden, von welchen während der Operation das erstere um 0·1860 Grm., das letztere um 0·9885 Grm. zunahm. Der braun gefärbte Rückstand im Kölbchen betrug 1·0605 Grm.

B. In derselben Weise gaben 1·8352 Grm. Substanz 0·7952 Grm. CO_2, 0·1751 Grm. H_2O und 0·8493 Grm. Rückstand.

Erhalten aus 100 Theilen Ammonchelidonsäure:

	A.	*B.*	Berechnet
H_2O	8·15	9·54	8·96
CO_2	43·29	43·33	43·78
Rückstand C_5H_5NO	46·45	46·28	47·26

Bei Ausführung derselben Operationen im grösseren Massstabe haben wir manchmal einen Geruch nach Pyridin wahrgenommen, doch entsteht solches, wenn überhaupt, nur in sehr geringer Menge. Bei Gegenwart von Wasser erfolgt die Zersetzung der Ammonchelidonsäure, wie es scheint, schon bei einer etwas niedrigeren Temperatur, als beim Erhitzen für sich. Indem wir die Säure mit der 20 fachen Menge H_2O durch 24 Stunden auf 196° erhitzten, erhielten wir Kohlensäure und eine farblose Lösung, die nur mehr Spuren unveränderter Substanz, dagegen reichlich Oxypyridin enthielt.

Destillation der Ammonchelidonsäure mit Zinkstaub. Wir verfuhren derart, dass wir die Säure mit dem 15 fachen Gewichte Zinkstaub innig vermengten und bei möglichst niedriger Temperatur — eben bemerkbarer Rothgluth — aus einem Glasrohre destillirten.

Die austretenden Dämpfe wurden durch einen Will-Varrentrapp'schen Kugelapparat mit verdünnter Salzsäure geleitet, welche reichliche Mengen eines mit farbloser Flamme brennenden Gases — wohl Kohlenoxyd — unabsorbirt liess. Der Inhalt des Kugelapparates hinterliess beim Abdampfen ein leicht zerfliessliches Salz, welches mit Kalilauge gekocht, ein unverkennbar nach Pyridin riechendes Destillat lieferte. Letzteres, mit Salzsäure abgedampft und mit Platinchlorid gefällt, gab ein Platindoppelsalz, welches in Aussehen, Löslichkeit und Zusammensetzung mit Pyridinchloroplatinat übereinstimmte.

0·1251 Grm. Chloroplatinat verloren nichts bei 100° und gaben 0·0430 Grm. Pt.

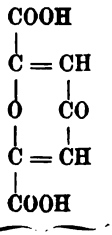
	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $(C_5H_5NHCl)_2PtCl_4$
Pt.....	34·37	34·31

Nach dem gesammten chemischen Verhalten der Ammonchelidonsäure, wie es vorstehend beschrieben ist, ist es evident, dass dieser Körper kein Amid der Chelidonsäure darstellt, dass er vielmehr den Stickstoff in einer besonders festen und eigenthümlichen Weise gebunden enthält, über welche die Reduction zu Pyridin durch Zinkstaub wenigstens eine Andeutung gibt.

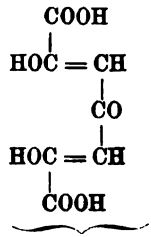
Lietzenmayer glaubte die Zusammensetzung der Säure durch die Formel $C_7H_7NO_6$ ausdrücken zu müssen, indem er das bei höherer Temperatur entweichende Wasser als zur Constitution gehörig betrachtete. Dass dem nicht so ist und dass der unzersetzten trockenen Substanz vielmehr die Formel $C_7H_5NO_5$ zukommt, ergibt sich nicht nur daraus, dass sie ihr verlorenes Krystallwasser sehr leicht wieder aufnimmt und dabei alle Eigenschaften der ursprünglichen, nicht erhitzten Substanz wieder gewinnt, sondern in noch sicherer Weise aus der später anzuführenden Beobachtung, dass die in ganz analoger Weise aus Methylamin und Chelidonsäure dargestellte Methylammonchelidonsäure kein Krystallwasser enthält und der Formel $C_7H_4(CH_3)NO_5$ entspricht.

Nach ihrer empirischen Zusammensetzung enthält die Ammonsäure ein **N** und ein **H** mehr, dagegen ein **O** weniger als Chelidonsäure. Dies fehlende **O** kann nicht einer Carboxylgruppe entnommen worden sein, da die Ammonsäure ebenso wie Chelidonsäure deren zwei enthält. Es muss also der Angriff des Ammoniaks auf eines der beiden Sauerstoffatome des Pyronkernes erfolgt sein und es erscheint zweifelhaft, welches derselben oder ob beide an der Umsetzung betheiligt sind. Erwägt man, dass die Ammonsäure mit Kali weder eine Xanthosäure noch Oxalsäure, und dass sie durch Reduction Pyridin liefert, so wird es sehr wahrscheinlich, dass das an zwei **C** gebundene **O** der Chelidonsäure ausgetreten und durch **N**, respective **NH** ersetzt worden ist, welcher Vorgang

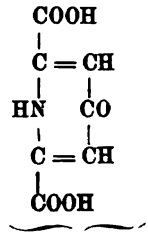
vielleicht durch eine intermediäre Bildung von Xanthosäure (oder auch einer dieser ähnlichen stickstoffhältigen Säure) eingeleitet wird.



Chelidonsäure

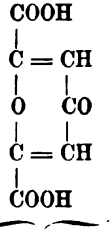


Xanthochelidonsäure

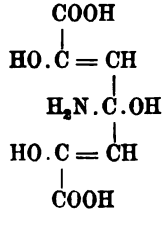


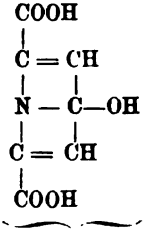
Ammonchelidonsäure (1)

Durch die Auffassung, dass die Ammonsäure den Stickstoff an der bezeichneten Stelle enthält, wird übrigens die Möglichkeit nicht ganz ausgeschlossen, dass der Angriff des Ammoniaks vielleicht zuerst am CO erfolgt und dieses in $H_2N.C.OH$ überführt, nur müsste man zugleich annehmen, dass das H_2N mit dem O der Chelidonsäure oder den beiden OH der Xanthosäure Wasser abspaltet, wie folgende Formeln zeigen:



Chelidonsäure





Ammonchelidonsäure (2)

Eine Ammonchelidonsäure der zuletzt ausgedrückten Constitution (2) könnte sich sehr wohl in eine Säure der Constitution (1) umsetzen, sowie auch der umgekehrte Fall denkbar wäre.

Welche der beiden Formeln, (1) oder (2), die wahrscheinlichere ist, wird, da die vorstehenden Beobachtungen noch keinen Anhaltspunkt zur Entscheidung bieten, später discutirt werden. Dass in der Ammonchelidonsäure 3 H durch Metalle vertretbar sind, ist sowohl bei der durch (1) wie auch bei der durch (2) ausgedrückten Constitution zu verstehen.

Dibromammonchelidonsäure.[1]

Versetzt man in Wasser aufgeschlämmte Ammonchelidonsäure mit wenig Brom so verschwindet allmälig die gelbe Färbung des letzteren. Fährt man mit dem Zusatz von Brom fort, bis die Flüssigkeit durch längere Zeit gelb bleibt, so geht, falls genügend Wasser vorhanden ist, die Ammonsäure vollständig in Lösung. Nachdem man die gebildete Bromwasserstoffsäure durch mehrmaliges Abdampfen mit Wasser entfernt hat, gelingt es leicht, das neu gebildete Bromsubstitutionsproduct der Ammonsäure durch einmaliges Umkrystallisiren rein zu erhalten. Es stellt dann weisse, in heissem Wasser leicht, in kaltem schwerer lösliche Krystallnadeln dar, die durch eine intensive fuchsinrothe Eisenchloridreaction und durch einen schwer löslichen Niederschlag, den sie mit Silbernitrat geben, charakterisirt sind.

A) 0·3160 Grm. der zwischen Papier gepressten Substanz mit vorgelegtem Ag vebrannt, lieferten 0·2617 Grm. CO_2 und 0·0610 Grm. H_2O.

B) 0·2940 Grm. Substanz mit CaO geglüht etc. gaben 0.2961 Grm. AgBr.

C) 0·3275 Grm. gaben 0·3286 Grm. AgBr.

	Gefunden in 100 Theilen			Berechnet für $C_7H_3Br_2NO_5+2H_2O$
	A	B	C	
C	22·59	—	—	22·28
H	2·15	—	—	1·86
Br	—	42·86	42·70	42·44

Der Körper entspricht also der Zusammensetzung $C_7H_3Br_2NO_5+2H_2O$ und ensteht nach der Gleichung

$$C_7H_5NO_5+2Br_2=C_7H_3Br_2NO_5+2BrH$$

Quantitative Versuche, bei denen wir die Menge des verbrauchten Bromes, sowie des gebildeten Bromwasserstoffes und der gebromten Säure ermittelt haben, ergaben, dass die Einwirkung von Brom auf Ammonchelidonsäure fast ausschliesslich im angedeuteten Sinne verläuft.

[1] Vergleiche unsere vorläufige Mittheilung. Monatshefte 1883, pag. 275 und Lerch 1884, pag. 397.

Versucht man Dibromammonchelidonsäure mittelst Ammoniak (Lakmus als Indicator) zu titriren, so findet man, dass Neutralität (wenn auch nicht ganz scharf zu beobachten) erst eintritt, wenn auf ein Molekül der Säure drei Moleküle Ammoniak verbraucht sind.

0·2140 Grm. krystallwasserhaltender Säure neutralisirten bis zu deutlich auftretender Blaufärbung 6·3 Cc. Ammoniak (1 Cc. = 0·00466 Grm. NH_3) statt der für 3 Moleküle berechneten 6·21 Cc.

Da Ammonchelidonsäure sich beim Titriren wie eine zweibasische Säure verhält, obgleich sie unter Umständen dreibasisch functioniren kann, so ergibt sich, dass ihr schwach ausgesprochener dreibasischer Charakter durch den Eintritt von Brom wesentlich gekräftigt worden ist. Gleichwohl tritt auch in der Dibromammonsäure die dritte Basicität viel schwächer auf als die beiden anderen. Dies zeigt sich an dem undeutlich eintretenden Endpunkte der Reaction beim Titriren, und besonders auch darin, dass beim Abdampfen der Säure mit Ammoniak nicht das tertiäre sondern nur das secundäre Ammonsalz erhalten wird.

Führt man die Bromirung der Ammonchelidonsäure in etwas grösserem Massstabe durch, so findet man, dass gleichzeitig eine, wenn auch nur kleine Menge der Säure oxydirt wird, worauf auch der Umstand hinweist, dass der Bromverbrauch ein bischen grösser ist als der oben angeführten Gleichung entspricht. Die Producte dieser Oxydation sind Kohlensäure, geringe Mengen eines stechend riechenden flüchtigen Körpers (vielleicht gebromtes Aceton?) und Spuren von Oxalsäure und Ammoniak, die sich in der letzten Mutterlauge des Rohproductes nachweisen lassen.

Zerlegung der Dibromammonchelidonsäure durch Wärme. Wie die Chelidonsäure und die Ammonchelidonsäure zerfällt auch die Dibromammonsäure durch Erhitzen unter Abspaltung von $2CO_2$. Die Reaction beginnt schon bei 200° und verläuft nach der Gleichung:

$$C_7H_3Br_2NO_5 = C_5H_3Br_2NO + 2CO_2$$

Da die Zersetzung etwas heftig verläuft und auch der hinterbleibende Körper $C_5H_3Br_2NO$ — Dibromoxypyridin — etwas sublimirbar ist, wurde dessen Menge bei folgendem quantitativen Versuche um etwas geringer als die berechnete, dagegen das direct bestimmte Krystallwasser etwas zu hoch gefunden.

1·3734 Grm. krystallisirter Dibromammonchelidonsäure ($C_7H_3Br_2NO_5 + 2H_2O$) gaben in ähnlicher Weise, wie es früher bei der Ammonsäure beschrieben wurde, 0·1554 Grm. Wasser, 0·3070 Grm. CO_2 und 0·9070 Grm. Rückstand.

	Gefunden für 100 Theile	Berechnet
CO_2	22·35	23·34
H_2O	11·31	9·55
$C_5H_3Br_2NO$	66·04	67·11

Nachdem das Product, das durch Einwirkung von Ammoniak auf Chelidonsäure entsteht in seinen Beziehungen zu seiner Muttersubstanz, zum Pyridin, sowie auch zu dem durch Abspaltung von Kohlensäure daraus hervorgehenden sogenannten Oxypyridin bis zu einem gewissen Grade erforscht war, musste es ein erhebliches Interesse bieten die Einwirkung von primären und secundären Aminen auf Chelidonsäure kennen zu lernen. Wenn überhaupt eine derjenigen von Ammoniak analoge Einwirkung erfolgte, so war es doch fraglich, ob bei der Reaction das Alkyl nicht in irgend einer Form etwa als Alkohol abgespalten werde und Ammonchelidonsäure entstehe, oder ob eine alkylirte Ammonsäure gebildet wird. In letzterem Falle konnte man hoffen, die Stellung, die das Alkyl im Molekül der neuen Verbindung einnimmt, leichter zu erforschen, als es bei dem in der Ammoniakreaction zugleich mit dem Stickstoff eintretenden Wasserstoffatom der Fall ist.

Methylammonchelidonsäure.

Die Einwirkung von Methylamin auf Chelidonsäure verläuft ganz ähnlich jener von Ammoniak. Wir liessen eine circa 5percentige wässerige Lösung von Methylamin in reichlichem Überschusse auf Chelidonsäure im zugeschmolzenen Rohre durch 5—6 Stunden bei 100° einwirken. Die Anfangs (vielleicht durch Bildung von Xanthosäure) gelb gewordene Lösung wird bald wieder farblos. Durch Abdestilliren des überschüssigen Methylamins und Versetzen des Rückstandes mit Salzsäure erhielten wir die neue Verbindung in Form sich alsbald abscheidender glänzender Krystallkörner. Sie ist in Wasser weit löslicher als

Ammonchelidonsäure und konnte daher leicht durch Umkrystallisiren gereinigt werden. Übrigens entsteht sie fast ohne weiteres völlig rein und ist nur mit Spuren von Ammonchelidonsäure (jedenfalls von einem geringen Ammoniakgehalt des angewandten Methylamins stammend) verunreinigt. Auch haben wir uns sorgfältig überzeugt, dass bei der Reaction kein Methylalkohol gebildet wird, dass also die Methylgruppe des Amins mit in die neue Säure, welche wir als Methylammonchelidonsäure bezeichnen wollen, eingegangen ist. Eine mit der über Schwefelsäure getrockneten Substanz ausgeführte Stickstoffbestimmung ergab einen der Formel $C_8H_7NO_5$ entsprechenden Stickstoffgehalt:

0·2220 Grm. Substanz verloren nichts bei 100° und gaben 14 Cc. Stickstoff bei 19° C. und einem auf 0° reducirten Barometerstand von 756·3 Mm. Der Stickstoff wurde über Kalilauge gemessen, die bei 19° eine Dampftension von 13·1 Mm. besitzt.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_8H_7NO_5$
N.....	7·24	7·13

Methylammonchelidonsäure gibt in wässeriger Lösung mit Eisenchlorid eine intensiv gelbe Färbung, welche durch überschüssige Säuren und Alkalien zum Verschwinden gebracht werden kann. Silbernitrat bewirkt keinen Niederschlag in der Lösung der freien Säure — abweichend von Ammonsäure — wohl aber gibt es mit neutralen Lösungen eine krystallinische Fällung, die sich beim Kochen löst und beim Erkalten wieder abscheidet.

Verhalten der Methylammonsäure in der Wärme. Methylammonsäure zersetzt sich schon bei einer etwas niedrigeren Temperatur als die Ammonsäure; sie beginnt bei etwa 180° in Kohlensäure und in einen Körper C_6H_7NO — Methyloxypyridin — zu zerfallen. Auch diese Reaction haben wir quantitativ verfolgt und sie der Gleichung

$$C_8H_7NO_5 = C_6H_7NO + 2CO_2$$

entsprechend gefunden.

0·9792 Grm. lufttrockener Säure gaben im Metallbad auf 180° und zum Schluss noch auf 220° erhitzt: 0·0071 Grm. H_2O, 0·4295 CO_2 und 0·5430 Grm. Rückstand.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet
CO_2	43·86	44·67
H_2O	0·73	0·00
C_6H_7NO	55·45	55·33

Verhalten der Methylammonchelidonsäure gegen Salzsäure. Man hätte erwarten können, dass unter dem Einflusse von concentrirter Salzsäure bei höherer Temperatur das Methyl der Methylammonchelidonsäure sich als Chlormethyl abspalte. Diess ist jedoch wenigstens bei 143° keineswegs der Fall; es wird lediglich das beim Erkalten auskrystallisirende Chlorhydrat der Säure gebildet. Das letztere stellt wie die analoge Verbindung der Ammonsäure kleine glänzende Krystalle dar, wird durch Wasser zerlegt und vermag drei Moleküle NH_3 zu neutralisiren, woraus sich zugleich ergibt, dass die Methylammonchelidonsäure zweibasisch ist.

0·2945 Grm. der auf Thonplatte und über H_2SO_4 und CaO getrockneten Verbindung wurden durch 14 Cc. Ammoniak (1 Cc = 0·00466 Grm. NH_3) neutralisirt.

	Verbraucht für 100 Theile	Berechnet für $3NH_3$
NH_3	22·14	21·84

Die Einwirkung von Brom auf Methylammonchelidonsäure verläuft in ähnlicher Weise wie es bei der Ammonsäure beschrieben worden. In beiden Fällen werden auf ein Molekül der Säure 4 At. Brom verbraucht, während zwei Moleküle BrH gebildet werden, wie aus folgendem Versuch hervorgeht:

1·9332 Grm. Methylammonchelidonsäure wurden in etwa 200 Cc. Wasser suspendirt und aus einer kleinen gewogenen Pipette mit Brom bis zu bleibender Gelbfärbung versetzt. Es wurden 3·26 Grm. Brom verbraucht. Man berechnet für 4 Br auf ein Molekül der Säure 3·14 Grm. Brom. Von der auf 250 Cc. gebrachten Flüssigkeit erforderten 20 Cc. zur Neutralisation 11·4 Cc. Ammoniak (1 Cc. = 0·00466 Grm) und zur Ausfällung des BrH als BrAg 16 Cc. einer $^1/_{10}$-normalen Silbernitratlösung. Nimmt man an, dass für je ein Molekül der zur Verwendung gekommenen Methylammonsäure 4 Moleküle NH_3 und 2 Moleküle $AgNO_3$ hätten verbraucht werden sollen, so berechnen sich für die angegebenen Mengen 11·46 Cc. Ammoniak und 15·7 Cc. Silberlösung, was mit dem experimentell Gefundenen sehr gut übereinstimmt.

Es ist bemerkenswerth, dass, wie obige Daten zeigen, sich dieses Dibromsubstitutionsproduct (ebenso wie auch die Methylammonsäure selber) als zweibasische Säure erweist, während doch Ammonchelidonsäure und in höherem Masse ihr Bromderivat sich annähernd wie dreibasische Säuren verhalten. Der Grund dieser Erscheinung liegt offenbar darin, dass hier Methyl an Stelle jenes Wasserstoffes steht, der in der Ammonchelidonsäure durch Metalle ersetzbar ist, wenngleich er nicht einer Carboxylgruppe angehört.

Durch Erhitzen von Dibrommethylammonchelidonsäure auf 170° spaltet sie sich in Kohlensäure und einen Körper von der Zusammensetzung $C_5H_2(CH_3)Br_2ON$ und dem Schmelzpunkte 196°. Wir werden weiter unten noch mehrmals Gelegenheit haben, auf dieselbe Verbindung — Dibrommethyloxypyridin — die wir auf mannigfaltige Weise gewonnen haben, zurückzukommen.

Die früher angeführte Beobachtung, dass HCl bei 143° kein CH_3Cl abspaltet, spricht dafür, dass CH_3 in der Methylammonchelidonsäure nicht als OCH_3, sondern eher als NCH_3 enthalten ist. Dann ist es aber bei der Ähnlichkeit der Entstehungsweise und des chemischen Verhaltens, welche zwischen Methylammonchelidonsäure und Ammonchelidonsäure besteht, wahrscheinlich, dass in letzterer Säure, das durch H_3N zugeführte Wasserstoffatom als NH und nicht als OH enthalten ist.

Phenylammonchelidonsäure.

Anilin bei Gegenwart von Wasser längere Zeit mit Chelidonsäure gekocht wirkt ganz ähnlich wie Ammoniak oder Methylamin darauf ein, indem unter vorübergehender Rothfärbung das Anilinsalz einer neuen Säure, der Phenylammonchelidonsäure, sich bildet. Diese kann durch Zersetzen des Anilinsalzes mittelst Salzsäure als krystallinischer Niederschlag gewonnen werden. Aus heissem Wasser krystallisirt sie in Form von seideglänzenden Nadeln, die ein Molekül Krystallwasser enthalten, das schon beim Stehen über Schwefelsäure im Vacuum entweicht.

Bei der Analyse der getrockneten Säure wurden Werthe erhalten, die gut mit den für die Formel $C_7H_4(C_6H_5)NO_5$ berechneten übereinstimmen:

0·3117 Grm. der zwischen Papier gepressten Substanz verloren beim Trocknen im Vacuum über Schwefelsäure: 0·0202 Grm. H_2O, das ist 6·48% statt des für 1 Mol. berechneten 6·50%.

0·2915 Grm. getrockneter Säure gaben nach Kopfer verbrannt 0·6427 Grm. CO_2 und 0·0955 Grm. H_2O.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_{13}H_9NO_5$
C	60·13	60·22
H	3·65	3·48

Phenylammonchelidonsäure gibt ebenso wie Methylammonsäure eine gelbe Färbung mit Eisenchlorid und widersteht dem Angriffe kochender Alkalien.

Beim Erhitzen liefert sie ein krystallinisch erstarrendes Destillat, das ohne Zweifel Phenyloxypyridin ist.

Einwirkung von Dimethylamin auf Chelidonsäure.

Wir liessen Dimethylamin ganz so wie es vorstehend für Methylamin beschrieben auf Chelidonsäure einwirken. Auch dabei trat anfangs eine gelbe Färbung ein, die aber später nicht wieder verschwand, sondern in eine röthliche überging. Das Reactionsproduct wurde, nachdem die flüchtigen Antheile (überschüssiges Dimethylamin und eine mit Jod und Kali Jodoform liefernde Substanz) abdestillirt worden waren, mit Salzsäure versetzt. Die abgeschiedenen, ziemlich leicht löslichen Krystalle wurden durch Thierkohle entfärbt und zeigten dann alle Reactionen der Oxalsäure, als Fällbarkeit durch Gypswasser etc., bestanden aber nicht aus der freien Säure, sondern aus einem sauren Dimethylaminsalz derselben. Durch Fällen mit Bleiacetat und Zersetzen des Bleiniederschlages mittelst Schwefelwasserstoff, konnte leicht völlig reine Oxalsäure erhalten werden, welche nun auch durch ihren Schmelzpunkt von 101° — 102° (krystallwasserhältig) identificirt werden konnte. Der Bildung von Oxalsäure musste jene von Aceton entsprechen. Obwohl das Aceton der Einwirkung des Amins kaum ganz entgangen sein

konnte, glückte es uns doch, eine kleine Menge desselben aus den oben erwähnten flüchtigen und durch Destillation abgeschiedenen Antheilen des Reactionsproductes zu isoliren. Zu diesem Behufe wurden diese flüchtigen Partien, nachdem sie durch Destillation mit Salzsäure von der Aminbase befreit, und durch wiederholte Destillationen angereichert worden waren, mit Pottasche versetzt und so eine kleine Menge einer acetonartig riechenden Schicht erhalten, die mit concentrirter Natriumbisulfitlösung zusammengebracht zu Krystallen erstarrte.

Man sieht hieraus, dass Dimethylamin ganz verschieden von Methylamin und Ammoniak und lediglich als basischer Körper eingewirkt hat. Den Grund dieser auffälligen Erscheinung glauben wir darin zu finden, dass ein secundäres Amin nicht wie Ammoniak und die primären Amine jene beiden Wasserstoffatome liefern kann, welche für den Verlauf der Reaction, die unter Wasserabspaltung erfolgt, erforderlich sind.

Oxypyridin (Pyridon).

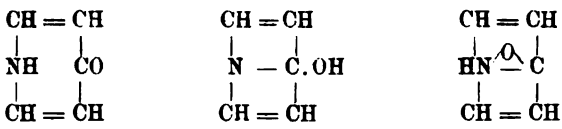
Wir haben bereits vor zwei Jahren in unserer vorl. Mittheilung[1] angegeben, dass die Ammonchelidonsäure sich beim Erhitzen unter Abgabe von so viel Kohlensäure, als ihren beiden Carboxylgruppen entspricht, in einen Körper C_5H_5ON verwandelt, der durch Zinkstaub zu Pyridin reducirt wird und mit Brom ein Dibromsubstitutionsproduct liefert, welches mit dem von Hofmann[2] aus Piperidin erhaltenen Dibromoxypyridin identisch ist. Er enthält ein Wasserstoffatom, das leicht durch Alkoholradikale ersetzt werden kann und das offenbar nicht wie die vier anderen H an Kohlenstoff gebunden ist. Ob aber dieses von den vier anderen unterschiedene Wasserstoffatom an Stickstoff oder Sauerstoff gebunden ist, schien uns lange Zeit zweifelhaft, so dass wir zwischen den folgenden Formeln schwankten, für deren Aufstellung natürlich die Beziehungen zur Ammonchelidonsäure, zur Chelidonsäure und zum Pyridin massgebend waren:

---

[1] Monatshefte f. Ch. 1883, pag. 339, auch Berichte der deutsch. chem. Ges. 1883, pag. 1259.

[2] Berichte der deutschen chem. Ges. 1879, pag. 986.

I. II. III.



Im Zweifel, welche von diesen drei Formeln der richtige Ausdruck für die Constitution der in Rede stehenden Verbindung sei, haben wir vor zwei Jahren der Formel II den Vorzug eingeräumt und dies durch die Bezeichnung Oxypyridin angedeutet, weil auf diese Weise die Beziehung zum Pyridin und zu der von Hofmann als Dibromoxypyridin betrachteten Verbindung am leichtesten verständlich wird, während auch sonst das gesammte chemische Verhalten damit im Einklang steht. Nur ein Umstand schien schon vom Anfang an gegen diese Auffassung zu sprechen, nämlich die Schwerflüchtigkeit des Oxypyridins, das erst oberhalb 350° destillirt, während doch von einem Hydroxylderivat des Pyridins ein minder hoher Siedepunkt zu erwarten wäre. Neuere Versuche haben gezeigt, dass dieses Bedenken begründet war und uns in den Stand gesetzt, die Frage, ob das sogenannte Oxypyridin eine OH- oder eine NH-Gruppe enthalte, mit ziemlicher Sicherheit zu Gunsten der letzteren Auffassung, also von Formel I (eventuell III) zu entscheiden. Wir halten es übrigens nicht für unmöglich, dass in gewissen Reactionen der durch I ausgedrückte Körper sich, wenigstens vorübergehend, in II verwandle und dass umgekehrt, wenn die Bedingungen zur Bildung einer Verbindung II gegeben sind, man bei der Abscheidung statt II leicht I erhält, gewissermassen als ob derselbe Körper in zwei Formen (als I und als II) auftreten könne, von denen I die stabilere Form ist. So lange das eigentliche Oxypyridin von der Formel II nicht entdeckt ist, oder falls gar nachgewiesen werden sollte, dass es kaum entstanden sich immer gleich in I umwandelt, kann vielleicht ohne Verwechslungsgefahr die Bezeichnung Oxypyridin, obgleich sie nicht ganz zutreffend ist, für die aus Ammonchelidonsäure entstehende und dem Pyridin factisch sehr nahe stehende Verbindung C_5H_5ON beibehalten werden. Eventuell könnte die zuerst von Ost gebrauchte, neuerdings wieder von v. Pechmann benützte

Bezeichnung Pyridon an die Stelle treten, doch wäre in diesem Falle zu bemerken, dass die an diesen Namen geknüpften theoretischen Vorstellungen von der Constitution des C_5H_5ON bei Os:, bei v. Pechmann und bei uns verschieden sind.

Darstellung von Oxypyridin. Wie schon bei der Ammonchelidonsäure erwähnt, zerfällt diese Säure beim Erhitzen mit Wasser auf 196° oder beim Erhitzen für sich auf 230° in Kohlensäure und Oxypyridin. In ersterem Falle — Erhitzen mit Wasser — ist das erhaltene Product zwar farblos, aber immer mit Bestandtheilen des bei der hohen Temperatur durch das Wasser aufgeschlossenen Glasrohres, in dem man die Reaction vorgenommen, verunreinigt; im anderen Falle ist es immer bräunlich gefärbt und muss schon deshalb einer weiteren Reinigung unterworfen werden. Umkrystallisiren aus Wasser allein führt nur schwer zum Ziel und wir haben es daher vorgezogen, diesem erst eine Destillation, sei es unter gewöhnlichem Druck —bei über 360° — oder weit besser im Vacuum vorhergehen zu lassen. Zu letzterer Operation benützten wir einen ähnlichen Apparat, wie wir ihn zur Darstellung von Komansäure aus Chelidonsäure anwandten und weiter vorne beschrieben haben. Der aus dem Ölbade ragende Theil des Destillationsrohres war, um ein Zurückfliessen des condensirten Productes zu verhindern, etwas nach abwärts gebogen. Das zu destillirende Material, erhalten durch vorhergehendes Erhitzen von Ammonchelidonsäure auf 230° bis 240°, befand sich in geräumigen Schiffchen. Um ein Überspritzen während der Operation zu verhindern, wurde ein lockerer Glaswollbausch eingeschoben. Erhitzt man das Ölbad auf 240°—250°, während gleichzeitig ein ganz schwacher (getrockneter) Luftstrom das evacuirte Rohr durchströmt, so destillirt allmälig das Oxypyridin und verdichtet sich als rasch krystallinisch erstarrende Masse. Im Schiffchen bleibt wenig einer braunen schmierigen Masse zurück.

Aber auch das destillirte Oxypyridin ist, wenn gleich farblos, noch keineswegs absolut rein. Namentlich enthält es fast unter allen Umständen eine kleine Menge einer Base, die sich durch eine in Wasser fast unlösliche Doppelverbindung mit Platinchlorid auszeichnet. Zur völligen Reindarstellung krystallisirt man es aus heissem Wasser um, wobei die verunreinigende

Base, obwohl an sich, wie es scheint schwerer löslich als Oxypyridin, ihrer geringen Menge wegen in den Mutterlaugen bleibt. Diesen letzteren kann die fremde Base durch Ausfällung mit Platinchlorid sehr leicht, oder minder vollständig durch Ausziehen mit Chloroform — von welchem aber auch etwas Oxypyridin gelöst wird — entzogen werden.

Oxypyridin löst sich sehr reichlich in heissem Wasser, damit eine dickliche, stark lichtbrechende Flüssigkeit gebend, die beim Abkühlen je nach der Concentration entweder vollständig erstarrt oder farblose grosse tafelförmige Krystalle abscheidet. Diese Krystalle enthalten Krystallwasser, das beim Liegen an der Luft langsam, rasch und vollständig dagegen beim Stehen über Schwefelsäure entweicht. Seine Menge wurde in zwei Bestimmungen immer etwas grösser als einem Molekül entsprechend gefunden und sind wir vorläufig ausser Stande anzugeben, ob dies etwa durch Verunreinigung mit einer krystallwasserreicheren Verbindung zu erklären ist.

a) 0·2130 Grm. der zwischen Papier sehr sorgfältig abgepressten Krystalle verloren über H_2SO_4 bis zu constantem Gewicht getrocknet 0·0393 H_2O.

b) 0·5945 Grm. einer andern Krystallisation verloren 0·1098 Grm. H_2O.

Aus $C_5H_5NO + H_2O$ für 1 Mol. H_2O berechnet ..... 15·93% H_2O
gefunden *a)* ..... 18·45 „ „
„ *b)* ..... 18·47 „ „

Herr Prof. Hofrath v. Zepharovich hatte die Güte, eine krystallographische Untersuchung des wasserhaltenden Oxypyridins vorzunehmen und theilte uns darüber folgendes mit:

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a : b : c = 0{\cdot}548 : 1 : 1{\cdot}496$$
$$\beta = 85^\circ\ 37'$$

Formen: $\underset{b}{\infty \bar{P}\infty} . \underset{q}{\bar{P}\infty} . \underset{r'}{\bar{P}\infty} . \underset{p}{\infty P} . \underset{\pi}{\infty \bar{P}_2} . P$.

Sechsseitige rhomboïdische Täfelchen mit allseitig zugeschärften Rändern; $\infty \bar{P} \infty$ bedingt die Tafelform.

Die sämmtlichen Messungen sind unsicher; da überdies der unter dem Mikroskop gemessene Winkel β, d. i. die Neigung der vorderen ∞P- zur oberen $\bar{P}\infty$-Kante, als Grundwerth für die Rechnung benützt werden musste, so sind die angegebenen Elemente nur als annähernd richtig zu betrachten.

Die wichtigsten Kantenwinkel sind:

	Berechnet	Gemessen	Zahl
pb =	—	*61·20	18
πb =	42·26½	42·26	12
qb =	—	*63·40	9
$r'b$ =	90 —	89·58	18
$r'p'$ =	55·53	56· 5	1

Auf $\infty P\infty$ sind die Auslöschungen gegen die vordere Kante von ∞P unter 47° 53′, gegen die rückwärtige ∞P-Kante unter 42° 7′ geneigt. Die optischen Axen liegen || dem Klinopinakoide.

Der Schmelzpunkt des krystallwasserhaltenden Oxypyridins liegt bei 66—67°, jener des wasserfreien bei 148°5 (corr.). Die Elementaranalyse der über Schwefelsäure getrockneten Verbindung ergab folgende für die Formel C_5H_5NO stimmenden Werthe:

A. 0·1737 Grm. Substanz gaben nach Kopfer verbrannt: 0·0855 Grm. H_2O und 0·4034 Grm. CO_2.

B. 0·1774 Grm. Substanz gaben 0·4125 Grm. CO_2 und 0·0850 Grm. H_2O.

	Gefunden in 100 Theilen		Berechnet für C_5H_5NO
	A.	*B.*	
C	63·34	63·42	63·16
H	5·47	5·32	5·26

Oxypyridin, wie schon erwähnt, leicht löslich in Wasser, ist fast unlöslich in Äther und Benzol, auch sehr schwer in Chloroform. Unter gewöhnlichem Athmosphärendrucke destillirt es fast unzersetzt erst bei einer über 350° liegenden Temperatur.

Verdünnte Oxypyridinlösungen reagiren neutral; nur in sehr concentrirten macht sich eine schwach alkalische Reaction bemerkbar. Beim Kochen mit Alkalien bleibt es unverändert.

Eine Lösung von Oxypyridin nimmt Brom unter Entfärbung auf, damit einen weissen krystallinischen Niederschlag von Dibromoxypyridin gebend.

Eigenthümlich ist das Verhalten einer Lösung von Jod in Jodkalium gegen Oxypyridin. War dieses rein, so tritt keine sichtliche Veränderung ein. Fügt man aber Salzsäure hinzu, so entsteht ein öliger schwarzer Niederschlag, während auf Zusatz

von Sodalösung oder wenig Alkali ein weisser krystallinischer Niederschlag ausfällt. Der erstere ist wohl ein Perjodid des jodwasserstoffsauren Salzes, der letztere ein Dijodsubstitutionsproduct.

Schwer lösliche Niederschläge geben Oxypyridinlösungen noch mit Phosphorwolframsäure und Phosphormolybdänsäure; leicht lösliche krystallinische Abscheidungen mit Quecksilberchlorid, noch leichter lösliche mit Gold- und Platinchlorid. Durch Eisenchlorid entsteht eine gelbe Färbung, die beim Stehen etwas röthlich wird. Erhitzt man Oxypyridin mit überschüssigem Zinkstaub, so wird es zu Pyridin reducirt.

Stark toxische Eigenschaften scheinen dem Oxypyridin kaum zuzukommen, wenigstens zeigte sich, wie wir einer gefälligen Mittheilung des Herrn Prof. v. Fleischl entnehmen, keinerlei Wirkung, als einem Frosche 20 Mgr. in vierpercentiger Lösung subcutan injicirt wurden.

Oxypyridinchloroplatinat bildet in Wasser sehr leicht lösliche körnige Krystalle, die, wenn aus nicht zu saurer Lösung durch Eindunsten bei gewöhnlicher Temperatur dargestellt, zwei Moleküle Wasser enthalten. Es verwittert sehr langsam an der Luft, dagegen rasch über Schwefelsäure.

0·1780 Grm. verloren über H_2SO_4 0·0100 Grm., bei darauffolgendem Erhitzen auf 100° nichts mehr und gaben 0·0547 Grm. Pt.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $(C_5H_5NO.HCl)_2PtCl_4+2H_2O$
Pt	30·73	30·64
$2H_2O$	5·62	5·66

Herr Prof. Hofrath v. Zepharovich theilte uns über das Doppelsalz folgende krystallographische Daten mit:

Krystallsystem: Monoklin (monosymmetrisch)

Elemente: $a : b : c = 1·3561 : 1 : 0·9485$;

$\xi\,(bc) = 90°$; $\eta\,(ac) = 100°\ 6'$; $\zeta\,(ab) = 90°$.

Formen: $a\,(100)\ \infty P\infty . b\,(010)\ \breve{\infty}P\infty$, $q\,(011)\ \breve{P}\infty$, $p\,(110)\ \infty P$, $i'\,(\bar{2}11)\ 2\breve{P}2$.

An den Kryställchen erscheinen gewöhnlich a und q vorwaltend und gleichmässig ausgedehnt, bei sehr untergeordneten b, p und i'. Die wichtigsten Winkel sind:

Flächen	Rechnung	Messung	n[1]
ab (100·010)	= 90 —	89° 59·5'	7
pa (110·100)	—	53 10	13
qa (011·100)	—	82 38	27
qq' (011·0$\bar{1}$1)	—	86 4·5	20
qb (011·010)	46 57·7'	47 5	8
i'b ($\bar{2}$11·010)	59 27	—	—
i'q ($\bar{2}$11·011)	49 24·2	49° 37'	1

Vollkommene Spaltbarkeit nach *a*. Auslöschungen in den Spaltlamellen parallel und senkrecht zur Kante *ap*. Ebene der optischen Axen normal-symmetrisch; Winkel der optischen Axen circa $81^1/_2°$ für gelb, 1 Bissectrix circa $29^1/_2°$ gegen die Normale auf *a* geneigt (Mohnöl).

Das getrocknete Salz schmilzt unter starker Zersetzung bei ungefähr 200°.

Es sei schliesslich erwähnt, dass wir einmal unter nicht genau festgestellten Umständen aus einer stark sauern Lösung ein Chloroplatinat mit nur einem Molekül Krystallwasser erhielten.

Platinosalz des Oxypyridins. Anderson hat bekanntlich gefunden, dass die Platindoppelsalze der von ihm aus dem animalischen Theer isolirten Pyridinbasen beim Kochen mit Wasser eine eigenthümliche Zersetzung erleiden, bei der Salzsäure eliminirt wird und neue Platinverbindungen entstehen, die durch gelbe Farbe und äusserst geringe Löslichkeit in Wasser ausgezeichnet sind. So entsteht aus Pyridinchloroplatinat ein Körper $(C_5H_5N)_2\ PtCl_4$ und als Zwischenproduct eine Doppelverbindung desselben mit unverändertem Pyridinsalz $(C_5H_5N)_2\ PtCl_4 + (C_5H_5N.HCl)_2\ PtCl_4$. Nachdem diese eigenthümliche Umwandlung für die Pyridinbasen charakteristisch ist, haben wir auch das Oxypyridinchloroplatinat der Einwirkung kochenden Wassers unterworfen. Es wird dabei sehr schnell zersetzt, so dass man beim Abkühlen der Lösung ein hellgelbes Salz erhält, welches beträchtlich schwerer löslich ist als die ursprüngliche Verbindung. Die Elementaranalyse ergab, dass es gemäss der Formel $(C_5H_5NO.)_2\ PtCl_4 + (C_5H_5NO.HCl)_2\ PtCl_4 + H_2O$

[1] Zahl der Messungen.

also entsprechend dem von Anderson dargestellten oben erwähnten Pyridindoppelsalz zusammengesetzt ist.

0·3435 Grm. des zwischen Papier abgepressten Salzes verloren beim Trocknen bei 100° 0·0063 Grm. H_2O. d. i. 1·83%.

0·3372 Grm. des getrockneten Salzes gaben nach Kopfer verbrannt 0·2600 Grm. CO_2, 0·0671 Grm. H_2O und 0·1158 Grm. Pt.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $(C_5H_5NO)_2PtCl_4 + (C_5H_5NOHCl)_2PtCl_4$
C	21·03	21·31
H	2·22	1·96
Pt	34·34	34·59
H_2O	1·83	1·57

Ein Versuch durch fortgesetztes Kochen die Zersetzung noch weiter zu treiben, ergab ein negatives Resultat.

Reduction des Oxypyridins. Oxypyridin widersteht nach unseren vorläufigen Versuchen sehr energisch dem Angriffe der meisten reducirenden Agentien. Natriumamalgam, Zinn und Salzsäure, selbst concentrirte Jodwasserstoffsäure bei 200—205° waren ohne Wirkung. Immer konnte wenigstens der grösste Theil des angewandten Oxypyridins wieder unverändert zurückgewonnen werden. Leicht wird dagegen dem Oxypyridin sein Sauerstoff durch Destillation mit Zinkstaub entzogen.

1·9 Grm. Oxypyridin wurden mit 40 Grm. Zinkstaub innig verrieben und bei eben sichtbarer Rothgluth aus einem Glasrohre destillirt. Aus der vorgeschlagenen Salzsäure wurden durch Destillation mit Kali und Abdampfen des deutlich nach Pyridin riechenden Destillates mit Salzsäure 0·7 Grm. ($^1/_3$ der theoretischen Menge) eines zerfliesslichen, wie Pyridinchlorhydrat aussehenden und sich wie dieses verhaltenden Salzes gewonnen. Aus diesem wurden durch fractionirte Fällung vier Platindoppelsalzfractionen dargestellt.

a) 0·2074 Grm. der ersten Fraction gaben 0·0711 Grm. Pt.

b) 0·2325 Grm. der dritten Fraction gaben 0·0801 Grm. Pt.

	Gefunden in 100 Theilen		Berechnet für $(C_5H_5N.HCl)_2PtCl_4$
	a	*b*	
Pt	34·28	34·45	34·31

Die analysirten Platindoppelsalze bestanden somit aus Pyridinchloroplatinat. Zur Bestätigung haben wir noch den Schmelzpunkt unseres Salzes ermittelt und ihn übereinstimmend mit demjenigen eines uns von Herrn Dr. Weidel freundlichst zur Verfügung gestellten, aus Knochenöl dargestellten Präparates bei 226° (corrig.) gefunden. (Königs[1] fand abweichend von uns den Schmelzpunkt des Pyridinchloroplatinates gegen 236°.)

Einwirkung von Brom auf Oxypyridin. Wie wir schon oben erwähnten, entsteht durch Behandlung von Oxypyridin mit Brom ein Dibromsubstitutionsproduct, welches identisch ist mit einem Körper $C_5H_3Br_2NO$, den Hofmann durch Einwirkung von Brom auf Piperidin erhalten und den er ohne seine Beziehung zum Pyridin experimentell festgestellt zu haben, als Dibromoxypyridin betrachtete.

Zur Darstellung dieses Derivates genügt es Oxypyridin, in wässeriger Lösung mit Bromwasser bis zur bleibenden Gelbfärbung zu versetzen und die ausfallenden flimmernden Krystallblättchen abzufiltriren. Das Filtrat enthält neben Bromwasserstoffsäure nur mehr geringe Mengen der Verbindung, die man durch Abdampfen gewinnen kann. Es zeigt, so dargestellt, alle von Hofmann angegebenen Eigenschaften, als Löslichkeit in Alkalien oder concentrirten Säuren, Bildung einer Silberverbindung beim Auflösen in verdünntem Ammoniak und Versetzen mit Silbernitrat etc. Die Formel $C_5H_3Br_2NO$ wurde durch eine Brombestimmung bestätigt.

0·4331 Grm. Substanz gaben mit CaO geglüht etc.: 0·6395 Grm. AgBr.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $C_5H_3Br_2NO$
Br.....	62·83	63·24

Durch Auflösen in concentrirter Salzsäure und Versetzen mit Platinchlorid (ebenfalls in concentrirter Salzsäure gelöst) wurde eine schön krystallinische Fällung erhalten, die einen der Formel $(C_5H_3Br_2NO.HCl)_2PtCl_4$ entsprechenden Platingehalt besass.

[1] Berichte der deutschen chem. Gesellsch. 1881, pag. 1857.

0·1496 Grm. der auf Thonplatte und nachher bei 100° getrockneten Substanz gaben 0·0321 Grm. Pt.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet
Pt	21·46	21·24

Der volle Beweis der Identität unseres Productes mit dem aus Piperidin gewonnen, wurde durch den Nachweis erbracht, dass die aus beiden durch Digestion mit Methyljodid und Kali entstehenden methylirten Verbindungen nicht nur dieselbe Zusammensetzung, sondern auch den gleichen Schmelzpunkt besitzen. Wir sind zur Darstellung des Dibrommethyloxypyridins genau der Vorschrift Hofmann's gefolgt und erhitzten demnach Dibromoxypyridin mit Kali und einem kleinen Überschuss von Methyljodid in Methylalkohol gelöst durch 5 Stunden auf 100°. Durch Umkrystallisiren aus Wasser wurde die neue Verbindung gereinigt, sie zeigte einen corr. Schmelzpunkt von 196° und gab bei der Analyse folgende Resultate:

0·3493 Grm. der über Schwefelsäure getrockneten Substanz gaben nach Kopfer verbrannt 0·3448 Grm. CO_2 und 0·0641 Grm. H_2O.

	Gefunden in 100 Theilen	Bereehnet für $C_6H_5Br_2NO$
C	26·92	26·97
H	2·04	1·87

Gelegentlich der Dibromammonchelidonsäure wurde schon weiter oben eines aus ihr durch Abspaltung von Kohlensäure hervorgehenden Körpers $C_5H_3Br_2NO$ Erwähnung gethan. Dieser ist zweifellos identisch mit dem durch Bromirung des Oxypyridins erhaltenen Product gleicher Zusammensetzung.

Verhalten des Oxypyridins gegen Methyljodid. Lässt man, in ähnlicher Weise wie es Hofmann mit dem gebromten Derivat gethan, Oxypyridin selber auf Jodmethyl und Kali einwirken, so erhält man Jodkalium und ein methylirtes Oxypyridin. Zur Reindarstellung desselben kann man es zweckmässig einer Destillation im Vacuum unter Benützung des schon oben gelegentlich der Darstellung von Oxypyridin beschriebenen Apparates unterwerfen. Man erhält dann ein strahlig krystallinisch

erstarrendes Destillat, das sich durch stark hygroskopische Eigenschaften auszeichnet. Seine Zusammensetzung als Methyloxypyridin wurde durch Analyse eines Platindoppelsalzes und durch Überführung in ein Dibromsubstitutionsproduct festgestellt. Das letztere, durch Behandlung mit Bromwasser erhalten, zeigte alle Eigenschaften, insbesondere den gleichen Schmelzpunkt von 196° des früher durch vorangehende Bromirung und nachfolgende Methylirung aus Oxypyridin erhaltenen Körpers $C_6H_5Br_2NO$.

Zur Darstellung des Methyloxypyridins aus Oxypyridin ist es übrigens nicht nöthig, neben Methyljodid auch Kali einwirken zu lassen; es genügt die Anwendung von Methyljodid und darauffolgende Entziehung von Jodwasserstoff. Erhitzt man Oxypyridin mit Methyljodid in methylalkoholischer Lösung durch einige Stunden auf 100°, so theilt sich die Mischung in zwei Schichten, von denen die eine aus einem Jodmethyladditionsproduct, die andere aus Methylalkohol mit etwas Methyläther besteht. Durch Abdampfen, Zerlegung mittelst Silberoxyd und Destillation im Vacuum erhält man wieder jene hygroskopischen Krystalle von Methyloxypyridin, die sich in allen Stücken als identisch mit den oben beschriebenen erweisen.

Die Bildung von Methyloxypyridin bei Abwesenheit eines Alkalis spricht dafür, dass dieser Körper nicht durch Ätherification — wie etwa Anisol aus Phenol — sondern durch Anlagerung von Methyl an Stickstoff entstehe.

Verhalten von Chloracetyl und Essigsäureanhydrid gegen Oxypyridin. Enthält das Oxypyridin eine Hydroxylgruppe, so ist zu erwarten, dass es durch Chloracetyl oder Essigsäureanhydrid in ein Acetylderivat übergeführt wird. Unsere diesbezüglichen Versuche haben ergeben, dass jedenfalls keine glatte Einwirkung erfolgt, doch werden wir erst später über die erhaltenen Producte berichten.

Bemerkenswerth ist, dass Chloracetyl auf Chlorhydrat des Oxypyridins auch bei 100° absolut keine Wirkung übt. Diese Beobachtung spricht gegen die durch Formel II und III ausgedrückte Constitution des Oxypyridins, da auch in letzterem Falle das Chlorhydrat OH enthalten und daher durch Chloracetyl angegriffen werden sollte.

Einwirkung von Phosphortrichlorid auf Oxypyridin. Diese erfolgt ziemlich leicht schon beim Erwärmen im geschlossenen Rohre auf 100°. Es entsteht dabei Chlorpyridin, von welchem weiter unten die Rede sein wird.

Methyloxypyridin (Methylpyridon).

Wie schon im Vorstehenden erwähnt wurde, kann das methylirte Oxypyridin einerseits aus Methylammonchelidonsäure, die beim Erhitzen die analoge Spaltung wie Ammonsäure erleidet, anderseits aber auch aus Oxypyridin durch Einwirkung von Methyljodid und Kali oder auch bloss Methyljodid und nachfolgende Behandlung mit Silberoxyd dargestellt werden.

Am bequemsten ist die Darstellung aus Methylammonsäure, bei welcher man zuerst allerdings ein etwas bräunliches Product erhält, das man aber ebenso wie das rohe Oxypyridin durch eine Destillation im Vacuum, in der Weise, wie dort beschrieben, leicht farblos bekommen kann. Es ist etwas leichter flüchtig als Oxypyridin. Das reine Methyloxypyridin ist eine strahlig krystallinische Masse, die aus der Luft mit grosser Begierde Wasser anzieht und zerfliesst. Ihr Schmelzpunkt konnte aus diesem Grunde nicht genau bestimmt werden, er liegt aber jedenfalls über 89°. Es scheint mit wenig Wasser ein krystallinisches Hydrat geben zu können, welches unter gewissen Umständen luftbeständig ist, über Schwefelsäure aber zerfliesst und schliesslich, wenn es alles Wasser abgegeben hat, wieder erstarrt. Wegen der stark hygroskopischen Eigenschaften des Methyloxypyridins haben wir auf Analyse desselben verzichtet.

Das Methyloxypyridin reagirt ebenso wie das Oxypyridin neutral oder äusserst schwach alkalisch. Auch sonst verhalten sich beide Körper den meisten Reagentien gegenüber gleich, wie aus der am Schlusse dieser Abhandlung beigegebenen Tabelle, auf die wir hier verweisen, zu ersehen ist.

Methyloxypyridinchloroplatinat ist etwas schwerer in Wasser löslich als das analoge Oxypyridinsalz. Es krystallisirt in grossen Krystallen, die ein Molekül Wasser enthalten, das beim Trocknen über Schwefelsäure entweicht.

Die getrocknete Verbindung schmilzt unter Zersetzung bei circa 176°.

0·1694 Grm. sorgfältig zwischen Papier abgepresster Substanz verloren über Schwefelsäure 0·0055 Grm., nichts bei weiterem Erhitzen auf 100° und gaben 0·0513 Grm. Pt.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $(C_6H_7NO.HCl)_2PtCl_4+H_2O$
Pt.....	30·28	30·16
H_2O.....	3·25	2·79

Herr Hofrath Prof. v. Zepharovich theilte uns über den krystallographischen Charakter des Salzes gütigst folgende Daten mit, aus denen eine gewisse Analogie dieser Doppelverbindung mit der entsprechenden des Oxypyridins hervorgeht.

Krystallsystem: Triklin (asymmetrisch).

Elemente: $a:b:c=1·2589:1:0·9294$;

$\xi(bc)=88°\ 21·6'$; $\eta(ac)=107°\ 6'$; $\zeta(ab)=89°\ 56·5'$.

Formen: $a(100)\infty P\breve{\infty}$; $b(010)\infty P\breve{\infty}$; $c(001)oP$; $r'(\bar{1}01),P,\breve{\infty}$; $\rho'(\bar{2}01)2,P,\breve{\infty}$; $q(011)P'\breve{\infty}$; $q'(0\bar{1}1)'P\breve{\infty}$; $p(110)\infty P'$; $p'(\bar{1}10)\infty'P$; $o'(\bar{1}11),P$; $o''(\bar{1}\bar{1}1)P,$; $i''(\bar{2}\bar{1}1)2P,\breve{2}$; $o'''(1\bar{1}1)'P$.

An den sehr kleinen brachydiagonal gestreckten Krystallen herrschen gewöhnlich die Basis, das längsgestellte Makropinakoid und die beiden Brachydomen. Die wichtigsten Winkel sind:

Flächen			Rechnung	Messung	n
ab'	$(100·0\bar{1}0)$	=	—	89° 26'	6
ac	$(100·001)$		—	72 53·3	7
cb'	$(001·0\bar{1}0)$		—	88 16	6
pa	$(110·100)$		—	50 37	5
$p'a'$	$(\bar{1}10·\bar{1}00)$		49° 56·8'	49 47	2
$r'c$	$(\bar{1}01·001)$		42 0·8	41 55	4
$\rho'c$	$(\bar{2}01·001)$		—	68 8·6	7
qc	$(011·001)$		42 22·6	42 16	1
$o'b$	$(\bar{1}11·010)$		50 35	50 32	4
$o'c$	$(\bar{1}11·001)$		56 19·2	56 15	1
$o''a'$	$(\bar{1}\bar{1}1·\bar{1}00)$		71 48·3	71 48	3
$o''b'$	$(\bar{1}\bar{1}1·0\bar{1}0)$		49 9·4	48 59	6
$i''a'$	$(\bar{2}\bar{1}1·\bar{1}00)$		48 35	48 28	2
$i''b'$	$(\bar{2}\bar{1}1·0\bar{1}0)$		59 15·3	59 10	1
$o'''a$	$(1\bar{1}1·100)$		51 48·6	51 54	1

Im Vergleiche mit dem Oxypyridinchloroplatinat ergibt sich, dass durch den Eintritt von CH_3 für H die monosymmetrischen

Formen asymmetrisch werden, dass aber ungeachtet der Systemänderung sowohl die Winkel, als auch die Längen der Axen ähnlich seien.

Verhalten des Methyloxypyridins gegen Jodwasserstoffsäure. Wenn das Oxypyridin OH enthält, so sollte sein Methylderivat OCH_3 enthalten; dann sollte aber beim Erhitzen mit Jodwasserstoffsäure die Methylgruppe als Methyljodid abspaltbar sein. Der Versuch hat nun gezeigt, dass dies selbst beim Erhitzen mit überschüssiger concentrirter Säure auf 165° nicht der Fall ist. Das angewandte Methyloxypyridin bleibt dabei völlig unverändert, weder Methyljodid noch Oxypyridin wird dabei auch nur in Spuren gebildet.

Diese Beobachtung steht in voller Übereinstimmung mit der früher erwähnten, dass Methylammonchelidonsäure mit Salzsäure auf 143° erhitzt, kein Methylchlorid abspaltet, und beide Beobachtungen geben starke Argumente dafür ab, dass in den zwei besprochenen Methylverbindungen das Methyl nicht als OCH_3, sondern als NCH_3 enthalten ist. Daraus folgt aber weiter, dass die analogen Wasserstoffverbindungen, nämlich Oxypyridin und Ammonchelidonsäure, keine OH-, sondern NH-Gruppen enthalten.

Einwirkung von Brom auf Methyloxypyridin. Versetzt man eine verdünnte Lösung von Methyloxypyridin mit Bromwasser, so verschwindet die gelbe Färbung des letzteren, während die Flüssigkeit klar bleibt. Arbeitet man dagegen mit concentrirter Lösung, so bewirkt das eingegossene Bromwasser eine gelbbraune Fällung, die sich beim Umschwenken rasch und unter Entfärbung löst. Erst wenn ein Überschuss von Brom zugesetzt ist, bleibt sie bestehen, verschwindet aber auch dann, und zwar unter Bromentwicklung, beim Kochen. Erneuerter Zusatz von Brom zur abgekühlten Flüssigkeit ruft sie wieder hervor. Der zuletzt bei gewöhnlicher Temperatur persistirende Niederschlag ist wohl ein Perbromid des aus Methyloxypyridin zunächst entstehenden Bromsubstitutionsproductes und zerfällt beim Erwärmen in seine Componenten. Das auch beim Erwärmen beständige Endproduct der Reaction ist Dibrommethyloxypyridin, das man durch Abdampfen, wobei Bromwasserstoff entweicht, und Umkrystallisiren leicht rein gewinnen kann. Es ist weit leichter im Wasser löslich als Dibromoxypyridin und

krystallisirt aus heisser Lösung in Form weisser Nadeln, die bei 196° (corrig.) schmelzen.

Dieser Körper ist mit dem von Hofmann aus Piperidin bereiteten sogenannten Methyläther des Dibromoxypyridins, ferner mit dem von uns aus Dibromoxypyridin durch Jodmethyl und Kali und endlich mit dem durch Erhitzen von Dibrommethylammonsäure (siehe diese) entstehenden Körper identisch; auch ist es gleichgiltig, ob das zu seiner Darstellung verwendete Methyloxypyridin aus Methylammonsäure oder aus Oxypyridin mit Jodmethyl bereitet worden ist.

Eine Analyse dieses Körpers ist bereits gelegentlich der Methylirung des Dibromoxypyridins mitgetheilt worden.

Damit ist auch bewiesen, dass die aus Ammonchelidonsäure, Oxypyridin, Methylammonchelidonsäure und Methyloxypyridin so leicht entstehenden Dibromsubstitutionsproducte in engster Beziehung zu einander stehen, dass sie die beiden Bromatome an analogen Stellen im Molekül enthalten. Nachdem aber in der Methylammonchelidonsäure das Brom bestimmt nicht in die Methylgruppe eintritt und sonst nur zwei Atome Wasserstoff übrig bleiben, die durch Brom ersetzbar sind, so kann über die Stellung der Bromatome in allen diesen Verbindungen kein Zweifel sein; dieselben müssen sich in der Metastellung zum Stickstoff befinden.

Methyloxypyridin-methyliumverbindungen.

Zur Charakterisirung des Methyloxypyridins als tertiäre Base haben wir sein Verhalten zu Methyljodid untersucht. Erhitzt man trockenes Methyloxypyridin mit überschüssigem Methyljodid einige Zeit auf 100°, so verwandelt es sich in Krystalle, die Jod enthalten und auch nicht mehr hygroskopisch sind. Digerirt man dieselben mit Chlorsilber, und versetzt die jodfreie abfiltrirte Lösung mit Salzsäure und Platinchlorid, so erhält man beim Eindunsten ein rothes krystallinisches Doppelsalz, welches etwas schwerer in Wasser löslich ist als Methyloxypyridin-chloroplatinat. Seiner Zusammensetzung nach ist es als Platinchloridverbindung eines Methyloxypyridin-methyliumchlorids aufzufassen.

A. 0·2339 Grm. der bei 100° getrockneten Krystalle gaben 0·0696 Grm. Pt.

B. 0·5094 Grm. der durch neuerliches Umkrystallisiren und Abpressen zwischen Papier erhaltenen Krystalle gaben beim Stehen über

Schwefelsäure 0·5090 Grm., beim Trocknen bei 100° 0·5087 Grm. trockener Substanz und diese lieferten nach Kopfer verbrannt: 0·4725 Grm. CO_2, 0·1424 Grm. H_2O und 0·1515 Grm. Platin.

	Gefunden in 100 Theilen		Berechnet für $(C_5H_4CH_3NO.CH_3Cl)_2\,PtCl_4$
	A.	*B.*	
Pt.....	29·76	29·78	29·71
C.	—	25·33	25·62
H.	—	3·12	3·06

Herr Prof. Hofrath v. Zepharovich hatte die Güte, auch die Bestimmung der krystallographischen Daten dieses Salzes vorzunehmen und theilt uns darüber Folgendes mit:

Krystallsystem Monoklin:

Elemente: $a:b:c = 0·6997 : 1 : 0·4203$

$\gamma\ (ac) = 81°\ 37'$

Formen: $a(100)\infty P\infty$. $b(010)\infty P\infty$. $p(110)\infty P$. $q(021)2P\infty$

$o(111)-P$. $o'(\bar{1}11)P$.

Gelblich rothe gut spiegelnde Kryställchen, deren Formen sehr dünne und schmale, vertical gestreckte Täfelchen sind. Das Klinopinakoid ist immer gewölbt u. zw. stark im Sinne der *a*-, schwach im Sinne der *c*-Axe; in der ersteren Wölbung liessen sich steile Klinodomen bestimmen, deren Indices einer arithmetischen Reihe angehören.

Flächen	Rechnung	Messung	Z
pa (110 : 100)	— —	34° 41·5′	15
qa (021 : 100)	— —	83 34	8
qq (021 : 0$\bar{2}$1)	— —	79 29·8	10
qp (021 : 110)	62° 51	62 57	3
oa (111 : 100)	55 10·7	55 12	4
oq (111 : 021)	32 32·2	32 30	3
o'a' ($\bar{1}$11 : $\bar{1}$00)	67 1·5	67 3	2
o'q ($\bar{1}$11 : 021)	33 54·2	33 49	2

Auf (010) sind die Auslöschungen gegen die verticalen Kanten unter 30° 25′ und 59° 35′ geneigt.

(Krystallogr. Beziehungen zu den anderen Pyridinverbindungen nicht vorhanden.)

Behandelt man das direct erhaltene Jodid der Ammoniumbase mit Wasser und Silberoxyd, so erhält man nicht, wie man hätte erwarten können, die freie Ammoniumbase, sondern wieder Methyloxypyridin mit allen seinen charakteristischen Eigenschaften. Zu völliger Identificirung haben wir aus letzterem einerseits durch Behandlung mit Bromwasser das bei 196° schmelzende Dibromderivat, anderseits durch Platinchlorid das Platindoppelsalz dargestellt.

0·2017 Grm. des zwischen Papier gepressten Platindoppelsalzes verloren bei 100°: 0·0060 Grm. H_2O. d. i. 2·97%. Die Rechnung ergibt für 1 Mol. Krystallwasser der Verbindung $(C_6H_7NO.HCl)_2\ PtCl_4+H_2O$. 2·79%.

0·2784 Grm. der bei 100° getrockneten Salzes hinterliessen beim Glühen 0·0867 Grm. Pt.

	Gefunden in 100 Theilen	Berechnet für $(C_6H_7NO.HCl)_2\ PtCl_4$
Pt.	31·14	31·03

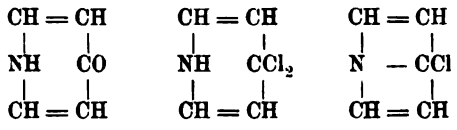
Bei der Digestion des Jodids mit Silberoxyd muss also die neu eingetretene Methylgruppe wieder abgespalten worden sein, und zwar am wahrscheinlichsten in Form von Methylalkohol.

Es ist uns geglückt auch diesen letzteren, trotz Arbeitens in kleinem Massstabe, mit Sicherheit nachzuweisen. Zu dem Ende destillirten wir 1·5 Grm. des reinen Jodmethyl-Additionsproductes mit Wasser und Silberoxyd und sättigten die flüchtigsten Antheile mit Jodwasserstoffgas. Schon bei einigem Stehen konnte die Abscheidung eines sehr schweren Öles bemerkt werden, das, für sich erhitzt, schon unter 50° siedete, also zweifellos aus Methyljodid bestand.

Das Methyloxypyridin-methyliumjodid unterscheidet sich noch in anderer Weise von den quaternären Ammoniumjodiden der Alkoholradicale, insofern es nicht wie letztere der Einwirkung von Kalilauge widersteht, sondern in Jodkalium, Methyloxypyridin und Methylalkohol zerfällt. Erhitzt man es im trockenen Zustande auf etwa 150°, so erleidet es ebenfalls eine Zersetzung, und zwar in Methyloxypyridin und abdestillirendes Methyljodid.

Chlorpyridin.

Wir haben schon beim Oxypyridin erwähnt, dass es mit Phosphortrichlorid erhitzt Chlorpyridin liefert, eine Reaction, die mit der Auffassung jenes Körpers als Hydroxylpyridin (Formel II) im besten Einklange steht, aber sehr einfach auch aus Formel III und ohne Schwierigkeit auch aus Formel I erklärt werden kann, indem man etwa die Bildung eines Zwischenproductes annimmt, das leicht HCl abspaltet:



Oxypyridin (I) Chlorpyridin

Zur Darstellung von Chlorpyridin haben wir wasserfreies Oxypyridin mit überschüssigem Phosphortrichlorid in zugeschmolzenen Röhren durch 12—24^h auf etwa 150° erhitzt. (Die Reaction findet übrigens auch, wenn gleich langsamer, schon bei 100° statt.) Das Oxypyridin verwandelt sich dabei in eine braune halbfeste Masse, die mit einzelnen weissen Krystallen vermengt ist. Sie wurde, nach Abgiessen des überstehenden Phosphorchlorids, in Wasser gelöst, mit Baryt alkalisch gemacht und destillirt, und so ein schweres Öl, Chlorpyridin, gewonnen, das in Überschuss von Wasser löslich ist. Das mit übergegangene Wasser enthält noch reichlich Chlorpyridin, das durch wiederholte Destillationen gewonnen werden kann.

Gelegentlich der Darstellung aus rohem nicht gereinigtem Oxypyridin wurden im wässerigen Destillate ausser dem schweren Öl Spuren von Krystallnadeln beobachtet, die in Äther, auch in Salzsäure löslich, dagegen in Wasser fast unlöslich sind.

Im alkalischen Destillationsrückstand findet sich neben etwas Oxypyridin ein eigenthümlicher Barium, Phosphor und organische Substanz enthaltender Körper, dessen Untersuchung noch nicht abgeschlossen ist.

Das Chlorpyridin erleidet sehr leicht unter mannigfachen Umständen eine eigenthümliche Umwandlung, von der wir vorläufig noch nicht mit Bestimmtheit angeben können, an welche Ursachen sie geknüpft ist. Als wir das rohe feuchte Chlorpyridin,

dessen Darstellung wir oben beschrieben haben, zu destilliren versuchten, hörten wir kurz nach Beginn der Destillation ein Prasseln in der Flüssigkeit, in der zugleich rothe Schlieren auftraten; die Flüssigkeit verblieb auch nach Entfernung des Brenners in lebhaftem Kochen und erstarrte schliesslich zu einer bräunlichen, festen, krystallinischen Masse. Auch das zugleich erhaltene flüssige Destillat war gefärbt, nahm allmälig eine dunklere Färbung an, und gestand endlich zu einer krystallinischen Masse desselben Aussehens, wie der Destillationsrückstand. Dieser erwies sich in Wasser löslich, und bemerkenswerther Weise entfärbte sich die Lösung allmälig von selbst.

Das Umsetzungsproduct, das so aus dem Chlorpyridin hervorgeht, enthält chlorwasserstoffsaures Oxypyridin und das Chlorid einer neuen Base, deren Studium wir uns vorläufig vorbehalten.

Auch schon beim Aufbewahren des Chlorpyridins (bei gewöhnlicher Temperatur) trat manchmal, doch nicht immer, dieselbe Umwandlung ein, ebenso unter dem Einfluss von Chlorcalcium, mit dem wir das Öl zu trocknen suchten.

Das Chlorpyridin, mittelst frischgeschmolzenen Kalis getrocknet, siedet bei 147—148°; die Destillation vollzog sich sehr gut, doch erlitt der geringe Rückstand sogleich, das Destillat im Verlaufe einiger Tage die erwähnte Umwandlung.

Die Übereinstimmung des Siedepunktes legt den Gedanken nahe, dass dies Chlorpyridin mit dem von Ciamician und Dennstädt[1] aus Pyrrol dargestellten identisch sein könnte; indessen stimmen die Eigenschaften, die die genannten Autoren angeben, nicht ganz mit den an unserem Präparat beobachteten überein, daher wir die Frage nach der Identität noch unentschieden lassen möchten.

Chlorpyridin löst sich erheblich in Wasser, ohne diesem eine alkalische Reaction zu ertheilen und besitzt einen dem des Pyridin sehr ähnlichen (nur etwas angenehmeren) Geruch.

Gegen Brom in wässeriger Lösung verhält es sich ganz wie Pyridin, damit ein Additions- und kein Substitutionsproduct

[1] Berichte der deutschen chem. Gesellsch. 1881, pag. 1153.

bildend. Einige seiner sonstigen Reactionen, die alle denen des Pyridins gleichen, sind weiter hinten in einer Tabelle zusammengestellt.

Chlorpyridinchloroplatinat fällt beim Zusammenbringen einer nicht gar zu verdünnten Lösung von Chlorpyridin mit Salzsäure und Platinchlorid als rothgelber krystallinischer, Niederschlag aus. Es ist, wie folgende Bestimmungen zeigen, wasserfrei und der Formel $(C_5H_4ClN.HCl)_2\ PtCl_4$ entsprechend zusammengesetzt.

A. 0·4195 Grm. der zwischen Papier abgepressten Substanz verloren nichts über H_2SO_4 und gaben nach Kopfer verbrannt 0·0629 Grm. H_2O, 0·2901 Grm. CO_2 und 0·1270 Grm. Pt.

B. 0·1656 der bei 100° getrockneten Substanz gaben 0·0508 Grm. Pt. 0·2738 Grm. Substanz gaben 0·0833 Grm. Pt.

	Gefunden in 100 Theilen			Berechnet für $(C_5H_4ClN.HCl)_2\ PtCl_4$
	A.	*B.*	*C.*	
C	18·86	—	—	18·85
H	1·67	—	—	1·57
Pt	30·27	30·68	30·42	30·60

Herr Hofrath Prof. v. Zepharovich hatte die Freundlichkeit, auch dieses Salz krystallographisch zu untersuchen und fand folgende Daten:

Krystallsystem Monoklin.

Elemente: $a:b:c=1·0384:1:1·2537$,

$\eta\,(ac)=72°\ 42'$

Formen: $b(010)\infty P\infty . c(001)\,oP . p(507)-{}^5/_7P\infty . r(101)-P\infty$
$s'(\bar{5}09)\,{}^5/_9P\infty . \sigma'(\bar{5}08)\,{}^5/_8P\infty . q(035)\,{}^3/_5P\infty . p(110)\,\infty P$
$o(111)-P . \omega'(\bar{3}35)\,{}^3/_5P . \eta'(\bar{7}75)\,{}^7/_5P.$

Gelblichrothe Kryställchen von zweifachem Habitus (*a*) sechs- oder achtseitige quer verlängerte flächenreiche Täfelchen mit vorwaltendem *c*, (*b*) niedere nur von *c* und *p* begrenzte Säulchen, an denen genaue Messungen möglich waren, während an den ersteren Formen *c* sowie die Orthodomen gewölbt erscheinen.

Flächen	Rechnung	Messung	Z
pc (110 : 001)	— —	77° 48·5′	19
pp (110 : 1$\bar{1}$0)	— —	90 29·75	10
qc (035 : 001)	— —	54 19	19
ρc (507 : 001)	33° 14	33 46	4
rc (101 : 001)	40 18	40 18	3
$s'c$ ($\bar{5}$09 : 001)	38 39·5	38 7	2
$\sigma'c$ ($\bar{5}$08 : 001)	42 53·5	43 12	1
oc (111 : 001)	50 43·3	50 43·5	5
$\omega'c$ ($\bar{3}$35 : 001)	51 48	51 54	2
$\eta'c$ ($\bar{7}$75 : 001)	77 56	77 20	1

Die Ebene der optischen Axen liegt normal-symmetrisch; die Bissectrix der sehr weit geöffneten Axen (circa 104°) ist von der Normale auf (001) unter circa 3° nach vorne (gegen 101) hin geneigt.

Das von Ciamician und Dennstädt dargestellte Chlorpyridinchloroplatinat[1] enthält ein Molekül Krystallwasser, während das vorliegende wasserfrei ist. Im Gegensatz zu der gewöhnlich sehr differenten Gestaltung wasserfreier und wasserhältiger sonst gleicher Verbindungen, bemerkt man in diesem Falle beim Vergleich mit den von la Valle angegebenen krystallographischen Daten eine Ähnlichkeit der Formen, indem bei gleichem Krystallsystem die Elemente besonders c und η und dem entsprechend auch die Flächenneigungen ähnlich sind:

		a	b	c	η
Doppelsalz aus Chelidonsäure bereitet wasserfrei	: monokl.	1·038	: 1	: 1·254	107° 18′ Z.
Doppelsalz aus Pyrrol bereitet 1 Mol. H_2O enthaltend	: „	1·197	: 1	: 1·172	109° 48 (V.)

Die Identität beider Chlorpyridine supponirt, wäre demnach bei diesen complicirten Verbindungen die durch den geringen Wassergehalt bedingte Differenz in der Zusammensetzung gegenüber der überwiegenden Wirkung der übrigen Bestandtheile nur wenig zur Geltung gekommen.

[1] Jahresbericht für Chemie 1881, pag. 421.

Krystallographische Beziehungen zwischen diesen Salzen und dem Pyridinchloroplatinat lassen sich nicht auffinden.

Das Chlor des Chlorpyridins wird nicht leicht angegriffen. Mit Barytwasser im zugeschmolzenen Rohre auf 90° durch sieben Stunden erhitzt, bleibt Chlorpyridin unverändert; ebenso widersteht es der Einwirkung von Zinn und Salzsäure oder Eisen und Essigsäure. Leicht dagegen wird es durch Natriummethylat bei 100° oder durch Jodwasserstoff angegriffen.

Einwirkung von Jodwasserstoffsäure. Bringt man Chlorpyridin in wässerige Jodwasserstoffsäure vom specifischen Gewichte 1·8 so scheiden sich hübsche Krystalle des Jodhydrates ab, die bei nachfolgender Sättigung mit Jodwasserstoffgas sich wieder auflösen. Wir erhitzten diese Lösung durch 18 Stunden in geschlossenem Rohre auf 145° wonach sich beim Erkalten wieder, aber diesmal schwarzgefärbte, Krystalle abschieden. Der Rohrinhalt wurde hierauf mit schwefliger Säure dann mit Kalilauge versetzt und destillirt. Dabei ging mit den Wasserdämpfen ein weisser fester Körper über, von welchem durch wiederholte Destillationen des mitdestillirten Wassers noch mehr gewonnen werden konnte. Nach Abfiltriren und Trocknen präsentirte er sich in Form weisser krystallinischer Körner von sehr schwachem etwas an Chlorpyridin erinnernden Geruch. Er schmilzt unter Zersetzung (Schwarzfärbung) bei gegen 100° und enthält reichlich Jod. In verdünnter Salzsäure löst er sich und gibt dann mit Platinchlorid eine sehr schwer lösliche gelbe Fällung, welche nach einer damit ausgeführten Platin-Bestimmung der Zusammensetzung $(C_5H_4JN.HCl)_2PtCl_4$ entspricht.

0·2944 Gramm der zwischen Papier gepressten Substanz verloren 0·0009 Gramm über H_2SO_4 dann nichts mehr bei 100° und gaben 0·0700 Gramm Pt.

	Gefunden in 100 Theilen der trockenen Substanz	Berechnet für $(C_5H_4JN.HCl)_2PtCl_4$
Pt.....	23·85	23·77

Der durch Einwirkung von Jodwasserstoff auf Chlorpyridin hervorgehende feste Körper ist daher Jodpyridin, entstanden nach der Gleichung

$$C_5H_4ClN+JH=C_5H_4JN+ClH.$$

(Auch die bei der Reaction gebildete Chlorwasserstoffsäure wurde qualitativ nachgewiesen.)

Behandelt man Chlorpyridin bei höherer Temperatur — etwa bei 180°—190° durch 20 Stunden — mit conc. Jodwasserstoffsäure, so wird nicht nur das Chlor durch Jod, sondern auch dieses durch Wasserstoff ersetzt und Pyridin gebildet. Dieses findet sich im Reactionsproducte als Perjodid und kann durch Behandlung mit schwefliger Säure und Kalilauge leicht isolirt werden. Es entsteht frei von jeder Beimengung wie die Analysen folgender durch fractionirte Fällung erhaltener Platindoppelsalze erweisen.

A. 0·2619 Gramm der getrockneten ersten Fraction lieferten 0·0899 Gramm Pt.

B. 0·2363 Gramm der vierten und letzten Fraction lieferten 0·0812 Gramm Pt.

	Gefunden in 100 Theilen		Berechnet für $(C_5H_5N.HCl)_2\,PtCl_4$
	A.	B.	
Pt.....	34·32	34·36	34·31

Der corrigirte Schmelzpunkt dieses Pyridinchloroplatinates wurde bei 228—229° gefunden.

Die von Hofrath v. Zepharovich ausgeführte Krystallmessung ergab vollständige Übereinstimmung mit den über Pyridinchloroplatinat von Březina[1] vorliegenden Angaben.

Diese Reduction zu Pyridin durch Jodwasserstoff gewinnt an Interesse, weil sie die nahe Beziehung des beschriebenen Chlorpyridins und somit auch des Oxypyridins und der Ammonchelidonsäure zum Pyridin in noch anderer Weise zeigt, als dies früher durch Reduction mittelst Zinkstaub geschehen ist.

Methoxylpyridin.

Behandelt man Chlorpyridin mit einer Lösung von Natriummethylat in Methylalkohol bei 100°, so entsteht Chlornatrium und eine neue Base $C_5H_4(OCH_3)N$ — Methoxylpyridin — die mit dem früher beschriebenen Methyloxypyridin isomer ist. Dass die Umsetzung eine vollständige ist, zeigt folgende Bestimmung:

[1] Sitzgb. d. Wiener Akad. 86, p. 945, oder Monatsh. f. Chem. (1882) p. 779.

Circa 0·38 Gramm Chlorpyridin wurden mit Methylalkohol und Natriummethylat durch 36 Stunden auf 100° erhitzt und aus dem Reactionsprodukte, nachdem alles Flüchtige unter Zusatz von Wasser abdestillirt worden war, durch Fällung 0·5028 Gramm AgCl erhalten. Aus der angewandten Menge Chlorpyridin berechnen sich, wenn alles Chlor als AgCl erhalten wird, 0·48 Gramm AgCl.

Das Methoxylpyridin kann rein leicht in folgender Weise gewonnen werden. Das Reactionsproduct von Natriummethylat und Chlorpyridin wird mit Wasser destillirt bis kein alkalisch reagirendes Destillat übergeht. Die vereinigten Destillate mit Salzsäure abgedampft, geben ein krystallinisches Chlorhydrat, welches in concentrirter Lösung mit Ätzkali zerlegt, die freie Base als auf schwimmende Schicht abscheidet. Diese wird mit festem Kali getrocknet und dann destillirt, wobei die reine Verbindung völlig constant zwischen 190·5° und 191° (corrigirt) bei auf 0° red. Bar. 738·3^{mm} übergeht, und etwas eines sehr hoch siedenden Körpers zurück bleibt.

Methoxylpyridin ist in jedem Verhältniss mit Wasser mischbar, reagirt stark alkalisch und besitzt einen dem des Pyridins frappant ähnlichen Geruch. Seine Zusammensetzung wurde durch eine vollständige Analyse seines

Chloroplatinates ermittelt. Dieses ist in Wasser viel schwerer löslich als das isomere aus Methyloxypyridin erhaltene. Es enthält kein Krystallwasser.

A. 0.5340 Gramm über Schwefelsäure getrockneter Substanz gaben nach Kopfer verbrannt 0·1230 Gramm H_2O, 0·4495 Gramm CO_2 und 0·1668 Gramm Pt.

B. 0·2714 Gramm mit Kalk geglüht etc. gaben 0·3739 Gramm AgCl.

C. 0·1840 Gramm bei 100° getrocknetes Salz gaben 0·0572 Gramm Pt.

	Gefunden in 100 Theilen			Berechnet für $(C_5H_4(OCH_3)NHCl)_2PtCl_4$
	A.	B.	C.	
C	22·96	—	—	22·94
H	2·56	—	—	2·55
Pt	31·24	—	31·09	31·03
Cl	—	34·07	—	33·90

Einwirkung der Wärme auf Methoxylpyridin. Bei der Darstellung des Methoxylpyridins wurde erwähnt, dass bei

seiner Destillation etwas eines sehr schwer flüchtigen Rückstandes erhalten wurde. Es ist dies nichts anderes als isomeres Methyloxypyridin, das unter dem Einflusse der Wärme aus Methoxylpyridin während des Destillirens gebildet worden ist. Vollständig gelingt diese Umwandlung, wenn man Methoxylpyridin in geschlossenen Gefässen einige Zeit über seinen Siedepunkt — etwa auf 220° — erhitzt. Es verliert dadurch seine Dünnflüssigkeit und erstarrt beim Erkalten krystallinisch. Das entstandene Methyloxypyridin wurde durch seine physikalischen Eigenschaften, sowie durch Überführung einerseits in ein leicht lösliches Chloroplatinat, anderseits in das schon oft erwähnte Dibromsubstitutionsproduct identificirt.

Einwirkung von Jodwasserstoffsäure auf Methoxylpyridin. Wir erhitzten 1·5 Gramm der reinen Base mit 9 Gramm Jodwasserstoffsäure vom specifischen Gewichte 1·8 durch im Ganzen 48 Stunden auf 100°, wobei sich allmählig ein schweres Öl abschied. Dieses wurde schliesslich von der Säurelösung getrennt und erwies sich als Methyljodid, das durch seinen Geruch sein hohes specifisches Gewicht und seine Leichtflüchtigkeit als solches erkannt wurde. Die Jodwasserstoffsäure-Lösung wurde in flachen Schalen abgedampft, der braune krystallinische Rückstand mit Silber und Silberoxyd geschüttelt, filtrirt und wieder abgedampft und so weisse in Wasser leicht lösliche Krystalle erhalten, die sich durch alle ihre Eigenschaften und Reactionen, sowie durch ihren bei 148° liegenden Schmelzpunkt als Oxypyridin zu erkennen gaben.

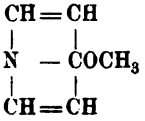
Man hätte erwarten können, dass hier ein isomeres Oxypyridin (Hydroxylpyridin) sich bilden würde, das zu dem alten Oxypyridin (aus Ammonchelidonsäure) in demselben Verhältniss stünde, wie das beschriebene Methoxylpyridin zu dem isomeren Methyloxypyridin (aus Methylammonchelidonsäure). Dass dies nicht geschieht, dürfte wohl darauf zurückzuführen sein, dass das Hydroxylpyridin sich noch leichter in das isomere umsetzt, als es, wie wir eben gezeigt haben, beim Methoxylpyridin der Fall ist.

Vergleicht man das Methoxylpyridin in seinen Eigenschaften mit dem isomeren, so kann man nicht im Zweifel sein, dass das

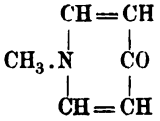
erstere in seiner Constitution dem Pyridin bedeutend näher steht als das letztere und dass es als Pyridin aufzufassen ist, in welchem H (und zwar mit Rücksicht auf die Constitution der Chelidonsäure, der Ammonchelidonsäure und des Chlorpyridins, das H eines vom N auf jeder Seite durch 2C getrennten CH) durch OCH_3 ersetzt ist.

In der That besitzt das Methoxylpyridin einen pyridinähnlichen Geruch, reagirt alkalisch (das isomere ist geruchlos und reagirt äusserst schwach alkalisch), siedet bei 190° (das isomere über 200° im Vacuum), liefert gleich dem Pyridin und Chlorpyridin ein schwer lösliches Chloroplatinat (das isomere liefert ein leicht lösliches), gibt mit Brom zunächst ein Additions- und kein Substitutionsproduct (das isomere gibt fast sogleich ein Substitutionsproduct), spaltet mit Jodwasserstoff bei 100° Methyl als Jodmethyl ab, wie man es von einem Methyläther erwarten darf (das isomere spaltet mit Jodwasserstoff selbst bei 165° kein Jodmethyl ab).

Nach alledem ist es wohl gestattet, die Isomerie der beiden hier verglichenen Verbindungen durch die folgenden Formeln auszudrücken



Methoxylpyridin

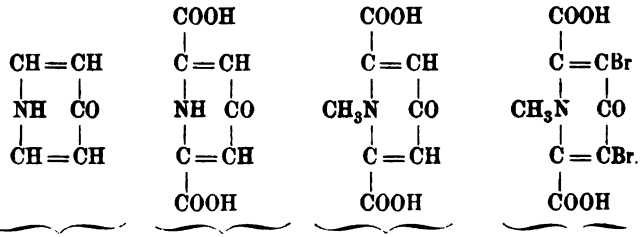


Methyloxypyridin (Methylpyridon),

welche nicht nur die Verschiedenheit aufklären, sondern auch einen guten Ausdruck für alle bisher beobachteten chemischen Beziehungen dieser Körper abgeben.

Die Thatsache, dass das Methoxylpyridin sich leicht (durch blosses Erhitzen) in die isomere Verbindung umwandelt, während die umgekehrte Reaction nicht beobachtet worden ist, dürfte wohl so zu erklären sein, dass der Stickstoff ein grösseres Bestreben hat, sich mit einem durch Wasserstoff gesättigten Kohlenstoffatome (Methyl) als mit einem theilweise durch Sauerstoff gesättigten C zu verbinden, während anderseits das im Methoxylpyridin an OCH_3 und an N gebundene C seine Stickstoffbindung gern gegen eine zweite Sauerstoffbindung eintauscht.

Nachdem festgestellt ist, dass das Methyloxypyridin keine OCH_3, sondern eine NCH_3gruppe enthält, so ergibt sich mit zwingender Nothwendigkeit der Schluss, dass das Oxypyridin, welches in seiner Entstehungsweise wie in allen seinen Eigenschaften dem Methyloxypyridin ausnehmend gleicht, keine OH-, sondern eine NH-gruppe enthält, und die gleiche Folgerung darf (wenn auch mit einer etwas geringeren Sicherheit) für Ammon- und Methylammonchelidonsäure gezogen werden, so dass man zu folgenden Formeln gelangt, denen wir noch die Formel der Dibrommethylammonchelidonsäure anschliessen:



Oxypyridin. Ammonchelidonsäure Methylammonchelidonsäure. Dibrommethylammonchelidonsäure.

Die früher erwähnte Formel III für Oxypyridin, welche gleichfalls NH enthält, ist insofern weniger wahrscheinlich als das Chlorhydrat eines derartigen Oxypyridins voraussetzlich OH enthalten und daher mit Chloracetyl ein Acetoxypyridin liefern würde, was factisch nicht beobachtet worden ist.

Seit unserer ersten Veröffentlichung über Oxypyridin aus Ammonchelidonsäure hat Ost[1] denselben Körper aus einer Oxypikolinsäure erhalten, die durch Einwirkung von Ammoniak aus Komansäure dargestellt worden war, und meint in dieser Entstehungsweise ein Argument für die Annahme einer Hydroxylgruppe im Oxypyridin gefunden zu haben. Wir glauben jedoch, dass dies Argument nicht im Stande ist den oben geführten Nachweis, dass das Oxypyridin keine OH-Gruppe, sondern vielmehr eine NH-Gruppe enthält, zu entkräften, denn selbst, wenn man ein OH in der Oxypicolinsäure annehmen wollte, was keineswegs über jeden Zweifel erhaben ist, so darf man es doch nicht nur für möglich, sondern selbst für wahrscheinlich halten, dass bei der Zerlegung dieser Säure durch Erhitzen statt eines Hydroxyl-

[1] Journal für praktische Chemie 29, pag. 64.

Zu pag. 9

	idin	Pyridin
Siedepunk		117°
JH bei 100°	din; bei	—
Bromwass Überschus	hlag: oduct; das ter Gelb- der beim t wird	Niederschlag, der anfangs verschwindet auf mehr Bromzusatz aber wieder gelb ausfällt: Additionsproduct, das durch HCl (unter Gelbfärbung) oder beim Kochen zerlegt wird
Jod in Jod löst	scher Nie- rjodid)	erst nichts, dann gelber dann jodgrauer Niederschlag (Perjodid)
Platinchl	lösliche	ziemlich schwer lösliche Krystalle
Goldchlor	löslicher	gelber Niederschlag schwer löslich
Quecksilb	hlag sehr in Wasser	weisser Niederschlag sehr schwer löslich in Wasser
Jodqueck Jodkali	. Nieder- n Kochen st, theils	starker weisser Niederschlag, in der Hitze löslich
Kupfersul		blauer Niederschlag im Überschuss der Base tiefblau sich lösend

pyridins (von dem man, nach unserer obigen Darlegung andere Eigenschaften erwarten darf) vielmehr die isomere Verbindung, welche NH enthält, resultirt.

Herr Ost hat es bei dieser Gelegenheit für gut befunden, sein lebhaftes Missfallen über die von uns aufgestellte Formel für Chelidonsäure auszusprechen, die er für werthlos erklärt. Da er jedoch keine einzige Thatsache anführt, welche mit der durch diese Formel ausgedrückten Vorstellung von der Constitution der Chelidonsäure im Widerspruche steht, und ebenso wenig eine neue umfassendere, oder mit den Thatsachen besser übereinstimmende Formel aufstellt, so darf er uns, bei aller Achtung, die wir seinen verdienstvollen Arbeiten entgegenbringen, nicht übel nehmen, wenn wir trotz der Äusserung seines Missfallens noch vorläufig an unserer Vorstellung festhalten. Wir werden dieselbe gern fallen lassen und durch eine andere ersetzen, sobald wir neue Thatsachen kennen lernen, die uns dazu führen, und wir sind weit entfernt das für unmöglich zu halten. Die herablassende Belehrung aber, die uns Herr Ost über Sinn und Bedeutung rationeller Formeln zu Theil werden lässt, gibt uns dazu keinen Anlass.

Man kennt gegenwärtig noch zwei isomere Oxypyridine, die von Koenigs und Koerner[1], ferner von Fischer und Renouf[2] bald nach unserem Oxypyridin entdeckt worden sind. Es wird interessant sein festzustellen, ob diese Körper, wahre Hydroxylpyridine sind, oder ob sie, gleich dem unseren, eine CO- und NH-Gruppe enthalten, wie denn ähnliche Fragen noch in vielen anderen Fällen auftauchen dürften. Zur Erleichterung der Beurtheilung kann die folgende Tabelle von Nutzen sein, in der wir eine Anzahl leicht ausführbarer Reactionen zusammengestellt haben und in der die Verschiedenheit des chemischen Verhaltens der Pyridone (Oxypyridin und Methyloxypyridin) von den eigentlichen Pyridinen (Chlorpyridin und Methoxylpyridin neben Pyridin) in prägnanterWeise sich offenbart. (S. Tabelle.)

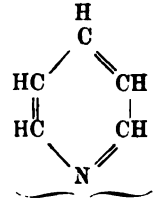
Schliesslich möchten wir uns noch eine Bemerkung über die Constitution des Pyridins erlauben. Wir haben bereits in unserer

[1] Berichte der deutschen chem. Gesellschaft XVI, 2160.

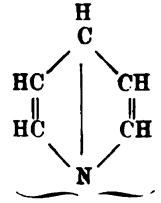
[2] Ebendaselbst XVII, 763.

vorläufigen Mittheilung angedeutet, dass die Beziehung des Pyridins zu den stickstoffhaltigen Derivaten der Chelidonsäure die Vermuthung nahe legt, der Stickstoff des Pyridins sei mit seinen drei Valenzen an drei verschiedene Kohlenstoffatome gebunden. Wir sind auch heute noch dieser Meinung; denn, wenn wir auch gegenwärtig in der Ammonchelidonsäure und im Oxypyridin eine derartige Bindung des Stickstoffes für minder wahrscheinlich halten, als das Vorhandensein einer NH-Gruppe, so stellen wir uns doch zwischen den in der einen, und den in der anderen Weise constituirten Körpern eine sehr nahe Beziehung und einen leichten Übergang vor. Auch ist es nicht leicht, sich von der Constitution des durch Einwirkung von Chlorphosphor auf Oxypyridin entstehenden Chlorpyridins eine andere Vorstellung zu machen, als dass der Stickstoff darin an drei Kohlenstoffatome (2, 4, 6) gebunden ist. Das Chlorpyridin aber wird nicht nur durch Jodwasserstoff zu Pyridin reducirt, sondern gleicht auch ebenso, wie das glatt daraus hervorgehende Methoxylpyridin, dem Pyridin in so hohem Masse, dass man gezwungen ist, letzterem Körper eine analoge Constitution beizulegen.

Wenn diese Vorstellung auch von der gewöhnlich angenommenen abweicht, in der Weise wie die Formeln zeigen



Alte Pyridinformel



Neue Formel

so scheinen uns doch die sonst bekannten Thatsachen mit der hier vorgeschlagenen Formel nicht im Widerspruch zu stehen, und sind unabhängig von uns auch andere Forscher wie Ciamician und Dennstaedt[1], Riedel[2], Bernthsen und Bender[3], Hantzsch[4] wenigstens vermuthungsweise zu derselben Formel gelangt.

[1] Berichte der deutschen chem. Gesellsch. 14 pag. 1161.
[2] Ebendaselbst 16, pag. 1612.
[3] Ebendaselbst 16, pag. 1808.
[4] Ebendaselbst 17. pag. 1521.

ANHANG.

In einer vor Kurzem erschienenen Abhandlung über Chelidonsäure (Monatsh. f. Ch. V, p. 367) hat Lerch Vorwürfe gegen mich gerichtet, als ob ich confidentielle Mittheilungen, die er mir in früherer Zeit gemacht habe, missbraucht hätte. Zur Richtigstellung mögen die folgenden Bemerkungen dienen.

Herr Prof. Lerch hat mir vor etwa zwölf Jahren, in der Zeit meines Aufenthaltes in Prag von Versuchen über Chelidonsäure gesprochen, mit denen er damals beschäftigt war und die, soweit ich davon Kenntniss erhielt, wenig vorgeschritten waren. Seitdem ich im März 1875 Prag verliess, bin ich mit ihm weder in mündlichem, noch schriftlichem Verkehr mehr gestanden, und da keine Publication von ihm erfolgte, so glaubte ich einen lang schon gehegten Plan, über Chelidonsäure zu arbeiten, zu dem ich durch meine Jodoformreaction geführt worden war und den ich nur aus Rücksicht für Lerch in Folge seiner damaligen Mittheilung bei Seite geschoben hatte, endlich ausführen zu dürfen. So gern ich die Rücksicht übe, einem Chemiker, der über einen Gegenstand arbeitet, ein Paar Jahre Zeit für ungestörte Ausführung zu lassen, so kann ich es doch nicht für zulässig erachten, dass Jemand, ohne zu publiciren, bloss mit der Erklärung, dass er darüber arbeite, ein Forschungsgebiet auf Decennien hinaus absperrt und für sich allein in Anspruch nimmt. Weder vom wissenschaftlichen Standpunkt, noch von dem persönlicher Rücksicht ist man verpflichtet eine solche uneffective Blocade zu respectiren.

Was nun die Mittheilungen anlangt, die er mir damals gemacht hat, so ist Lerch offenbar in einer Selbsttäuschung befangen. Dieselben waren nicht so umfassend und ausserdem nicht so klar und präcis als sie nun zwölf Jahre später aus der Erinnerung Lerch's auskrystallisirt sind. Er sprach mir:

1. Von dem acetonähnlichen Geruch bei Behandlung der Chelidonsäure mit Alkalien und fragte mich, indem er die Güte hatte den Versuch im Reagensrohr vor mir anzustellen, ob ich das für Acetongeruch halte. Wenn nun Lerch heute mittheilt, dass er damals schon seiner Sache völlig sicher war, so mag dies ja sein, aber mir gegenüber war weder von einer Abscheidung und Analyse des Acetons, noch von einem Nachweis durch Bisulfit etc. die Rede und ich konnte daher auch zur Constatirung von Lerch's Ansprüchen nicht mehr thun als ich in der Abhandlung (Monatsh. f. Ch. V, p. 345, Anmerkung) und bereits in der vorläufigen Mittheilung (ibid. IV, p. 274) gethan habe. Auch würde ich wahrlich nicht das kostbare Chelidonsäurematerial auf Aceton verarbeitet haben, wenn ich den Nachweis des Acetons als bereits erbracht hätte betrachten können.
2. Von der meconsäureähnlichen rothen Eisenreaction eines gebromten Derivates der Chelidonsäure. Dass dieses Derivat stickstoffhaltig ist, wusste ich damals nicht und so ist Lerch's Mittheilung für meine Arbeit völlig bedeutungslos gewesen, wenn ich auch heute, nachdem

Haitinger und ich inzwischen ganz selbstständig die Dibromammonchelidonsäure entdeckt haben, sehr gern glauben will, dass es eben dieser Körper war, den Lerch damals in Händen hatte.

3. Von einer Aminsäure, die durch Einwirkung von Ammoniak auf Chelidonsäure sich bildet. Es ist dies die von Haitinger und mir als Ammonchelidonsäure bezeichnete Säure, deren Kenntniss wir lediglich aus Lietzenmayer's Abhandlung geschöpft haben. Wir haben die nahe Beziehung dieser Säure zum Pyridin erkannt und ein Oxypyridin (die erste derartige Verbindung) daraus dargestellt. Auf Entdeckung der Ammonchelidonsäure haben wir keinerlei Anspruch erhoben.

Was die sonstigen Coincidenzen zwischen Lerch's Abhandlung einerseits, und unseren Abhandlungen I und II (theilweise auch den vorl. Mittheilungen, Monatsh. f. Ch. 1883, p. 273 u. 339) anderseits anlangt, also insbesondere die Erkenntniss, dass die gelben Salze nicht der Chelidonsäure, sondern einer eigenthümlichen Säure (Xanthochelidonsäure Lerch's Chelhydronsäure) entsprechen, — die Angaben über Äther der Chelidonsäure, — über Oxypyridin (Lerch's Chelamin) u. s. w. so stehen dieselben zu den Mittheilungen, die mir Lerch damals gemacht hat und die ich eben angeführt habe, in gar keiner Beziehung. Auch ist es mir nicht früher, als durch die Abhandlung von Lerch bekannt geworden, dass er seine Vorstellung von der dreibasischen Natur der Chelidonsäure aufgegeben hat.

Nur ein Punkt mag hier noch Erwähnung finden.

Gestützt auf sorgfältige quantitative Bestimmungen haben Haitinger und ich in unserer vorl. Mittheilung (April 1883) bezüglich der Spaltung, welche Chelidonsäure beim Kochen mit starken Basen erleidet, eine für die Erkenntniss der Constitution der Chelidonsäure sehr wichtige Gleichung aufgestellt:

$$C_7H_4O_6 + 3H_2O = 2H_2C_2O_4 + C_3H_6O$$

Lerch, der keine darauf bezüglichen quantitativen Versuche ausgeführt hat, hat trotzdem diese Gleichung in seine Abhandlung aufgenommen, als wenn sie eine selbstverständliche Consequenz aus dem qualitativen Nachweis des Acetons und der Oxalsäure wäre. Dies ist jedoch ein Irrthum. Denn abgesehen davon, dass die blosse Nichtbeobachtung eines anderen Spaltungsproductes als Aceton und Oxalsäure noch keinen Beweis dafür abgibt, dass wirklich kein anderer Körper dabei entsteht (Lietzenmayer z. B. glaubte dass Kohlensäure neben Oxalsäure auftritt), so lässt sich wohl überhaupt auf keinem anderen als dem quantitativen Wege der Beweis dafür erbringen, dass gerade 2 Mol. Oxalsäure und 1 Mol. Aceton aus 1 Mol. Chelidonsäure hervorgehen. Indem nun Lerch die in Rede stehende Zersetzungsgleichung in seine Abhandlung aufnahm, scheint ihm dabei entgangen zu sein, dass dieselbe mit der von ihm aufgestellten Chelidonsäureformel ganz unvereinbar ist, denn der auf p. 409 sub 4 gemachte Versuch das Unmögliche möglich erscheinen zu lassen, kann wohl nicht als gelungen gelten. Lieben.

Über die Einwirkung des Kaliumhypermanganats auf unterschwefligsaures Natron.

Von M. Gläser.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. April 1885.)

Morawski und Stingl sprechen im Journal für praktische Chemie (Bd. XVIII, pag. 86) den Satz aus, dass bei der Einwirkung von Kaliumhypermanganat auf Lösungen oxydirbarer Körper unter Ausschluss freier Mineralsäuren vollständige Oxydation stattfindet, und hiebei die Verbindung $KH_3Mn_4O_{10}$ entsteht. Wenn dieser Satz allgemeine Geltung hat, so muss auch das unterschwefligsaure Natron durch Permanganat vollständig in Natriumsulfat übergeführt werden, wenn keine freie Mineralsäure vorhanden ist.

Hönig und Zatzek [1] behaupten jedoch, dass diese Oxypation quantitativ nur in alkalischer Lösung vor sich geht, wobei sich aber nicht die oben angegebene Verbindung $KH_3Mn_4O_{10}$ sondern der Körper $KH_3Mn_3O_8$ bilden soll. Sie stellen nun für diesen Process die folgende Gleichung auf:

$$9Na_2S_2O_3+12K_2Mn_2O_8+12H_2O+K_2CO_3 =$$
$$=8KH_3Mn_3O_8+9Na_2SO_4+9K_2SO_4+CO_2.$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, dass bei der Reaction von übermangansaurem Kali auf unterschwefligsaures Natron in mit kohlensaurem Kali alkalisch gemachter Lösung das kohlensaure Kali mit in den Process eintreten, und sich hiebei Kohlensäure entwickeln müsste.

Über Veranlassung der Herren Stingl und Morawski habe ich neuerlich die Einwirkung des Kaliumhypermanganats

---

[1] Monatshefte IV, 738.

auf unterschwefligsaures Natron studirt und bin hiebei zu den nachfolgend verzeichneten Resultaten gelangt, welche im Wesentlichen von denen der Herren Hönig u. Zatzek abweichen, und die Angaben Morawski's und Stingl's bestätigen.

Um vor Allem die von Hönig und Zatzek aufgestellte Gleichung zu controliren, versuchte ich, die frei werdende Kohlensäure quantitativ zu bestimmen. Hiezu benützte ich den von Kolbe für Kohlensäurebestimmungen angegebenen Apparat. In den Zersetzungskolben wurde die Lösung von 2·4738 Grm. krystallisirtem unterschwefligsauren Natron gebracht, welche mit der nach der Gleichung berechneten Menge kohlensauren Kali alkalisch gemacht wurde; die zur Zersetzung nothwendige Menge Chamäleon wurde durch den Kugeltrichter bei gewöhnlicher Temperatur zufliessen gelassen, hierauf wurde bis zum Kochen erhitzt. Der Absorptionsapparat für die Kohlensäure zeigte aber keine Gewichtszunahme, während sich nach der Gleichung 0·0488 Grm. CO_2 hätten entwickeln sollen. Es ist somit dadurch der Beweis erbracht, dass bei der Einwirkung von Kaliumhypermanganat auf unterschwefligsaures Natron in mit kohlensauren Alkalien alkalisch gemachter Lösung keine Kohlensäure frei wird.

Nun wurde der erhaltene Niederschlag abfiltrirt und gut gewaschen, und im Filtrate das kohlensaure Kali durch Titration bestimmt. Während unter der Annahme, dass das Kaliumcarbonat nicht in chemische Action tritt, im Filtrate 0·1532 Grm. kohlensaures Kali hätten vorhanden sein müssen, waren durch die Titration nur 0·0116 Grm. kohlensaures Kali nachzuweisen.

Nachdem also auf diese Weise nicht das ganze zugesetzte kohlensaure Kali gefunden werden konnte, so musste ein Theil des Kaliumcarbonats als solches im Niederschlage enthalten sein. Hievon überzeugte ich mich durch eine directe Kohlensäurebestimmung im Niederschlage, wozu ich wieder den Kolbe'schen Apparat benützte. Die Zersetzung geschah durch Schwefelsäure. Hiebei lieferte der Niederschlag, welcher aus 4·9475 Grm. krystallisirtem unterschwefeligsauren Natron erhalten wurde 0·0614 Grm. CO_2.

Durch diese Versuche ist erwiesen, dass die Manganite, welche bei der Zersetzung des Permanganates durch oxydirbare

Körper in mit kohlensauren Alkalien alkalisch gemachten Lösungen entstehen, kohlensaures Alkali als solches hartnäckig zurückhalten, worauf schon Morawski und Stingl in ihrer Abhandlung hingewiesen haben. [1]

Es ist daher selbstverständlich, dass bei der Analyse solcher, kohlensaures Kali enthaltender Niederschläge der Mangangehalt niedriger, der Kaliumgehalt höher ausfallen muss, als es die Formel $KH_2Mn_4O_{10}$ fordert.

Nachdem ich mich von der Unrichtigkeit der von Hönig und Zatzek aufgestellten Gleichung überzeugt hatte, wiederholte ich die Versuche über die Einwirkung des Permanganats auf neutrale Lösungen von unterschwefeligsauren Natron. In die kochende Lösung dieses Salzes wurde so lange Chamäleon zufliessen gelassen, bis dauernde Rothfärbung eintrat. Der Niederschlag wurde abfiltrirt, gut gewaschen und im Filtrate die Schwefelsäure bestimmt, nachdem vorher der Überschuss des Chamäleons durch Oxalsäure zerstört worden war. In dieser Weise verarbeitet, lieferten

1. 0·1237 Grm. unterschwefligsaures Natron 0·2350 Grm. schwefelsauren Baryt, entsprechend 0·0807 Grm. SO_3; die Theorie verlangt 0·0798 Grm. SO_3.
2. 0·1979 Grm. unterschwefligs. Natron gaben 0·3792 Grm. schwefelsauren Baryt, entsprechend 0·1302 Grm. SO_3; Theorie 0·1277 Grm. SO_3.
3. Aus 0·4082 Grm. unterschwefligsauren Natron's wurden 0·7747 Grm. Baryumsulfat erhalten, welche äquivalent sind 0·2660 Grm. SO_3, statt 0·2634 Grm. SO_3, welche theoretisch vorhanden sind.

Diese Bestimmungen zeigen, dass das gesammte unterschwefeligsaure Natron in Natriumsulfat übergegangen ist, also vollständige Oxydation stattgefunden hat.

Um die Mengen von Hypermanganat und unterschwefligsaurem Natron zu ermitteln, welche in Wechselwirkung treten, wurden unter verschiedenen Umständen Versuche angestellt, die in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt sind.

---

[1] Journ. f. pr. Chemie 18, 94.

	Grammen $Na_2S_2O_3.5H_2O$	Verbrauchte cc Permanganatlösung	1cc der Permanganatlösg. enthält Grm. Permanganat	Zur Oxydation verbrauchtes Permanganat in Grammen	1 Grm. $Na_2S_2O_3.5H_2O$ benöthigte zur Oxydation Permanganat in Grammen
1.	0·1249	127·3	0·001632	0·207754	1·6634
2.	0·2350	239·2	0·001632	0·390374	1·6612
3.	0·0989	61·15	0·0026767	0·163680	1·6550
4.	0·1855	115·3	0·0026767	0·308624	1·6637
5.	0·1163	58·9	0·003251	0·191484	1·6465
6.	0·3711	192·1	0·003251	0·624517	1·6829

Aus diesen Daten ergibt sich, dass im Mittel zur Oxydation von 1 Grm. $Na_2S_2O_3.5H_2O$ 1·6621 Grm. Permanganat nothwendig sind, was ziemlich gut mit dem Reactionsverhältnisse $3Na_2S_2O_3.5H_2O : 4K_2Mn_2O_8$ stimmt. Dieses Molekularverhältniss verlangt auf 1 Grm. $Na_2S_2O_3.5H_2O$ 1·7 Grm. $K_2Mn_2O_8$, während in Wirklichkeit nach obigen Versuchen auf 1 Grm. $Na_2S_2O_3.5H_2O$ 1·6621 Grm. Permanganat gefunden wurden, was 97·7% der theoretischen Chamäleonmenge entspricht.

Schliesslich ermittelte ich die Zusammensetzung der bei der Reaction in neutraler Lösung entstandenen braunschwarzen Niederschläge. Die zur Analyse verwendeten Substanzen rührten von verschiedenen Darstellungen her, und wurden dieselben vor der Analyse bei 100° C. bis zur Gewichtsconstanz getrocknet.

I. 0·3644 Grm. Substanz gaben 0·2983 Grm. Mangansulfür und 0·0781 Grm. Kaliumsulfat; hieraus folgen 51·75% Mangan und 9·62% Kalium. 0·5664 Grm. Substanz lieferten beim Glühen 0·0428 Grm. Wasser, woraus sich 0·84% Wasserstoff ergeben.

II. 0·5182 Grm. Substanz gaben 0·4290 Grm. Mangansulfür und 0·1090 Grm. Kaliumsulfat, entsprechend 52·34% Mangan und 9·44% Kalium. 0·5467 Grm. Substanz lieferten beim Glühen 0·0438 Grm. Wasser, entsprechend 0·89% Wasserstoff.

III. Aus 0·3547 Grm. Substanz wurden 0·2930 Grm. Mangansulfür und 0·0729 Grm. Kaliumsulfat, das sind 52·22% Mangan und 9·23% Kalium erhalten.

Beim Glühen gaben 0·6185 Grm. Substanz 0·0512 Grm. Wasser ab, woraus 0·92% Wasserstoff folgen.

	I.	II.	III.	Mittel	Berechnet für $KH_3Mn_4O_{10}$	Berechnet für $KH_2Mn_2O_8$
	in Procenten					
Kalium	9·62	9·44	9·23	9·43	9·26	11·67
Mangan.....	51·75	52·34	52·22	52·10	52·12	49·24
Wasserstoff....	0·84	0·89	0·92	0·88	0·71	0·90
Sauerstoff (aus d. Differenz)	37·79	37·33	37·63	37·59	37·91	38·19

Die Analysen zeigen demnach, dass die Niederschläge eine Zusammensetzung haben, die am besten der Formel $KH_3Mn_4O_{10}$ entspricht.

Auf Grund der ermittelten Daten lässt sich daher folgende Reactionsgleichung zwischen Kaliumhypermanganat und unterschwefligsaurem Natron in neutraler Lösung aufstellen:

$$3Na_2S_2O_3+4K_2Mn_2O_8+3H_2O=2KH_3Mn_4O_{10}+3Na_2SO_4+\\+3K_2SO_4.$$

Aus den im Vorhergehenden beschriebenen Versuchen geht hervor, dass durch die Arbeit der Herren Hönig und Zatzek über das unterschwefligsaure Natron der von Morawski und Stingl ausgesprochene Satz — „das Kaliumpermanganat gibt 3 Atome Sauerstoff an oxydirbare Körper leicht ab, wenn keine freie Mineralsäure vorhanden ist, und es entsteht hiebei nicht Mangansuperoxydhydrat, sondern $KH_3Mn_4O_{10}$“ — nicht widerlegt, sondern vielmehr durch meine Untersuchungen bestätigt wurde. Ich hoffe in kurzer Zeit weitere Resultate über die Einwirkung des Chamäleons auf oxydirbare Körper in neutraler Lösung mittheilen zu können.

Bielitz, Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von **F. Mertens.**

Die in den Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen auftretende Grösse q lässt sich, wie Herr Weierstrass gezeigt hat[1], in eine nach ganzen positiven Potenzen des Quadrats k^2 des Moduls fortschreitende Reihe entwickeln, welche für alle Werthe von k^2 mit die Einheit nicht übersteigendem absoluten Betrage convergirt. Ich will hier auf denselben Gegenstand, welcher mich zur Zeit des Erscheinens des ersten Bandes von Jacobi's Werken beschäftigt hat, nur zurückkommen, um zu zeigen, wie man die erwähnte Reihe unmittelbar aus dem Theorema II Art. 37 der Fundamenta nova erhält.

Setzt man $k^2 = t$

$$t^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{t}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{t^2}{6} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{t^3}{8} + \ldots\right)^4 = \left.\begin{aligned} &= \frac{1}{t^2}(1-\sqrt{1-t})^4 = T \\ T^p &= A^{(p)}_{2p}t^{2p} + A^{(p)}_{2p+1}t^{2p+1} + A^{(p)}_{2p+2}t^{2p+2} + \ldots, \end{aligned}\right\} 1$$

so muss, wenn es eine nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Reihe $R(t)$ für q gibt, dieselbe nach dem obgenannten Satze der Fundamenta der Identität

$$R^2(t) = R(T) \qquad 2)$$

genügen. Diese Functionalgleichung bestimmt aber auch die Reihe $R(t)$ vollständig, wenn man verlangt, dass letztere die Gestalt

$$R(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$$

---

[1] Sitzungsberichte der k. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1883.

haben und a_1 nicht $= 0$ sein soll [die der obigen Identität genügenden Reihen, welche mit einer höheren als der ersten Potenz von t anfangen, sind einfach Potenzen von $R(t)$]. Es ist indessen bequemer den Logarithmus von $\frac{R(t)}{a_1 t}$ zu bestimmen.

Zu diesem Ende werde

$$2.\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}.\frac{1}{n} = b_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots = \varphi(t)$$

gesetzt, wo, wie leicht zu sehen, $\varphi(t)$ die Reihe für $l\frac{16T}{t^2}$ ist, und eine Reihe

$$f(t) = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots$$

bestimmt, welche der Identität

$$2f(t) = f(T) + \varphi(t) \qquad 3$$

genügt. Die Gleichsetzung der Coëfficienten derselben Potenzen von t auf beiden Seiten ergibt, unter ν die grösste in $\frac{1}{2}n$ enthaltene ganze Zahl verstanden, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
2C_1 &= b_1 \\
2C_2 &= A_2^{(1)} C_1 + b_2 \\
2C_3 &= A_3^{(1)} C_1 + b_3 \\
2C_4 &= A_4^{(1)} C_1 + A_4^{(2)} C_2 + b_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2C_n &= A_n^{(1)} C_1 + A_n^{(2)} C_2 + \ldots + A_n^{(\nu)} C_\nu + b_n,
\end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

mit deren Hilfe die unbekannten Coëfficienten $C_1, C_2, \ldots$ nach und nach bis zu jedem gewünschten Stellenzeiger berechnet werden können. Es erhellt unmittelbar, dass diese Coëfficienten alle positiv ausfallen, da ja $b_1, b_2, \ldots$ und alle Zahlen $A_\mu^{(p)}$ nach 1) positiv sind. Insbesondere wird

$$C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{13}{64} \quad C_3 = \frac{23}{192} \ldots.$$

Die Addition der Gleichungen 4) ergibt, wenn man

$$C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_n t^n = f_n(t)$$
$$b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n = \varphi_n(t)$$
$$A_{2p}^{(p)} t^{2p} + A_{2p+1}^{(p)} t^{2p+1} + \ldots + A_n^{(p)} t^n = \Psi_n^{(p)}(t)$$

setzt und beachtet, dass die Reihen für T, $T^2, \ldots$ noch für $t = 1$ convergiren, weil ja die Reihe für $\sqrt{1-t}$ diese Eigenschaft hat, und die Summe 1 haben, dass ferner $\varphi(1) = l16$, dass also

$$\varphi_n(1) < l16 \quad \Psi_n^{(p)}(1) < 1$$

ist:

$$2f_n(1) = \varphi_n(1) + C_1 \Psi_n^{(1)}(1) + C_2 \Psi_n^{(2)}(1) + \ldots + C_\nu \Psi_n^{(\nu)}(1)$$
$$< l16 + f_\nu(1) < l16 + f_n(1).$$

Hieraus folgt:

$$f_n(1) < l16 \qquad 5)$$

und da in Folge dessen jeder Coëfficient C_μ unter $l16$ liegt, so convergirt die Reihe $f(t)$ für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag < 1 ist. Man kann indessen beweisen, dass $f(t)$ auch noch für $t = 1$ convergirt. Hiezu genügt der Nachweis, dass die Summe

$$F(n) = C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_s,$$

wo s irgend eine ganze positive über n liegende Zahl bezeichnet, von gewünschter Kleinheit wird, wenn n über eine anzugebende Grenze hinaus liegt.

Zunächst lässt sich darthun, dass allgemein

$$C_r < \frac{1}{r} \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

ist. Man hat nämlich

$$T^p = \frac{t^{2p}}{\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(1-iz)^{4p}} - \frac{1}{(1+iz)^{4p}} \right] \frac{z\,dz}{1+z^2-t}$$

und demzufolge, wenn man $z = \sqrt{x}$ setzt und den Coëfficienten von t^n nimmt:

$$A_n^{(p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p} - \left(\frac{1-i\sqrt{x}}{1+i\sqrt{x}}\right)^{2p}\right]\frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \cdot \quad 6)$$

Ersetzt man die beiden Bestandtheile des zu integrirenden Elementes durch ihre absoluten Beträge, so wird

$$A_n^{(p)} < \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{2\,dx}{(1+x)^{n+1}}$$

$$< \frac{1}{n\pi}.$$

Aus 4) schliesst man dann

$$C_n < \frac{1}{2n\pi}(C_1 + C_2 + \ldots + C_\nu) + \frac{1}{2}\,b_n < \frac{1}{n}\left(\frac{l16}{2\pi} + \frac{1.3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)$$

$$< \frac{1}{n}.$$

Addirt man ferner die aus der letzten der Gleichungen 4) für die Stellenzeiger $n+1$, $n+2, \ldots s$ hervorgehenden Gleichungen, so ergibt sich

$$2F(n) = B^{(1)}C_1 + B^{(2)}C_2 + \ldots + B^{(\nu)}C_\nu +$$
$$+ C_{\nu+1}\Psi_s^{(\nu+1)}(1) + C_{\nu+2}\Psi_s^{(\nu+2)}(1) + \ldots + C_\sigma\Psi_s^{(\sigma)}(1)$$
$$+ b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_s,$$

wo

$$B^{(p)} = A_{n+1}^{(p)} + A_{n+2}^{(p)} + \ldots + A_s^{(p)},$$

und σ die grösste in $\frac{1}{2}s$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Hieraus folgt, da

$$B^{(p)} < 1 \quad \Psi_s^{(p)} < 1 \quad C_r < \frac{1}{r}$$

$$b_{n+r} < 4\left[\frac{1.3\ldots 2n+2r-3}{2\cdot 4\ldots 2n+2r-2} - \frac{1\cdot 3\ldots 2n+2r-1}{2.4\ldots 2n+2r}\right]$$

und somit

$$b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_s < 4.\frac{1.3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n} < \frac{4}{\sqrt{2n}}$$

ist:

$$2F(n) < B^{(1)} + \frac{1}{2}B^{(2)} + \ldots + \frac{1}{m}B^{(m)} + C_{m+1} + C_{m+2} + \ldots + C_\nu + \frac{4}{\sqrt{2n}}$$

$$< F(m) + B^{(1)} + \frac{1}{2}B^{(2)} + \ldots + \frac{1}{m}B^{(m)} + \frac{4}{\sqrt{2n}},$$

wo $m \leqq \nu$; da überdies nach 6)

$$B^{(p)} < \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p} - \left(\frac{1-i\sqrt{x}}{1+i\sqrt{x}}\right)^{2p}\right]\frac{dx}{x(1+x)^{n+1}}$$

und der absolute Betrag des Ausdruckes

$$\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p} - \left(\frac{1-i\sqrt{x}}{1+i\sqrt{x}}\right)^{2p} = \frac{4i\sqrt{x}}{1+x}\left[\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p-1} + \left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p-3} + \ldots\right]$$

nicht grösser als $\frac{8p\sqrt{x}}{1+x}$ ist, so hat man

$$B^{(p)} < \frac{4p}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^{n+1}\sqrt{x}}$$

$$< 4p.\frac{1.3.\ldots.2n-1}{2.4.\ldots.2n} < \frac{4p}{\sqrt{2n}}$$

$$B^{(1)} + \frac{1}{2}B^{(2)} + \ldots + \frac{1}{m}B^{(m)} < \frac{4m}{\sqrt{2n}}$$

und demzufolge

$$2F(n) < F(m) + \frac{4(m+1)}{\sqrt{2n}}. \qquad 7)$$

Setzt man nun

$$n = 2^{4^\lambda} \qquad m = 2^{4^{\lambda-1}},$$

so wird

$$\frac{4(m+1)}{\sqrt{2n}} = 2\sqrt{2}\,\frac{\left(1+\frac{1}{2^{4^{\lambda-1}}}\right)}{2^{4^{\lambda-1}}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2^{2\lambda-1}}$$

und man schliesst aus der Ungleichung 7), wenn man beide Seiten mit $2^{\lambda-1}$ multiplicirt

$$2^{\lambda}F\left(2^{4^{\lambda}}\right) < 2^{\lambda-1}F\left(2^{4^{\lambda-1}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\lambda}}$$

oder

$$2^{\lambda}F\left(2^{4^{\lambda}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\lambda}} < 2^{\lambda-1}F\left(2^{4^{\lambda-1}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\lambda-1}}.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man $\lambda = 1, 2, \ldots \mu$ setzt,

$$2^{\mu}F\left(2^{4^{\mu}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\mu}} < F(2) + 3\sqrt{2}$$

und da $F(2) < l16 - C_1 - C_2 = l16 - \frac{45}{64}$ ist:

$$F\left(2^{4^{\mu}}\right) < \frac{c}{2^{\mu}},$$

wo

$$c = l16 + 3\sqrt{2} - \frac{45}{64}.$$

Wenn daher ρ eine Zahl von vorgeschriebener Kleinheit ist, so hat man

$$F(n) < \rho,$$

wenn

$$n > 2^{\frac{\infty}{\rho\rho}}$$

genommen wird.

Die Richtigkeit der Gleichung (3) für alle Werthe von t, deren absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, ist eine unmittelbare Folge der Convergenz der Reihe $f(1)$, vorausgesetzt, dass die Wurzel $\sqrt{1-t}$ mit positivem reellen Bestandtheile ausgezogen wird, wie es die Reihenentwickelung für T erheischt.

Setzt man

$$\frac{t}{16}\, e^{f(t)} = R(t)$$

so hat die Reihe $R(t)$ ebenfalls durchwegs positive Coëfficienten, convergirt für dieselben Werthe von t wie $f(t)$ und genügt der Gleichung (2). Man erhält daher für alle Werthe von k^2, deren

absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, mit Ausnahme der Einheit selbst, einen Werth von q durch die Gleichung

$$q = R(k^2).$$

Für die Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots$ von $R(t)$ erhält man aus der Identität

$$\tau_3^2(0, R(t)) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 t + \left(\frac{1\cdot 3}{2.4}\right)^2 t^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 t^3 + \ldots$$

die Ungleichung

$$a_n < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Über die Hesse'sche Fläche der Flächen dritter Ordnung.

Von Dr. C. Le Paige,
Professor an der Universität in Lüttich.

Dieselbe Methode, nach welcher man die Anzahl der einer Fläche dritter Ordnung eingeschriebenen Pentaëder, für welche eine Fläche und eine in derselben gelegene Kante beliebig gewählt wird, bestimmen kann,[1] erlaubt uns auch, eine ähnliche Frage bezüglich der Hesse'schen Fläche der Flächen dritter Ordnung zu beantworten.

Bezieht man die Fläche auf das Sylvester'sche Pentaëder, so hat man die Gleichung:

$$\frac{a_1}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta} + \frac{c_1}{\gamma} + \frac{d_1}{\delta} + \frac{e_1}{\omega} = 0 \qquad 1)$$

Wenn wir nun das Tetraëder $\alpha\beta\gamma\delta = 0$ als Fundamentaltetraëder betrachten, so gilt eine Identität von der Form:

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta + e_2\omega \equiv 0. \qquad 2)$$

Man kann leicht die Fläche durch Ebenenbüschel erzeugen, deren Axen die in der Ebene $\omega = 0$ enthaltenen Kanten des Pentaëders sind. Betrachtet man die Ebenenbüschel:

$$\begin{aligned} \alpha - \lambda\omega &= 0, \\ \beta - \mu\omega &= 0, \\ \gamma - \nu\omega &= 0, \\ \delta - \rho\omega &= 0, \end{aligned}$$

---

[1] Acta Mathematica, T. V, p. 195—202. Le Paige, „Nouvelles recherches sur les surfaces du 3e ordre.

und lässt man λ, μ, ν, ρ den Gleichungen:

$$\frac{a_1}{\lambda} + \frac{b_1}{\mu} + \frac{c_1}{\nu} + \frac{d_1}{\rho} + e_1 = 0,$$
$$a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\rho + e_2 = 0,$$

oder in anderer Form geschrieben, den Gleichungen:

$$f \equiv e_1\,\lambda\mu\nu\rho + d_1\,\lambda\mu\nu + c_1\,\lambda\mu\rho + b_1\,\lambda\nu\rho + a_1\,\mu\nu\rho = 0,$$
$$\varphi \equiv a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu + d_2\rho + e_2 = 0,$$

Genüge leisten, so erfüllen die Ebenen, welche sich in Punkten der Hesse'schen Fläche H schneiden, diese beiden Gleichungen, sowie die Relation

$$\theta_1 f + \theta_2\,\varphi = 0.$$

Wir haben gezeigt, dass man für jeden Werth von $\theta_1 : \theta_2$ diese Gleichung durch eine zweckmässige Transformation in die Form:

$$a_{1111}x_1y_1z_1u_1 + a_{1112}x_1y_1z_2u_2 + a_{1212}x_1y_2z_1u_2 + a_{1221}x_1y_2z_2u_1$$
$$+ a_{2112}x_2y_1z_1n_2 + a_{2121}x_2y_1z_2u_1 + a_{2211}x_2y_2z_1u_1$$
$$+ a_{2222}x_2y_2z_2u_2 = 0$$

zu bringen vermag.

Hieraus folgt, dass man die Gleichung der Hesse'schen Fläche auf unendlich viele Arten in die Form:

$$H \equiv a_{1111}\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 + a_{1112}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + a_{1221}\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_1 +$$
$$a_{2112}\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2 + a_{2121}\alpha_2\beta_1\gamma_2\delta_1 + a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 + a_{2222}\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2 = 0.$$

Man erkennt nun sofort, dass für $a_{2222} = 0$, das Tetraëder $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 = 0$ der Fläche eingeschrieben ist und mit der Ebene $\omega = 0$ des Fundamentalpentaëders ein neues der Hesse'schen Fläche eingeschriebenes Pentaëder bildet; ausserdem erkennt man, dass seine vier in $\omega = 0$ gelegenen Kanten ihrer ganzen Ausdehnung nach der Fläche angehören. Das Verschwinden der anderen α-Coëfficienten liefert ähnliche Resultate, für deren Zustandekommen über das Verhältniss $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ zweckdienlich disponirt werden muss.

Für eine der fundamentalen biquadratischen Covarianten von $\theta_1 f + \theta_2 \varphi$ erhalten wir den Ausdruck:

$$\theta_1\theta_2[\lambda^4(a_2^2e_1^2\theta_1\theta_2 + 4a_2b_1c_1d_1\theta_1^2) + 2\lambda^3\{2e_2b_1c_1d_1\theta_1^2$$
$$+ (a_1a_2 + e_1e_2 - d_1d_2 - c_1c_2 - b_1b_2)a_2e_1\theta_1\theta_2\}$$
$$+ 2\lambda^2\theta_1\theta_2\{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2 + d_1^2d_2^2 + e_1^2e_2^2 + 3a_1a_2e_1e_2 -$$
$$2(a_1a_2 + e_1e_2)(b_1b_2 + c_1c_2)\}$$
$$+ 2\lambda\{2e_1b_2c_2d_2\theta_2^2 + (a_1a_2 + e_1e_2 - d_1d_2 - c_1c_2 - b_1b_2)a_1e_2\theta_1\theta_2\}$$
$$+ (a_1^2e_2^2\theta_1\theta_2 + 4a_1b_2c_2d_2\theta_2^2)].$$

Die Discriminante dieses Ausdruckes besitzt die Form:

$$\Delta = \theta_1^8\theta_2^8A_8^8,$$

und man erkennt leicht, dass in A_8^8 die Glieder, welche θ_1^8 und θ_2^8 enthalten, nicht verschwinden.

Wie wir in der Abhandlung über Flächen dritter Ordnung gezeigt haben, verschwindet einer der Coëfficienten von H, wenn $\Delta = 0$ wird; die im Allgemeinen von einander verschiedenen acht Werthe von $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ für welche A_8^8 verschwindet, liefern somit eingeschriebene Pentaëder:

„Man kann somit über jede Seitenfläche des fundamentalen Pentaëders acht Tetraëder construiren, von denen jedes mit jener Seitenfläche zusammen ein der Hesse'schen Fläche eingeschriebenes Pentaëder darstellt."

Diese wohl noch nicht bemerkte Eigenschaft führt zu einer nicht uninteressanten Erzeugung der Hesse'schen Fläche; doch soll zunächst die Construction einer allgemeinen Fläche gegeben werden.

Es seien A, B, C, D vier beliebige Punkte und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier beliebige Ebenen; jede Ebene ε des Raumes schneidet die vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in vier Geraden a, b, c, d und wir stellen uns nun die Frage nach dem Orte eines Punktes, welcher als der den vier Ebenen $(Aa), (Bb), (Cc), (Dd)$ gemeinsame Punkt auftritt. Der Ort eines solchen Punktes ist eine Fläche, deren Ordnung man folgendermassen bestimmen kann.

Es sei A_1 der Schnittpunkt von α mit irgend einer durch A gezogenen Geraden; die Ebenen des Bündels A_1 bestimmen auf β, γ, δ entsprechende Strahlen dreier collinearer Systeme, welche aus B, C, D respective projicirt drei collineare Bündel geben, deren Erzeugniss eine Fläche dritter Ordnung S_3 sein wird. Der fragliche Ort ist somit das Erzeugniss eines Bündels A von Strahlen und eines projectivischen Systemes von Flächen dritter Ordnung S_3. Dieser Ort ist somit eine Fläche vierter Ordnung S_4. Man erkennt sofort, dass die Kanten des Tetraëders $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ der Fläche S_4 angehören.

Lässt man die Ebene ε mit der Ebene $B\ C\ D$ zusammenfallen, so sieht man, dass die Schnittgerade der Ebene α mit der Ebene $B\ C\ D$ ebenfall der Fläche S_4 angehört u. s. w. So haben wir die Existenz von zehn Geraden auf der Fläche S_4, welche auch die Punkte A, B, C, D enthält, nachgewiesen.

Die Geraden a, b, c, d, in denen die Ebenen ε irgend eines Bündels P die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ schneiden, gehören vier collinearen Systemen an, so dass die Ebenen (Aa), (Bb), (Cc), (Dd) vier collineare Bündel bilden, welche eine Curve sechster Ordnung G_6 vom Geschlechte drei zum Erzeugnisse haben; diese Curve G_6 gehört der Fläche S_4 an, und geht ersichtlich durch die Ecken des Tetraëders $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dessen Kanten sie zu Trisecanten hat.

Wenn die beiden Tetraëder $\alpha\beta\gamma\delta$, $ABCD$, in perspectivischer Lage sind, so dass sich also die vier Ebenenpaare α, BCD; β, CDA; γ, DAB, δ, ABC in vier Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 einer Ebene ω schneiden, so erhalten wir eine specielle Fläche S_4, für welche die oben erwähnten zehn Geraden die Kanten eines Pentaëders bilden.

Aus der einleitenden Betrachtung ergibt sich nun sofort, dass man die Hesse'sche Fläche H einer Fläche dritter Ordnung in der angegebenen Weise als Fläche S_4 erzeugen kann; es genügt zu dem Zwecke, aus vier Ebenen des fundamentalen Pentaëders das Tetraëder $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ zu bilden, und eines der über der fünften Ebene ω des Pentaëders construirbaren Tetraëder welche mit ω ein neues Pentaëder bilden, als das Tetraëder $ABCD$ zu betrachten.

Die sämmtlichen, auf S_4 liegenden Curven G_6, welche den einzelnen Punkten P des Raumes entsprechen, gehen durch die

zehn Scheitel des fundamentalen Pentaëders; durch irgend drei Punkte der Fläche S_4 kann man eine solche Curve G_6 hindurchlegen, da jene drei Punkte der Erzeugungsart der Fläche S_4 gemäss, drei Ebenen ε entsprechen, welche das Bündel P vollkommen bestimmen.

Je zwei Curven G_6 schneiden sich, ausser in den zehn Scheiteln des fundamentalen Pentaëders noch in vier weiteren Punkten. Um dies einzusehen, betrachten wir die Ebenen ε irgend eines Büschels l; dieselben bestimmen auf den Ebenen α, β, γ, δ vier Büschel von Strahlen a, b, c, d, welche in perspectivischer Beziehung sind und die somit aus den Punkten A, B, C, D projicirt, zu vier projectivischen Ebenenbüscheln führen. In den letzteren gibt es aber bekanntlich vier Gruppen von entsprechenden Ebenen, von denen jede Gruppe einen Punkt gemeinsam hat. Wenn wir also zwei Curven G_6, G_6' betrachten, welche den Punkten P, Q entsprechen, so werden diese Curven jene vier Punkte gemeinsam haben, welche in der obigen Art durch das Ebenenbüschel $\overline{PQ}$ geliefert werden.

Die ebenen Schnitte der Fläche S_4 sind Curven vierter Ordnung ohne mehrfache Punkte. Denn, werden die sämmtlichen Punkte M des Raumes aus den Punkten A, B, C, D auf die Ebenen α, β, γ, δ respective projicirt, so umhüllen jene Ebenen, welche die vier Projectionen A_1, B_1, C_1, D_1 zugleich enthalten, eine Fläche Σ_4 vierter Classe, welche die Flächen des fundamentalen Pentaëders $ABCDT$ doppelt berührt, wobei T das perspectivische Centrum der beiden Tetraëder $\alpha\beta\gamma\delta$, $ABCD$ bedeutet. Bewegt sich M in einer Ebene, so beschreibt die Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ eine Developpable sechster Classe vom Geschlechte drei; hieraus folgt der ausgesprochene Satz, sowie man hieraus auch erkennt, dass S_4 keine mehrfachen Curven besitzt. Ebenso erkennt man auf Grund derselben Betrachtungen, dass der Punkt, welcher der Ebene ε entspricht, auf S_4 eine Curve G_{6n} $6n$-ter Ordnung beschreibt, wenn ε Tangentialebene einer Fläche n-ter Classe Σ_n bleibt. Denn die Ebenen, welche Punkten einer festen Ebene φ entsprechen, umhüllen nach Obigem eine Developpable Δ_6, und die gemeinsamen Tangentialebenen von Δ_6 und Σ_n liefern Punkte des fraglichen Ortes, welcher somit von der 6n-ten Ordnung ist.

Für besondere Lagen von P zerfällt die ihm entsprechende Curve G_6; ist P identisch mit A, so zerfällt G_6 in drei Kanten des Pentaëders und eine dem Tetraëder $\alpha\beta\gamma\delta$ umschriebene Raumcurve dritter Ordnung. Fällt P mit T zusammen, so zerfällt G_6 in sechs Kanten des Pentaëders.

Wir könnten noch manche Anwendungen der oben gegebenen Erzeugungsart der Hesse'schen Fläche, einer Fläche dritter Ordnung entwickeln, doch wollen wir uns begnügen, einen Weg gezeigt zu haben, den man beim Studium dieser wichtigen und interessanten Fläche einschlagen kann.

Astronomische Untersuchung über die in der Bibel erwähnte ägyptische Finsterniss.

Von Dr. **Eduard Mahler.**

(Mit 1 Karte.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. April 1885.)

Wenn wir den Schleier, in dem das graue Alterthum gehüllt ist, zu lüften wagen, kommen wir nur zu oft auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Insbesondere geschieht dies bei chronologischer Feststellung eines alten Ereignisses. Ist aber dasselbe mit einem besonderen Naturereignisse in Verbindung gebracht worden, so liegt es im Bereiche der Möglichkeit, jenes Naturereigniss, besonders wenn es astronomischer Art gewesen sein sollte oder konnte, durch Rechnung zu verfolgen und dadurch einen Anhaltspunkt für unsere Forschungen zu gewinnen. Und so versuchen wir denn auch in dieser Abhandlung mit Hilfe astronomischer Daten ein für die Chronologie vielleicht nicht unwichtiges Ereigniss näher zu beleuchten.

In Exodus, Cap. X, 21 bringt die Bibel eine Stelle, die im Urtexte also lautet:

נְטֵה יָדְךָ עַל־הַשָּׁמַיִם וִיהִי חֹשֶׁךְ עַל־אֶרֶץ מִצְרָיִם

d. i.: „Recke deine Hand gen Himmel und es komme eine Finsterniss über Ägyptenland."

Zehn Plagen musste der biblischen Überlieferung gemäss Pharao erleiden, ehe er sich entschliessen konnte, das seit Jahrhunderten in seinem Lande weilende jüdische Volk auswandern zu lassen. Eine Finsterniss (über deren Art die verschiedenen Commentatoren verschiedener Meinungen sind) soll die vorletzte, also neunte Plage gewesen sein. Nach traditioneller Überlieferung hätte diese Finsterniss am Donnerstag, ersten Nisan (des Jahres 1312 v. gew. Ztr., d. i. 2448 jüd. Ztr.) begonnen. Doch sind Jahr und Tageszeit keineswegs so festgesetzt, als Jahreszeit,

Monat, Tag und Wochentag. Und ist es auch selbstverständlich, dass man in Anbetracht eines in so grauer Vorzeit stattgehabten Ereignisses, wie es der Auszug der Israeliten aus Ägypten war, der betreffenden Jahreszahl keine zu grosse Bedeutung geben kann. Über Jahreszeit und Monat gibt die Bibel selbst Aufschluss. Siehe:

Exodus, Cap. XIII, 3 und 4:

זָכוֹר אֶת־הַיּוֹם הַזֶּה אֲשֶׁר יְצָאתֶם מִמִּצְרַיִם
הַיּוֹם אַתֶּם יֹצְאִים בְּחֹדֶשׁ הָאָבִיב

d. i.: „Denket an diesen Tag, an dem ihr aus Ägypten ausgegangen seid. Heute seid ihr ausgegangen im Ährenmonate."

Exodus, Cap. XII, 2:

הַחֹדֶשׁ הַזֶּה לָכֶם רֹאשׁ חֳדָשִׁים
רִאשׁוֹן הוּא לָכֶם לְחָדְשֵׁי הַשָּׁנָה

d. i.: „Dieser Monat soll bei euch der erste Monat sein; der erste sei er unter den Monaten des Jahres."

Ebenso vergleiche: Exodus, Cap. XIII, (bis Vers 15) mit Cap. IX, 31.

Zur Feststellung des Wochentages dienen folgende Quellen, die ich einer gütigen Mittheilung des Herrn Dr. J. Hildesheimer (Rabbiner und Seminardirector in Berlin) verdanke:

In dem Buche „Seder Hadoroth" wird erzählt:

מַכַּת חֹשֶׁךְ הִתְחִיל בְּיוֹם ר״ח ניסן ..... וּבְאוֹתוֹ שָׁנָה הָיָה
ר״ח ניסן בְּיוֹם ה

d. i.: „Die Plage der Finsterniss begann am Neumondstage Nisan..... und im selbigen Jahre war Neumondstag Nisan ein Donnerstag."

In dem „Pirke di R. Elieser" wird behauptet, dass sowohl die Verwandlung des Wassers in Blut, wie auch der Auszug der Israeliten aus Ägypten (d. i. der 15. Nisan) am Donnerstag stattfand.

Letzteres wird auch im Talmud angenommen (vergl. Sabbat 87^{b} und Tosephot daselbst Anfang וְאוֹתוֹ).

Die älteste Tradition, welche den Anknüpfungspunkt bildet, befindet sich in der Mischna (Edijoth II 10) „der Verlauf der Plagen war ein Jahr.“ Endlich ist noch alte Tradition, dass sich Moses im Laufe dieses Jahres drei Monate (Midrasch Chasito 2, Pesikta di R. Kahana P. Hachodesch) oder sechs Monate (Midrasch Schemot Rabba) absentirt habe.

Soweit die alten Traditionen; von da ab beginnt die subjective Ansicht der Commentatoren. Raschi (zu Exodus 7, 25) fasst die alte Tradition so auf, dass mit den neun ersten Plagen neun Monate mit gleichmässigen Pausen ausgefüllt wurden. Dieser Auffassung sind auch die Tosaphiten (vergl. Rosch Haschana 11ᵃ). Selbstverständlich kann da von einer sechsmonatlichen Absentirung innerhalb des Postulates der Mischna in Edijoth keine Rede sein. Auch die anderen Commentatoren nehmen eine nur dreimonatliche Absentirung an, die sie in den Anfang des Jahres verlegen. Die Plagen beginnen 1. Ab und schliessen mit 1. Nisan, der nach obenerwähnter talmudischer Quelle und entgegen einer im Seder Olam ausgesprochenen Ansicht, wonach der Auszugstag ein Freitag gewesen wäre, auf den Donnerstag fiel. Übrigens wird von allen Rischonim (die ersten Talmudausleger), an ihrer Spitze Maimonides, sowie von allen Achronim (die letzten Talmudausleger) behauptet, dass im Auszugsjahr der 1. Nisan auf Donnerstag fiel. Auch der Schulchan-Aruch (d. i. das rituelle Gesetzbuch der Juden) behauptet, der 15. Nisan des Auszugsjahrs war ein Donnerstag.

Es wäre wohl bezüglich der Tageszeit noch etwas hervorzuheben am Platze. Doch ist diesbezüglich nichts Gewisses erhalten. Raschi will zwar dem Bibelausdrucke וימש חשך entnehmen, dass die Finsterniss in früher Morgenstunde eingetreten wäre, insofern er für וימש das Wort ויאמש lesen will und daher als Stamm des Zeitwortes אמש = gestern annimmt und sonach den bezüglichen Bibelausdruck mit „die Finsterniss wird sich vergestern“ übersetzt, d. h. die Abends eingetretene Finsterniss wird anhalten. Doch ist es klar, dass dieser Auslegung des Bibeltextes eine grosse Willkürlichkeit zu Grunde liegt, wenn auch Onkeles derselben Ansicht ist. Der Stamm von וימש ist מוש = weichen. Diese Ansicht vertritt auch der Bozer-Olleloth, welcher

zugleich die Behauptung ausdrückt, dass die Finsterniss der Nacht schon längst gewichen war, ehe diese Finsterniss eintrat.

Das Resultat der bisherigen Betrachtungen ist also: Der Auszugstag war der 15. Nisan, ein Donnerstag; am 1. Nisan desselben Jahres, der also auch auf Donnerstag fiel, war in Ägyptenland eine Finsterniss.

Sollte uns in dieser Überlieferung die Erinnerung an eine in Ägypten stattgehabte Sonnenfinsterniss erhalten sein, so wird es uns ermöglicht, indem wir dieselbe durch Rechnung verfolgen, einen Anhaltspunkt für die Erforschung des chronologischen Datums des Auszuges der Israeliten aus Ägypten zu gewinnen.

Sollten wir es aber hier mit einer Sonnenfinsterniss zu thun haben, so ist klar, dass dieselbe jedenfalls für Ägypten bedeutend gewesen sein muss und man demnach bei der Untersuchung nur an centrale Finsternisse denken kann. Ich habe daher — nachdem der bis nun gebräuchlichen Jahreszahl 1312 v. gew. Ztr. keine zu grosse Bedeutung beigelegt werden kann — alle centralen Sonnenfinsternisse des 13. und 14. Jahrhunderts v. Chr. Gb. berechnet und von diesen jene ausgesucht, deren Datum in das zwischen Ende Februar und Anfang Mai liegende Zeitintervall (denn in dieses kann Nisan fallen) fiel. Ich erhielt auf diese Weise folgende centrale Finsternisse, die ich als Grundlage einer weiteren Untersuchung aufnahm. (Siehe Taf. I, pag. 994—997.)

Die einzelnen Grössen haben die in den Oppolzer'schen „Syzygien-Tafeln für den Mond" (Publication der astronomischen Gesellschaft XVI) gegebene Bedeutung; überhaupt wurde der ganzen hier in Betracht kommenden Rechnung jenes Werk zu Grunde gelegt. Die in Anwendung gekommenen empirischen Correctionen jedoch habe ich der Abhandlung „Astronomische Untersuchungen über Finsternisse" von F. K. Ginzel (Sitzungsberichte d. kais. Akademie d. Wiss. in Wien, Bd. LXXXIX) entnommen.

Auf Grund der in Tafel I gegebenen Daten bekam ich folgende Hilfsgrössen. (Siehe Taf. II, pag. 998—1001.)

Eine genaue Betrachtung dieser Daten lehrt sofort, dass von den hier aufgeführten Finsternissen nur eine einzige unseren Zwecken (aus den eingangs und Taf. I aufgezählten centralen

Sonnenfinsternissen jene zu suchen, die durch Ägypten gehen oder für Ägypten von Bedeutung sein können) entspricht. Es ist dies die Finsternis Nr. 16, also die Finsterniss

Julianischer Kalender	Tag
—1334, III 13	1233 886

Die Zone der Centralität dieser Finsterniss greift (wie dies eine weiter ausgeführte Rechnung zeigt) tief in das Nil-Delta ein. Doch bevor wir an diese Rechnung schreiten, wollen wir noch dem Datum eine nähere Beachtung schenken. Wird dieses in den jüdischen Kalendertag umgesetzt (wobei die „Hilfstafeln für Chronologie" von Dr. R. Schram vorzügliche Dienste leisten), so findet man das Jahr 2426 und zwar:

Nisan 1.

Dividirt man den julianischen Tag, d. i. die Zahl 1233 886 durch 7, so bleibt die Zahl 3 als Rest, d. h.:

„Der Wochentag, an dem obige Finsterniss stattfand, war ein Donnerstag."

Bedenkt man nun, dass von allen hier betrachteten Frühjahrsfinsternissen nur eine einzige für Ägypten von Bedeutung ist, diese aber zugleich alle uns durch Tradition erhaltenen Merkmale (Monat, Tag und Wochentag) der in der Bibel erwähnten ägyptischen Finsterniss besitzt, so ist klar, dass, wenn dieser eine natürliche Grundlage gegeben und durch eine Sonnenfinsterniss erklärt werden soll, es zweifellos die centrale Sonnenfinsterniss von

—1334, III 13.

war.

Und nun kehren wir zur Rechnung zurück, indem wir die Ägypten angehörenden Theile der Grenzcurven der Centralität dieser Finsterniss bestimmen und jene Curven suchen wollen, welche einer Phase von bez. 11·5, 11, 10·5, 10, 9·5 Zollen entsprechen. Die passend hiezu gewählten Stundenwinkel sind:

$$t = -4°, -2°, 0°, +2°, +4°, +6°.$$

Die diesen entsprechenden Grenzpunkte der Centralität sind:

Stundenwinkel der Sonne	Nördliche Zone		Südliche Zone	
	φ	λ	φ	λ
−4°00	+32°34	+28°32	+29°64	+28°68
−2·00	+33·00	+29·40	+30·70	+29·74
0	+33·67	+30·49	+30·97	+30·80
+2·00	+34·36	+31·60	+31·65	+31·88
+4·00	+35·05	+32·72	+32·31	+32·98
+6·00	+35·74	+33·86	+33·28	+34·06

Die übrigen in Betracht kommenden Curven sind gegeben durch:

Phase.

Stundenwinkel		−4°	−2°	0°	+2°	+4°	+6°
$i=11·5$ nördl.	φ	+31°50	+32°16	+32°84	+33°52	+34°20	+34°89
	λ	+28·39	+29·46	+30·54	+31·65	+32·76	+33·89
$i=11·5$ südl.	φ	+30·43	+31·10	+31·77	+32·44	+33·13	+33·82
	λ	+28·61	+29·67	+30·75	+31·84	+32·94	+34·06
Südl. Curven							
$i=11$	φ	+28·62	+29·27	+29·93	+30·62	+31·31	+31·98
	λ	+29·02	+30·07	+31·13	+32·20	+33·29	+34·37
$i=10·5$	φ	+26·86	+27·50	+28·16	+28·84	+29·52	+30·20
	λ	+29·43	+30·46	+31·51	+32·56	+33·63	+34·72
$i=10$	φ	+25·12	+25·76	+26·43	+27·10	+27·78	+28·45
	λ	+29·85	+30·87	+31·90	+32·94	+33·99	+35·06
$i=9·5$	φ	+23·43	+24·08	+25·74	+25·39	+26·07	+26·75
	λ	+30·27	+31·28	+32·29	+33·32	+34·36	+35·41

In einer beigegebenen Karte habe ich die für diese Finsterniss stattfindenden Sichtbarkeitsverhältnisse in schematischer Weise dargestellt. Die schraffirte, von stark ausgezogenen Linien begrenzte Fläche stellt die Zone der Centralität vor. Die mit ihr parallel laufenden gestrichelt ausgezogenen Linien verbinden die Punkte gleicher grösster Phase. Die nördlichste dieser gestrichelt

ausgezogenen Linien ist die nördliche Curve, auf der man die grösste Phase 11·5 Zoll gross sah; die zweite (von oben gezählt) dieser gestrichelt gezogenen Linien ist die südliche Curve, auf der man die grösste Phase 11·5 Zoll gross sah. Auf den folgenden dieser Linien war die grösste Phase beziehungsweise 11 Zoll, 10·5 Zoll, 10 Zoll, 9·5 Zoll gross, für die zwischenliegenden Orte nach Massgabe der Lage des Ortes gegen irgend zwei dieser Curven in entsprechender Grösse; so z. B. liegt Thebae der Curve von 9·5 Zoll näher als jener von 10 Zoll: die maximale Finsterniss war daher für diesen Ort nahezu 9·7 Zoll, für Memphis 10·96 u. s. f.

Die fast in meridionaler Richtung punktirt ausgezogenen Linien verbinden alle Orte, die unter gleichem Stundenwinkel der Sonne die grösste Phase sahen. Man wird mit Hilfe dieser Linien leicht den Stundenwinkel (also die wahre Zeit) der grössten Phase für jeden einzelnen Ort von der Karte ablesen können; So z. B. tritt die grösste Phase für Memphis unter einem Stundenwinkel von 0° 04 (d. i. zu Mittag) ein.

Zum Schlusse sei mir gestattet, einen Rückblick auf die hier geführte Untersuchung zu werfen. Ich habe — nachdem gewöhnlich das Jahr 1312 v. Chr. G. als das Auszugsjahr der Israeliten aus Ägypten bezeichnet wird und anderseits der 15. Nisan, ein Donnerstag, als Auszugstag festgesetzt ist — in der Vermuthung, dass uns in der Überlieferung einer am 1. Nisan des Auszugsjahres zu Ägypten stattgehabten Finsterniss die Erinnerung an eine Sonnenfinsterniss erhalten ist, aus allen centralen Sonnenfinsternissen des 13. und 14. Jahrhunderts v. Chr. Gb. die Frühjahrsfinsternisse ausgesucht und gefunden, dass von diesen nur eine einzige für Ägypten von Bedeutung sein konnte. Es ist dies die ringförmige Sonnenfinsterniss des Jahres (—1334 = 1135 v. Chr.) März 13. Nachdem diese aber zugleich alle uns durch die Tradition erhaltenen Merkmale (Monat, Tag und Wochentag) der in der Bibel erwähnten ägyptischen Finsterniss besitzt, so ist klar, dass, wenn der hier ausgeführten Rechnung Bedeutung beigelegt wird, die in der Bibel erwähnte Finsterniss mit der ringförmigen Sonnenfinsterniss des Jahres (—1334 = 1335 v. Chr.) März 13 identisch ist. Dann fällt natürlich der Auszugstag der Israeliten aus Ägypten auf den 27. März des Jahres (—1334 = 1335 v. Chr.).

Tafel

Nr.	T			L'	Z	ε
	Julianischer Kalender	Tag	Weltzeit			
1	—1399 III. 11	1210 143·8944	21ʰ 27ᵐ 9	338°525	+3°51	23°883
2	—1392 IV. 21	1212 741·8793	21 6·2	18·257	—0·62	23·877
3	—1391 IV. 11	1213 096·5102	12 14·7	8·110	+0·48	23·877
4	—1390 IV. 1	1213 451·2290	5 29·8	358·009	+1·62	23·877
5	—1381 III. 23	1216 729·2194	5 15·9	349·150	+2·55	23·881
6	—1380 III. 11	1217 083·7644	18 20·7	338·786	+3·48	23·880
7	—1372 IV. 11	1220 036·5468	13 7·4	8·534	+0·45	23·874
8	—1363 IV. 2	1223 314·5394	12 56·7	359·718	+·144	23·878
9	—1362 III. 23	1223 669·0737	1 46·1	349·399	+2·53	23·878
10	—1361 III. 12	1224 023·3062	7 20·9	338·731	+3·50	23·878
11	—1354 IV. 22	1226 621·8619	20 41·1	19·012	—0·66	23·872
12	—1352 III. 2	1227 301·1127	2 42·3	329·585	+4·13	23·872
13	—1345 IV. 13	1229 899·8538	20 29·5	10·229	+0·28	23·876
14	—1344 IV. 2	1230 254·3767	9 2·4	359·949	+1·41	23·876
15	—1343 III. 22	1230 608·5966	14 19·1	349·328	+2·54	23·875
16	—1334 III. 13	1233 886·4039	9 41·6	340·239	+3·39	23·869
17	—1333 III. 2	1234 240·4150	9 57·6	329·290	+4·15	23·869
18	—1327 IV. 24	1236 485·1649	3 57·5	20·701	—0·82	23·873
19	—1326 IV. 13	1236 839·6741	16 10·7	10·445	+0·26	23·873
20	—1316 III. 23	1240 471·6899	16 33·5	350·830	+2·39	23·867
21	—1315 III. 12	1240 825·7097	17 2·0	339·952	+3·41	23·867
22	—1314 III. 1	1241 179·9260	22 13·4	329·196	+4·15	23·866
23	—1308 IV. 23	1243 424·9657	23 10·6	20·898	—0·81	23·870
24	—1307 IV. 13	1243 779·1564	3 45·2	10·337	+0·29	23·870
25	—1298 IV. 3	1247 056·9684	23 14·5	1·353	+1·29	23·864

I.

P	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_a	$\log f_a$	F
354°424	355°932	0·6954	9·7582	8·7538	0·5367	7·6670	t
171·781	169·396	0·7105	9·7431	8·7393	0·5429	7·6630	t
180·486	179·425	0·6925	9·7621	8·7575	0·5326	7·6638	t
189·079	190·183	0·6931	9·7613	8·7571	0·5336	7·6647	t
353·768	355·391	0·6965	9·7572	8·7528	0·5365	7·6657	t
2·332	4·729	0·7181	9·7331	8·7310	0·5508	7·6670	$r—t$
188·319	189·549	0·6939	9·7606	8·7562	0·5334	7·6638	t
353·050	354·780	0·6978	9·7560	8·7516	0·5365	7·6646	t
1·673	4·059	0·7199	9·7315	8·7292	0·5508	7·6657	$r—t$
9·900	11·180	0·7394	9·7073	8·7101	0·5655	7·6670	r
187·509	188·871	0·6949	9·7598	8·7554	0·5336	7·6630	t
174·225	175·022	0·7431	9·7031	8·7074	0·5688	7·6683	r
352·271	354·105	0·6987	9·7551	8·7505	0·5366	7·6637	t
0·947	3·318	0·7213	9·7298	8·7279	0·5512	7·6646	$r—t$
9·210	10·398	0·7404	9·7075	8·7092	0·5652	7·6658	r
173·602	174·283	0·7436	9·7027	8·7069	0·5681	7·6669	r
181·288	180·047	0·7412	9·7058	8·7096	0·5671	7·6683	r
351·450	353·385	0·7001	9·7538	8·7491	0·5367	7·6629	t
0·165	2·513	0·7229	9·7283	8·7262	0·5515	7·6637	$r—t$
172·909	173·481	0·7440	9·7025	8·7065	0·5674	7·6656	r
180·676	179·339	0·7405	9·7069	8·7101	0·5656	7·6669	r
188·793	186·361	0·7207	9·7305	8·7292	0·5530	7·6683	r
359·330	1·646	0·7244	9·7267	8·7248	0·5520	7·6629	r
7·628	8·604	0·7419	9·7049	8·7078	0·5649	7·6637	r
172·145	172·595	0·7445	9·7020	8·7062	0·5671	7·6646	r

Nr.	T			L'	Z	ε
	Julianischer Kalender	Tag	Weltzeit			
26	—1297 III. 23	1247 410·9936	23h 58m0	350°545	+2°43	23°864
27	—1296 III. 12	1247 765·2391	5 44·3	339·879	+3·44	23·864
28	—1289 IV. 24	1250 364·4301	10 19·3	20·775	—0·79	23·868
29	—1287 III. 3	1251 043·1554	3 43·8	330·852	+4·06	23·868
30	—1280 IV. 14	1253 642·2418	5 48·2	11·828	+0·14	23·863
31	—1279 IV. 3	1253 996·2827	6 47·1	1·081	+1·33	23·862
32	—1278 III. 23	1254 350·5478	13 8·8	350·493	+2·46	23·862
33	—1269 III. 14	1257 628·4744	11 23·1	341·529	+3·30	23·866
34	—1268 III. 3	1257 983·0813	1 57·1	331·161	+3·93	23·866
35	—1262 IV. 25	1260 227·5130	12 18·7	22·260	—0·95	23·860
36	—1261 IV. 14	1260 581·5643	13 32·6	11·562	+0·18	23·860
37	—1260 IV. 2	1260 935·8528	20 28·0	1·051	+1·34	23·860
38	—1250 III. 14	1264 568·4131	9 54·9	341·856	+3·26	23·863
39	—1249 III. 4	1264 923·1172	2 48·8	331·588	+4·01	23·863
40	—1242 IV. 14	1267 521·1547	3 42·8	11·555	+0·19	23·857
41	—1232 III. 24	1271 153·7392	17 44·4	352·481	+2·25	23·861
42	—1231 III. 14	1271 508·4479	10 45·0	342·279	+3·25	23·861
43	—1224 IV. 24	1274 106·4544	10 54·3	22·019	—0·79	23·855
44	—1215 IV. 15	1277 384·4069	9 45·9	13·198	—0·05	23·859
45	—1214 IV. 5	1277 739·0618	1 29·0	3·046	+1·13	23·858
46	—1213 III. 25	1278 093·7737	18 34·1	352·904	+2·23	23·858
47	—1204 III. 15	1281 371·7750	18 36·0	344·015	+3·10	23·853
48	—1203 III. 5	1281 726·2886	6 55·6	333·567	+3·90	23·852

P	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_a	$\log f_a$	F
179·994	178·557	0·7396	9·7082	8·7109	0·5641	7·6656	r
188·215	185·766	0·7194	9·7323	8·7305	0·5511	7·6669	r—t
6·764	7·636	0·7425	9·7045	8·7072	0·5648	7·6630	r
352·799	350·352	0·7121	9·7400	8·7371	0·5474	7·6682	r—t
171·325	171·658	0·7448	9·7021	8·7058	0·5664	7·6637	r
179·247	177·711	0·7387	9·7095	8·7118	0·5629	7·6646	r
187·568	185·110	0·7180	9·7344	8·7320	0·5493	7·6657	r—t
352·210	349·477	0·7107	9·7419	8·7385	0·5457	7·6668	t
0·702	359·536	0·6921	9·7614	8·7572	0·5353	7·6682	t
170·460	170·681	0·7450	9·7020	8·7057	0·5662	7·6629	r
178·446	176·824	0·7379	9·7108	8·7126	0·5614	7·6637	r
186·859	184·398	0·7167	9·7361	8·7334	0·5477	7·6646	r—t
0·110	359·077	0·6915	9·7623	8·7577	0·5343	7·6668	t
8·535	9·674	0·6929	9·7607	8·7566	0·5358	7·6682	t
186·091	183·635	0·7150	9·7378	8·7349	0·5461	7·6637	t
359·448	358·548	0·6911	9·7629	8·7582	0·5332	7·6656	t
7·947	9·207	0·6937	9·7600	8·7557	0·5355	7·6669	t
185·277	182·836	0·7136	9·7396	8·7364	0·5447	7·6629	t
350·044	347·750	0·7065	9·7469	8·7425	0·5411	7·6635	t
358·715	357·963	0·6908	9·7634	8·7586	0·5323	7·6645	t
7·286	8·670	0·6945	9·7591	8·7548	0·5353	7·6656	t
171·829	173·629	0·6987	9·7551	8·7514	0·5381	7·6667	t
180·306	182·691	0·7211	9·7300	8·7290	0·5531	7·6681	r

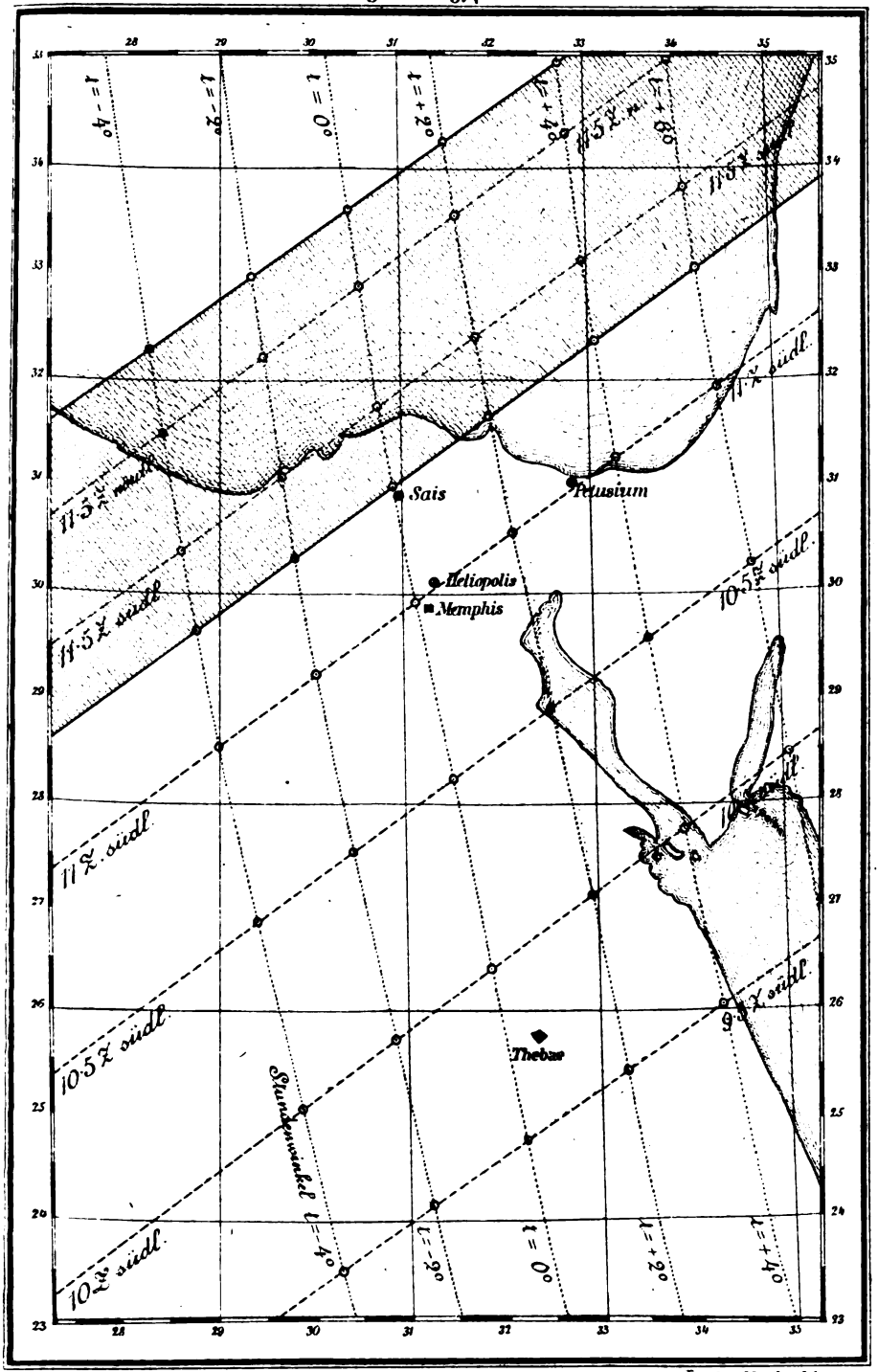
Tafel

Nr.	$-\mu$	G	K	N'	log n	log γ	log sin δ'	log cos δ'	log sin g
1	220°30	344°44	94°51	62°0	9·7603	9_n6808	9_n1709	9·9952	9 6883
2	220·91	22·23	87·75	72·8	9·7451	9·8637	9·1031	9·9965	9·5052
3	356·92	9·96	88·94	72·0	9·7642	8_n6189	8·7566	9·9993	9·4968
4	101·13	357·56	90·27	71·7	9·7634	9_n8891	8_n1481	0·0000	9·4971
5	102·19	352·21	92·43	60·9	9·7593	9_n7300	8_n8820	9·9987	9·6913
6	268·88	344·65	94·47	61·9	9·7352	9·3255	9_n1659	9·9953	9·6887
7	345·40	10·43	88·88	71·9	9·7627	9_n8522	8·7786	9·9992	9·4987
8	345·71	359·80	90·06	60·5	9·7581	9_n7785	7_n2993	0·0000	9·6848
9	156·42	352·40	92·38	60·8	9·7336	9·1831	8_n8719	9·9988	9·6918
10	75·98	344·60	34·47	61·9	9·7094	9·9726	9_n1668	9·9953	9·6883
11	230·70	23·17	87·67	72·9	9·7619	9_n8090	9·1200	9·9962	9·5054
12	141·91	322·87	93·17	74·9	9·7053	9·7436	9_n3115	9·9907	9·5153
13	231·18	7·34	87·70	60·8	9·7572	9_n8253	8·8566	9·9989	9·6913
14	46·04	359·96	90·01	60·4	9·7319	8·9374	6_n5567	0·0000	9·6930
15	330·29	352·34	92·39	60·9	9·7096	9·9426	8_n8748	9·9988	9.6914
16	36·16	335·71	92·38	73·1	9·7049	9·7885	9_n1362	9·9959	9·5029
17	35·12	322·50	93·18	74·9	9·7080	9_n0907	9_n3152	9·9906	9·5155
18	117·90	15·00	85·63	61·9	9·7559	9_n8702	9·1555	9·9955	9·6881
19	297·62	7·48	87·65	60·8	9·7304	8·1802	8·8654	9·9988	9·6920
20	292.01	348·68	91·19	72·1	9·7047	9·8333	8_n8094	9·9991	9·4953
21	288·07	335·34	92·40	73·2	9.7091	8_n8101	9_n1421	9·9958	9·5028
22	212·99	322·57	93·21	74·9	9·7326	9_n9029	9_n3164	9·9905	9·5173
23	191·37	15·10	85·58	61·9	9·7288	8_n7902	9·1594	9·9954	9·6889
24	126·13	7·40	87·68	60·8	9·7070	9·8628	8·8610	9·9989	9·6920
25	190·43	1·67	89·82	71·9	9·7042	9·8780	7·9802	0·0000	9·4934

II.

log cos g	log sin k	log cos k	Centralität					
			bei ⊙ Aufgang		im Mittag		bei ⊙ Untergang	
			φ	λ	φ	λ	φ	λ
9·9410	9·9471	9·6673	−56°	+140°	−41°	−133°	− 1°	− 72°
9·9765	9·9803	9·4682	+29	+145	+57	−145	+63	− 53
9·9775	9·9783	9·4895	−20	− 66	+ 1	− 3	+16	+ 62
9·9775	9·9775	9·4967	−69	+ 25	−55	+108	−32	+175
9·9400	9·9417	9·6860	−21	+ 32	−42	+110	− 3	+170
9·9408	9·9468	9·6682	−16	−157	+ 5	− 94	+40	− 35
9·9773	9·9782	9·4907	−63	− 80	−45	− 9	−27	− 45
9·9397	9·9397	9·6924	−66	− 84	−44	− 5	− 7	+ 55
9·9499	9·9415	9·6868	−20	+ 92	+ 6	+154	+38	−144
9·9410	9·9470	9·6677	+41	+ 3	—	—	{+78	+ 22}
9·9765	9·9807	9·4651	−56	+172	−35	−124	−23	− 62
9·9753	9·9853	9·4076	+18	+ 80	+23	+137	+47	−166
9·9401	9·9416	9·6866	−71	+173	−46	−119	−13	− 59
9·9395	9·9395	9 6930	−25	− 16	+ 6	+ 45	+35	+108
9·9400	9·9416	9·6863	+32	−103	—	—	{+86	− 48}
9·9768	9·9813	9·4585	+21	− 27	+32	+ 31	+54	+ 92
9·9754	9·9855	9·4056	−22	− 31	−19	+ 36	+ 8	+ 94
9·9410	9·9468	9·6685	−74	+ 75	−49	+128	−20	−173
9·9398	9·9414	9·6871	−28	−122	+ 5	− 63	+30	+ 2
9·9777	9·9787	9·4859	+25	−135	+42	− 74	+61	− 6
9·9769	9·9815	9·4571	−20	−136	−12	− 71	+13	− 13
9·9751	9·9853	9·4077	−65	+112	−68	−141	−37	− 65
9·9407	9·9466	9·6690	−31	+134	+ 4	−168	+24	−103
9·9399	9·9414	9·6873	+18	+ 55	+61	+114	+75	−148
9·9779	9·9779	9·4932	+31	+120	+53	−177	+67	− 98

Nr.	$-\mu$	G	K	N'	log n	log γ	log sin δ'	log cos δ'	log sin g
26	182°93	348°32	91°22	72°2	9·7104	6·7574	8_n8226	9·9990	9·4950
27	101·40	335·38	92·42	73·1	9·7344	9_n8723	9_n1435	9·9958	9·5047
28	26·27	15·00	85·60	61·8	9·7067	9·8114	9·1570	9·9955	9·6891
29	126·41	338·62	95·67	63·3	9·7421	9_n8082	9_n2947	9·9914	9·6838
30	90·62	14·55	88·48	72·3	9·7043	9·9211	8·9187	9·9985	9·4975
31	79·35	1·34	89·86	71·9	9·7117	8·8552	7·8827	0·0000	9·4928
32	347·12	348·31	91·24	72·1	9·7365	9_n8355	8_n8249	9·9990	9·4969
33	10·69	346·63	93·95	61·7	9·7440	9_n8407	9_n1078	9·9964	9·6884
34	154·81	338·91	95·64	63·2	9·7635	8·7782	9_n2903	9·9916	9·6848
35	350·94	27·23	87·39	73·4	9·7041	9·9623	9·1853	9·9949	9·5063
36	336·60	14·25	88·52	72·3	9·7130	9·1690	8·9089	9·9986	9·4966
37	236·01	1·29	89·86	71·8	9·7382	9_n7917	7.8703	0·0000	9·4946
38	34·56	346·91	93·91	61·5	9·7644	7·9727	9_n1003	9·9965	9·6896
39	143·66	339·17	95·56	63·2	9·7628	9·8622	9_n2845	9·9918	9·6841
40	125·98	14·19	88·51	72·2	9·7399	9_n7387	8·9086	9·9986	9·4979
41	276·02	354·61	91·70	68·7	9·7650	8_n6728	8_n7237	9·9994	9·6918
42	23·73	347·19	93·81	61·6	9·7621	9·8323	9_n0903	9·9967	9·6886
43	16·91	26·91	87·41	73·4	9·7417	9_n6752	9·1807	9·9950	9·5063
44	31·20	9·53	87·09	61·2	9·7489	9_n9423	8·9654	9·9981	9·6892
45	158·60	2·18	89·30	60·5	9·7655	9_n0395	8·3323	9·9999	9·6923
46	265·29	354·91	91·61	60·7	9·7612	9 7956	8_n6987	9·9995	9·6912
47	262·27	340·43	92·00	72·6	9·7572	9·8493	9_n0467	9·9973	9·5014
48	80·08	327·72	92·94	74·1	9·7321	8_n4466	9_n2553	9·9928	9·5108



Lith. v. F. Schuma in Wien. Druck v. J. Barth in Wien.
Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe XCI. Bd. II. Abth. 1885.

log cos g	log sin k	log cos k	Centralität					
			bei ⊙ Aufgang		im Mittag		bei ⊙ Untergang	
			φ	λ	φ	λ	φ	λ
9·9776	9·9787	9·4849	—18°	+121°	— 4°	—177°	+18°	—118°
9·9766	9·9812	9·4591	—64	+ 13	—59	+108	—31	+178
9·9407	9·9465	9·6695	+12	— 43	+56	+ 16	+67	+114
9·9423	9·9530	9·6443	—64	+ 33	—57	+135	—13	—162
9·9774	9·9791	9·4818	+39	+ 13	+66	+ 83	+74	—179
9·9779	9·9779	9·4927	—14	+ 19	+ 5	+ 79	+22	+140
9·9775	9·9786	9·4868	—61	— 90	—50	— 7	—25	+ 59
9·9409	9·9455	9·6729	—71	— 82	—59	+ 21	—15	+ 83
9·9421	9·9526	9·6463	—23	+ 86	— 7	+154	+30	—148
9·9764	9·9820	9·4502	+49	— 98	+82	— 17	+79	+121
9·9775	9·9790	9·4816	— 9	— 84	+14	— 25	+26	+ 40
9·9777	9·9777	9·4945	—56	+168	—40	—118	—20	— 56
9·9406	9·9451	9·6746	—28	— 33	— 7	+ 34	+29	+ 95
9·9423	9·9525	9·6465	+19	+ 75	+44	+134	+70	—177
9·9774	9·9789	9·4830	—51	+ 65	—30	+131	—15	—168
9·9399	9·9407	9·6893	—32	—150	— 6	— 83	+27	— 21
9·9409	9·9452	9·6744	+14	— 45	+44	+ 14	+70	+ 75
9·9764	9·9818	9·4516	—44	— 41	—21	+ 21	—11	+ 81
9·9407	9·9432	9·6813	—85	+ 44	—83	+ 44	—32	+105
9·9397	9·9398	9·6919	—36	+ 95	— 6	+160	+23	—136
9·9401	9·9408	9·6890	+ 9	—164	+43	—104	+68	— 32
9·9770	9·9800	9·4729	+27	—166	+41	—104	+62	— 38
9·9759	9·9837	9·4307	—17	+ 15	—12	+ 80	+14	+140

Pendelversuche.

Von **Paul Czermak** und **Richard Hiecke.**

(Arbeit aus dem physikalischen Institute der Universität Graz.)

(Mit 6 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1885.)

Bei der bekannten Schwierigkeit, der die Versuche mit einem sphärischen Pendel unterworfen sind, dürfte vielleicht ein Apparat einiges Interesse beanspruchen, welcher auf graphischem Wege die Bewegung eines Raumpendels fixirt, und so nicht nur ein brauchbarer Demonstrationsapparat ist, sondern, wie die mitgetheilten Resultate zeigen werden, auch zu exacteren Messungen gebraucht werden kann.

Da es bei einer graphischen Methode hauptsächlich darauf ankommt, den Einfluss der Reibung des schreibenden Theiles möglichst klein zu machen, so wurde bei den folgenden Versuchen eine Pendelkugel von circa 30 Klgr. Gewicht verwendet, ferners diente als Zeichenfläche ein sogenannter Lackcarton mit Kreidengrund, der auf einer Spiegelglasplatte aufgezogen einer polirten Marmorplatte glich. Auch war der Druck der schreibenden Spitze beliebig zu ändern und dieselbe in einem beliebigen Momente der Bewegung des Pendels in und ausser Thätigkeit zu setzen.

Diese letzten zwei Bedingungen und die Forderung, dass die schreibende Spitze genau in die Verlängerung des Pendelfadens zu liegen komme, bedingten die Construction des Schreibeapparates, welcher folgende Einrichtung hatte.

An einer Eisenplatte *a* (Fig. 1) ist einerseits eine Parallelführung *b* eingeschraubt, welche mittelst der Schraube *c* ein Messingstück *d* verschiebt; anderseits eine Führung *e* für ein Bleigewicht *f*, welches durch eine Parallelogrammsteuerung *g*

mit dem Messingstücke *d* verbunden ist und so den Apparat ausbalancirt. In der Mitte dieser Eisenplatte *a* ist eine Hülse angebracht, mit welcher der ganze Apparat an einem vorstehenden Zapfen *i* der Pendelkugel befestigt wird.

Das Messingstück *d* trägt nun in einer Hülse den Stiel einer Gabel *k*, welche in Spitzen drehbar den Schreibehebel *l* hält. An diesem Hebel ist ein Messingklötzchen mit einer Hülse *m* verstellbar angeschraubt, in welche ein fein ausgezogenes und gut abgeglühtes Glasrohr gekittet ist.

Dieses dient zur Aufnahme einer etwas verdünnten Anilintinte. Ganz am Ende des Hebels ist noch ein hackenförmig gebogener Draht *n* befestigt. Auf der andern Seite ist ein Gegengewicht *o* verschiebbar, welches den Druck des Schreiberohres beliebig zu ändern gestattet.

Durch die Parallelführung *b* und die Schraube *c* ist man daher im Stande, die Schreibespitze in der einen Richtung um eine Strecke von circa 4 Ct. zu verschieben. Um nun derselben noch eine zu der früheren Richtung senkrechte Verschiebung ertheilen zu können, ist an dem oben vorstehenden Ende der Gabel *k* ein verstellbarer Arm *p* angebracht, welcher durch eine Feder gegen die Schraube *r* gedrückt wird.

Um nun den Schreibehebel beliebig ausheben und herabfallen lassen zu können, ist unterhalb der Platte *a* ein Elektromagnet *s* eingeschraubt, welcher den Arretierhebel *t* beim Stromschlusse anzieht. Dadurch fällt die Feder, welche sonst durch das Übergewicht *u* des Arretierhebels an dem Hacken *n* empor gezogen ist, um 6—10 Mm. herab, je nach der Stellung des Hackens *n*.

Die mit diesem Schreibeapparate versehene Pendelkugel wurde nun in folgender Art aufgehangen. Da es leider nicht möglich war, einen eingemauerten Aufhängepunkt herzustellen, so musste durch eine mit Balken verspreitzte Eisenbahnschiene ein möglichst fester Unterstützungspunkt geschaffen werden. Auf diese Schiene war ein Balken *A* (Fig 1) geschraubt, welcher die eigentliche Aufhängevorrichtung des Pendels trug. Diese bestand in einer rechteckigen Eisenplatte *B*, welche mit vier Schrauben *C* an dem Balken befestigt war und ein glashartes Stahlstück *D* trug. In diesem war eine Mulde *E* eingeschliffen,

in welcher ein ebenfalls glasharter hochpolirter Stahlconus *F* sass. Dieser war in eine Eisenklammer *G* geschraubt, an deren anderem Ende der circa 4 Mm. dicke eiserne Pendeldraht *H* mittelst zweier Muttern befestigt war. Am Ende dieses Drahtes hing die Pendelkugel, an deren unterhalb vorstehendem Zapfen *i* der Schreibeapparat angeschraubt war.

Die elektrische Leitung zu dem Arretirelektromagneten wurde vermittelt eines Theils durch den Pendeldraht über den Contactpunkt des Conus mit der Pfanne zu der Batterie *O*, anderseits durch einen neben dem Pendeldraht gespannten dünnen Leitungsdraht *L*, der, mit Hartgummiklötzchen *M* befestigt, genau in der Verlängerung des Pendelfadens von oben in ein Quecksilbergefäss *N* tauchte und von hier zum Morsetaster *K* geleitet war, der mit dem andern Pole der Batterie in Verbindung stand.

Nach sorgfältiger Reinigung und Nivellirung der so nahe wie möglich an die Schreibespitze herangebrachten Zeichenfläche musste die gut ausbalancirte Feder mittelst der Schrauben *C* und *R* centrirt werden; dann war die Einrichtung zu Versuchen bereit.

Ein Zeichen, dass die Reibung der Schreibevorrichtung sehr gering war, bestand darin, dass bei elliptischen Schwingungen des Pendels Ellipsen gezeichnet werden konnten, welche sich vollständig schlossen, so dass bei einem Umlaufe des Pendels noch keine merkbare Abnahme der Schwingungsamplituden zu sehen war, wie Fig. 2, welche zwei von diesem Pendel gezeichnete Ellipsen darstellt, deutlich zeigt.

Es wurden nun folgende drei Arten von Versuchen mit dieser Einrichtung gemacht:

I. der Foucault'sche Pendelversuch,
II. Lissajous'sche Figuren, deren Schwingungsverhältniss nahe der Einheit liegt, und
III. die Drehung der grossen Achse bei elliptischen Schwingungen eines Raumpendels.

Hier muss aber noch erwähnt werden, dass manche Verbesserungen und Änderungen sehr nahe liegend sind, aber aus Mangel an Zeit und Aufwand von Mitteln von denselben Umgang genommen wurde und anderseits gerade darin ein Vorzug gesucht

wurde, mit den möglichst geringen und oft primitiven Mitteln eine relativ grosse Genauigkeit zu erzielen.

I. Der Foucault'sche Pendelversuch.

Bei diesem Versuche hatte das Pendel eine Länge von 13·15 Metern und es trat auch hier jene bekannte Erscheinung, welche auf die Resultate von so grossem Einflusse ist, auf, nämlich dass das Pendel aus seinen anfänglich ebenen Schwingungen in elliptische überging. Bei der hier gebrauchten Einrichtung waren es hauptsächlich drei Ursachen, welche dies veranlassten und zwar die nach verschiedenen Azimuthen verschiedenen 1. Festigkeitsverhältnisse des Aufhängepunktes, 2. Krümmungsverhältnisse des Conus und der Pfanne und 3. Trägheitsmomente des Pendels.

Durch diese Ursachen, welche bei keinem Raumpendel ganz zu beseitigen sind, wird bewirkt, dass das Pendel nach verschiedenen Azimuthen etwas verschiedene Schwingungsdauern hat, was immer Anlass gibt zum Auftreten einer Lissajous'schen Figur, welche einem Schwingungsverhältnisse entspricht, das sehr nahe der Einheit liegt. Die so entstehenden Ellipsen besitzen dann einen bestimmten Sinn, in welchem sie durchlaufen werden und einen bestimmten Drehungssinn ihrer grossen Achsen. Sind die Schwingungen einmal elliptisch, so kommt noch eine Drehung der grossen Achse durch diese Erscheinung allein hinzu, so dass wenn zwei um eine bestimmte Zeit aufeinander folgende Lagen der grossen Achse, als Mass des Winkels, welcher der unter der geographischen Breite des Beobachtungsortes vor sich gegangenen Drehung der Pendelebene entsprechen soll, gelten sollen, das Resultat von diesen Störungen sehr beeinflusst ist.

Eine Überlegung zeigt leicht, dass bei nahezu senkrechter Lage jener Azimuthe, in welchen das Pendel seine grösste und kleinste Schwingungsdauer hat, die störenden Einflüsse, welche durch die unter verschiedenen Azimuthen auftretenden Lissajous'schen Figuren veranlasst werden, sich bei einem Umgang von 180° beinahe ganz aufheben wegen der geraden Anzahl von Wechsel im Sinne der Rotation, in welchem die Ellipsen durchlaufen werden und des Sinnes, in welchem die Achsen derselben sich drehen.

Es wurde daher der Versuch in folgender Weise ausgeführt.

Um den Äquator der Pendelkugel wurde nämlich ein Ring P (Fig. 1) gelegt, welcher zwölf um 15° von einander abstehende Ösen p_1 bis p_{12} trug.

Jeder Öse entsprach in der Wand ein Haken, an welchem eine Spule R mit dünnem Spagat gehängt werden konnte. Mittelst eines kleinen, an das Ende des Fadens geknüpften Drahthäkchens konnte die Kugel durch Aufrollen der Spule vorsichtig nach jedem der zwölf Azimuthe herausgezogen werden. Es wurde nun auf der Zeichenfläche ein Kreis angedeutet, dessen Mittelpunkt unter die in Ruhe befindliche Schreibespitze zu liegen kam und einen Durchmesser von circa 40 Ctm. hatte. Dann wurde unter jedem dieser zwölf Azimuthe ein Foucault'scher Versuch in ganz gleicher Weise ausgeführt. Die Kugel wurde so weit herausgezogen, bis die Federspitze an die Peripherie des vorgezeichneten Kreises kam, dann mit dämpfendem Pinsel beruhigt und nach einiger Zeit abgebrannt. In dem Momente, wo der Secundenzeiger den Beginn der nächsten Minute anzeigte, wurde die erste Marke gemacht und die Feder während eines ganzen Hin- und Herganges schreiben gelassen, wobei immer eine einzige gerade Linie entstand; ein Zeichen, dass das Pendel vollkommen beruhigt seine Schwingungen begonnen hatte. Nach genau 15 Minuten wurde die Feder wieder fallen gelassen und zwar wieder so lange, bis sie ihre Anfangslage von derselben Seite erreicht hatte. Diese zweite Marke war aber fast immer schon eine langgestreckte Ellipse. Und zwar zeigte sich ein ganz regelmässiger Verlauf in der Grösse der kleinen Achsen dieser Ellipsen und in dem Sinne, in welchem sie durchlaufen wurden.

Wie Fig. 3, welches eine verkleinerte Copie einer solchen Beobachtungsreihe darstellt, zeigt, traten an zwei, fast um 90° auseinanderliegenden Stellen keine Ellipsen auf. In den zwischenliegenden Quadranten nahmen die kleinen Achsen der Ellipsen zu bis zu einem grössten Werthe und dann wieder ab bis zur nächsten Nullstelle.

Der Sinn, in welchem die Ellipsen durchlaufen wurden, war in jedem Quadranten entgegengesetzt jenem im Nachbar-

quadranten, wie es die Pfeile in der Zeichnung andeuten. Von dem Mittelwerthe aus einer solchen Beobachtungsreihe ist daher ein dem theoretischen Werthe ziemlich nahe liegender zu erwarten.

Das Ausmessen der Winkel, welche zwei Marken einschlossen, geschah in der Art, dass aus dem gemeinsamen Mittelpunkte aller zwölf Versuche ein Kreis geschlagen wurde, dessen Peripherie alle Marken schnitt. Dann wurde mittelst eines Massstabes, dessen Nonius noch 0·02 eines Millimeters abzulesen gestattete, der Durchmesser dieses Kreises und die Sehnen ausgemessen, welche die Schnittpunkte der Marken auf der Peripherie des Kreises bestimmten. Die so gerechneten Winkel konnten als bis auf eine Bogenminute genau gemessen betrachtet werden. Da im ganzen Umkreise von 360° die Sehnen gemessen wurden, so fiel auch eine Art Excentricitätsfehler, welcher durch die Senkung der Feder an ihrem Hebelarme entstand, fast vollständig heraus. Diese Senkung der Feder bei verschiedenen Amplituden des Pendels ist auch der Grund, warum die gezeichnete Curve nicht ganz strenge genommen die Centralprojection der Bewegung des Massenmittelpunktes mit dem Aufhängepunkt als Centrum der Projection ist; — bei grösserer Pendellänge und hinreichend grossem Hebelarme der Feder ist jedoch diese Abweichung sehr gering.

Um den Verlauf der in den verschiedenen Azimuthen erhaltenen Werthe besser übersehen zu können, wurden dieselben als Ordinaten zu den Azimuthen als Abscissen eingetragen. Aus diesen Curven konnte man sehr gut den Einfluss ersehen, welchen eine Veränderung in den die Störungen bewirkenden Ursachen hervorbrachten.

Zu erwähnen ist vielleicht noch, dass die Azimuthe nicht der Reihe nach durchgenommen wurden, sondern, um einer Einseitigkeit durch Abnützung des Conus und der Pfanne vorzubeugen, wurden die einzelnen Beobachtungen in Intervallen von 75° und 105° vorgenommen, bis alle zwölf Azimuthe ausgefüllt waren.

Die erhaltenen Resultate, von denen Fig. 4 die zugehörigen Curven darstellt, waren folgende:

Drehung der Pendelebene in einer Stunde.				
Azimuth	Alter Conus und Pfanne aus weichem Stahl I.	Aufhängebalken neu verspreizt und verkeilt II.	Neuer Conus und Pfanne aus glashartem Stahl III.	Conus und Pfanne neu polirt IV.
0°	10°23'4	10°47'1	10°53'4	10°55'0
15	10 17 8	10 40 8	10 46 6	11 16 6
30	10 29 2	10 53 6	10 35 4	10 48 3
45	11 05 5	11 12 1	10 42 8	10 33 7
60	11 08 6	11 17 4	11 10 5	10 35 1
75	11 33 2	11 08 9	11 09 8	10 34 0
90	11 27 9	11 32 6	11 31 0	10 46 4
105	11 27 5	11 28 3	11 03 7	11 24 4
120	10 54 0	11 05 6	11 27 7	11 31 0
135	11 05 3	11 05 8	11 04 4	11 12 7
150	10 59 5	10 56 8	10 49 0	11 12 4
165	10 47 1	10 19 9	10 55 1	11 13 4
Mittelwerth	10°59'05"	11°02'24"	11°00'48"	11°00'13"
Abweichung	−1'43"	+1'36"	±0'00"	−0'35"

Da der theoretische Werth für die Drehung der Pendelebene in einer Stunde für den Beobachtungsort 11°00'48" beträgt, so weichen die obigen Mittel nur wenig von demselben ab. Dadurch scheint gezeigt, dass nach dieser Methode unter verhältnissmässig ungünstigen Umständen und ohne jede Correctionsrechnung gute Resultate erhalten werden können.

In dem Werke von H. Kammerling Onnes „Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde", welches das ausführlichste und gründlichste Werk über einschlägige Versuche sein dürfte, sind ausser seinen eigenen Beobachtungen auch jene von van der Willigen zu Harlem gemachten angeführt. Diese letzteren ergeben aus einer Beobachtung, welche 11 Stunden lange fortgesetzt wurde, 12°88, aus 4 Stunden 11°24, während der

theoretische Werth 11°91 beträgt. Ferners sind Mittelwerthe aus Versuchen, welche eine Zeit von je 60 Stunden umfassen, angegeben, diese sind: 12°03, 12°11, 11°97, 11°81. Das Mittel dieser Werthe, welche eine Zeit von 240 Stunden repräsentiren, ist 11°98, weicht also noch um 4'2 von dem theoretischen Werthe ab. Diese Versuche, welche eine so grosse Beobachtungszeit erforderten, stimmen daher nicht besonders mit dem wahren Werthe überein.

K. Onnes gibt als grösste Abweichung bei seinen Versuchen, welche eine Zeit von 5 Stunden in Anspruch nahmen, 0°8 an, durchschnittlich war der Fehler bei den Versuchen aber nur 0°3 und das Mittel aus mehreren Versuchen war bis auf 0°1 genau, während sein Gesammtmittel, welches eine Beobachtungszahl von 45 Stunden umfasste, bis auf 0°01 stimmte.

Die hier angeführten Versuche, bei welchen die Einzelbeobachtung nur 15 Minuten lange dauerte, zeigen als grösste Abweichung überhaupt 0°7, während jeder vollständige Versuch, welcher gegen 5 Stunden in Anspruch nahm, durchschnittlich auf 0°04 genau war. Das Mittel aus den vier hier angeführten Versuchen, die eine Beobachtungszeit von circa 22 Stunden umfassen, ist 11° 00' 37'5, weicht daher von dem wahren Werthe um 10'5 ab.

II. Um Lissajous'sche Figuren, deren Schwingungsverhältniss nahe der Einheit liegt,

zu erzeugen, da man an ihnen ihren Einfluss auf die Drehung der Achsen und den Rotationssinn der, sozusagen, Ellipsen sehr deutlich übersehen kann, wurde der Pendeldraht in beiläufig $^1/_2$ seiner Länge an das freie Ende einer horizontalen, an ihrem andern Ende aber gut fixirten Eisenlamelle geklemmt. Dadurch hatte das Pendel in einer Ebene, die durch seine Ruhelage und die Lamelle gelegt war, eine gewisse Schwingungsdauer T_1, in einer zu dieser Ebenen senkrechten hatte es eine Schwingungsdauer T_2, die bedeutend grösser war als T_1, da es in diesem Falle die Lamelle 1—2 Ctm. nach beiden Seiten mitnahm. Wurde daher das Pendel unter irgend einem anderen Azimuthe ausgelassen, so führte es sofort eine Lissajous'sche Figur aus, welche dem jeweiligen Schwingungsverhältnisse entsprach. —

Dieses konnte durch Versteifen der Lamelle beliebig geändert werden. In den Figuren gibt AA' die Richtung der kleineren Schwingungsdauer an, während BB' die Richtung ist, in welcher die Lamelle mitgenommen wurde. Diese Figuren zeichneten sich besonders während ihres Entstehens durch die Regelmässigkeit und Klarheit, mit der dieser sonst schwer aufzufassende Vorgang verlief, aus.

III. Die Drehung der grossen Achse eines elliptisch schwingenden Raumpendels.

Da dieses Phänomen erst merkbarer auftritt, wenn die Amplituden des Pendels so gross sind, dass die Erhebung des Schwerpunktes über das Niveau, in welchem sich derselbe in der Ruhelage befindet, gegenüber der Pendellänge nicht mehr sehr klein sind, so wurde die Länge des früher beschriebenen Pendels auf 2·674 Met. reducirt. Es trat dann schon nach fünfzig Schwingungen eine gut messbare Ablenkung ein. Um dieselbe auch aus den Dimensionen der gezeichneten Ellipse zu rechnen, wurde die in solchen Fällen allgemein gebrauchte Formel

$$w = \frac{3\pi}{4l^2} ab$$

benützt, in welcher ab das Product der Halbachsen und l die Pendellänge bedeuten; ein zweites und drittes Glied mit höheren Potenzen von l, welche auch manchesmal zu finden sind, waren schon ohne Einfluss und wurden daher weggelassen.

Wegen der geringen Pendellänge und grösseren Amplituden war zu erwarten, dass die beim Foucault'schen Versuche auftretenden Störungen auch hier und in erhöhtem Masse eintreffen würden.

Es wurde daher der Versuch in der Art gemacht, dass ein und dieselbe Ellipse wenigstens in vier um 45° abstehenden Azimuthen beobachtet wurde. Dies geschah dadurch, dass auf einem Probeblatte die Azimuthe und durch concentrische Kreise die beiden Achsen der gewünschten Ellipse angegeben waren. Durch passendes Anregen und Dämpfen konnte man dann die verlangte Ellipse erreichen. Darauf wurde das Blatt entfernt und die erste Ellipse verzeichnet. Nach Ablauf von fünfzig Umläufen wurde eine zweite und dann eine dritte Ellipse markirt. Der

Winkel, welchen die Achsen dieser Ellipsen einschlossen, wurde wieder mit Hilfe eines Kreises gemessen, der aus dem gemeinsamen Mittelpunkte geschlagen alle Ellipsen schnitt.

Sind 1, 2, 1′, 2′ die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte zweier Ellipsen mit dem Kreise, so ist der Winkel der Achsen das arithmetische Mittel aus den zu den Sehnen $\bar{1}\bar{2}$ und $\bar{1}'\bar{2}'$ gehörigen Winkeln. Um diesen Winkel auch aus der Formel zu berechnen, wurden ausser diesen Sehnen noch die Achsen der Ellipsen gemessen und das Mittel der zu Beginn und der nach Ablauf der fünfzig Umläufe herrschenden Achsen verwendet.

Die während der Beobachtungszeit erfolgte Drehung der Pendelebene in Folge der Drehung der Erde war in den mit + bezeichneten Versuchen hinzu zu addiren, während in den mit — bezeichneten abzuziehen.

Die erhaltenen Resultate sind:

Nr.	ab	$\frac{50w}{ab}$ = Const.	$50w$		Differenz
			Gerechnet	Beobachtet	
I +	49697	0·00009081	4°69	4°51	0°18
I′ +	48653	9336	4 59	4 54	0 05
II —	48858	8631	4 61	4 22	0 39
II′ —	47189	8453	4 46	3 99	0 47
III +	36179	9597	3 42	3 47	—0 05
III′ +	35396	9169	3 34	3 26	0 08
IV —	36123	8920	3 41	3 22	0 19
IV′ —	35267	8838	3 33	3 12	0 21
V +	36364	9235	3 43	3 36	0 07
V′ +	35401	9282	3 34	3 29	0 05
VI —	35869	9195	3 39	3 20	0 09
VI′ —	35110	9183	3 31	3 22	0 09
Mittel		0·00009079			0 16

Aus der Pendellänge rechnet sich obige Constante zu 0·00009440, so dass der obige Mittelwerth um circa 4% kleiner erscheint, wovon auch noch ein Theil auf den Einfluss der Reibungswiderstände kommt, welche auch einen den Winkel w ver-

kleinernden Effekt bewirken. Um dies genauer bestimmen zu können, hätte die Zahl der Azimuthe wie beim Foucault'schen Versuche von vier auf zwölf erhöht werden müssen.

In Fig. 10 ist noch ein dem Versuche VI entsprechendes Tableau abgebildet, welches die Art, wie derselbe angestellt wurde, deutlich erkennen lässt.

Fig. 11 zeigt noch die grosse Regelmässigkeit der Dämpfung bei grösserem Drucke der Feder und geringerer Masse der Pendelkugel. Leider wurde diese Figur mit violetter Anilintinte angefertigt, wodurch deren Reproduction enorm erschwert wurde und trotzdem steht das Bild dem Originale an Regelmässigkeit noch ziemlich nach.

Durch diese Resultate scheint gezeigt, dass der hier beschriebene Apparat nicht nur zur Demonstration, sondern auch zu genaueren Messungen brauchbar ist.

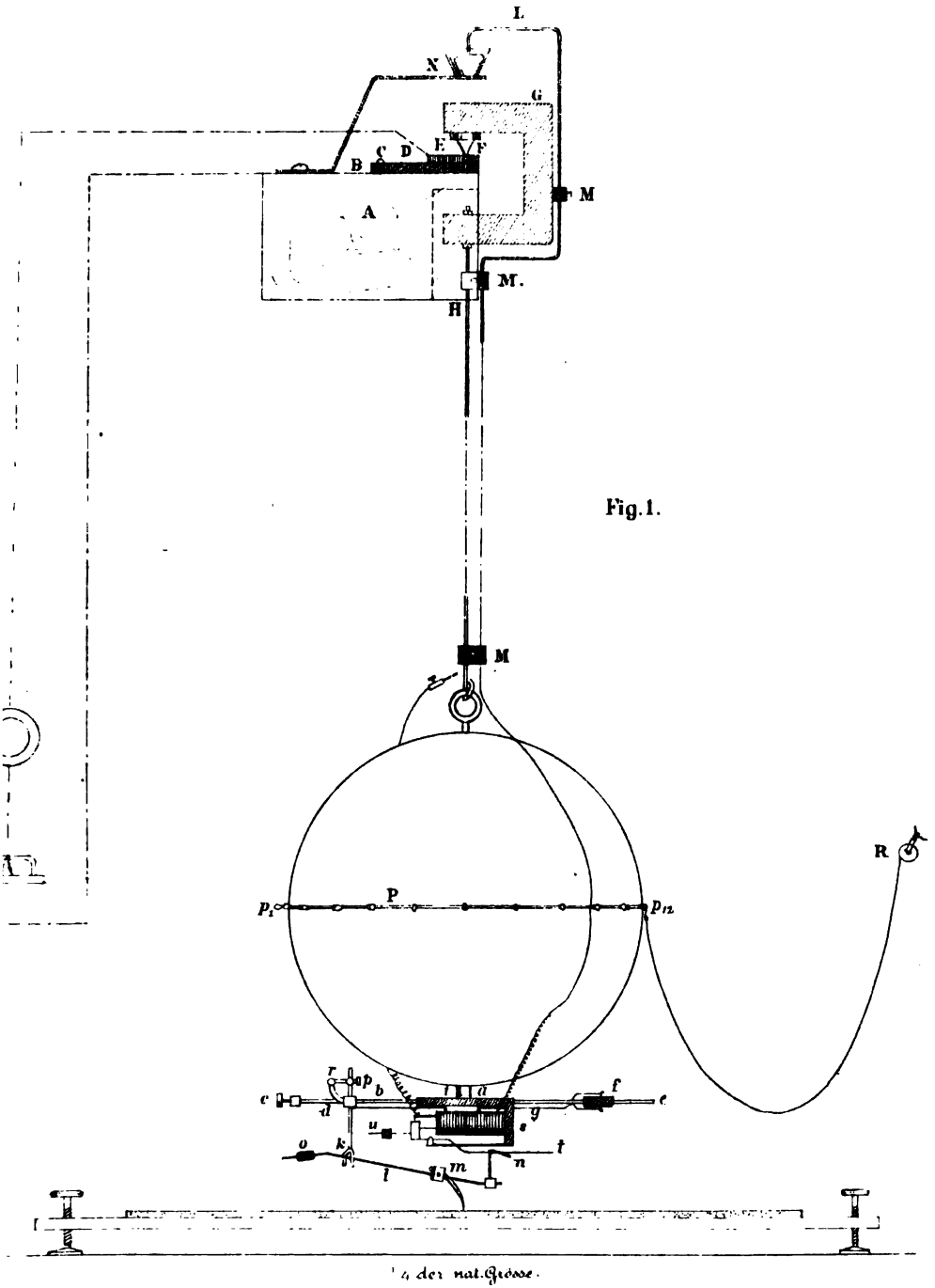


Fig. 1.

1/4 der nat. Grösse.

Druck v. J. Barth in Wien

Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe XCI. Bd. II. Abth. 1885.

Fig. 2.

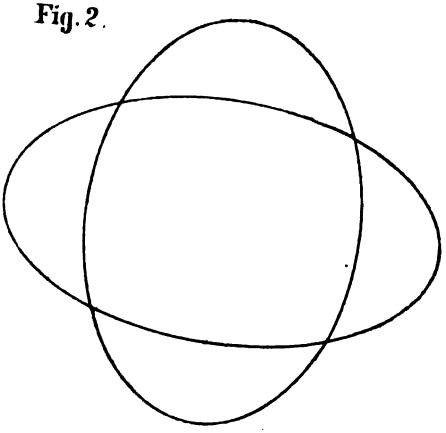
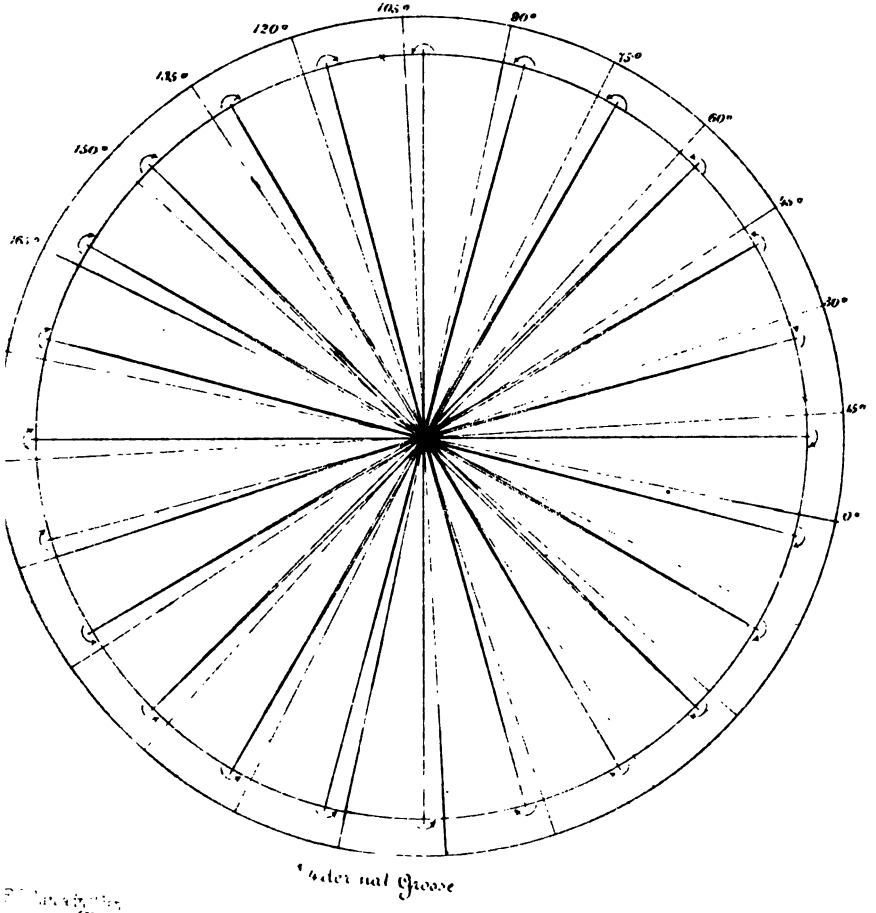


Fig. 3.



Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe XCI. Bd. II. Abth. 1885.

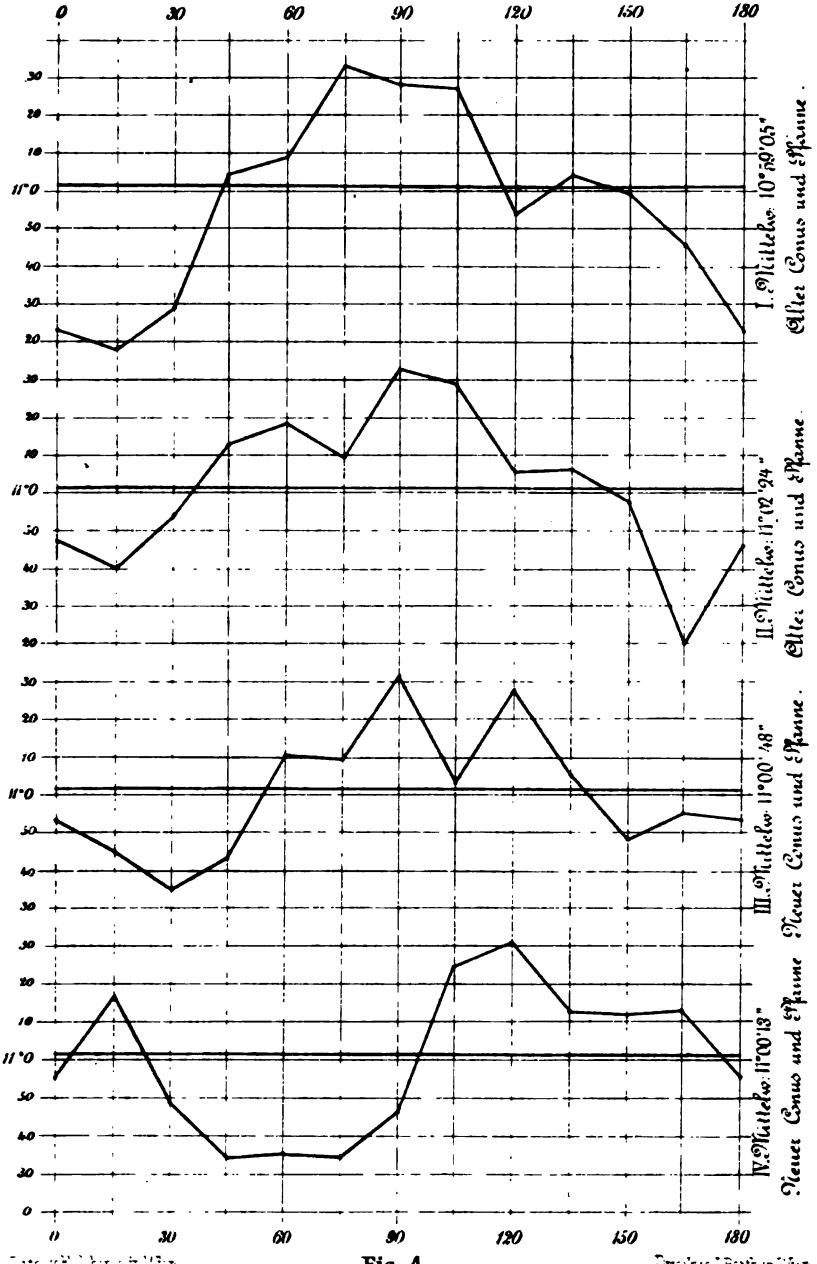
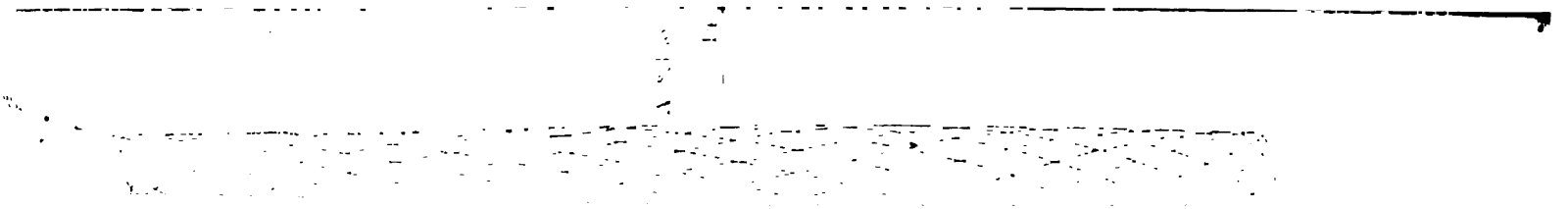
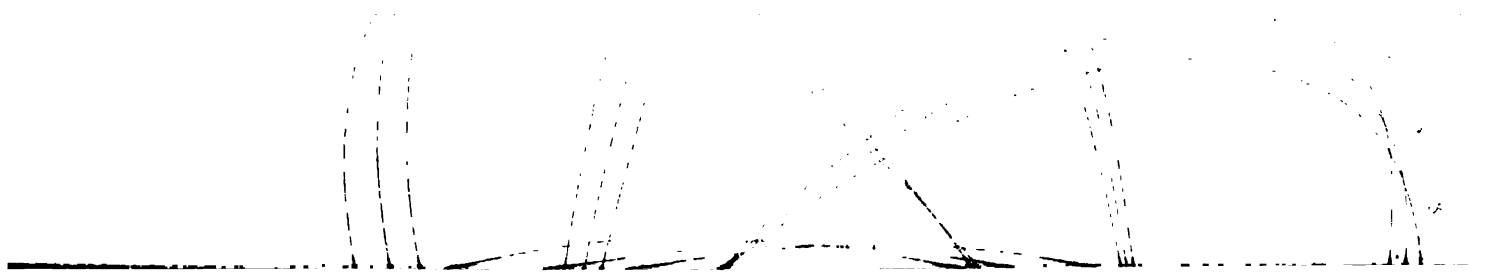

0
30
60
90
120
150
180
I. Mittelw. 10°59'05"
Alter Conus und Platine.
II. Mittelw. 11°02'24"
Alter Conus und Platine.
III. Mittelw. 11°00'48"
Neuer Conus und Platine.
IV. Mittelw. 11°00'13"
Neuer Conus und Platine

Fig. 4.





SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCI. Band. V. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XI. SITZUNG VOM 7. MAI 1885.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter macht mit hohem Erlasse vom 4. Mai die Mittheilung, dass derselbe in Verhinderung Seiner kaiserlichen Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog-Curators in Höchstdessen Stellvertretung die diesjährige feierliche Sitzung der kaiserlichen Akademie am 21. Mai mit einer Ansprache eröffnen werde.

Die Direction des Communal-Real- und Obergymnasiums zu Neu-Bydžov dankt für die dieser Lehranstalt bewilligten akademischen Schriften.

Das w. M. Herr Prof. E. Linnemann in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Verarbeitung und qualitative Zusammensetzung des Zirkons."

Das c. M. Herr Prof. Friedrich Brauer in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Systematisch-zoologische Studien. I. System und Stammbaum. II. Die unvermittelten Reihen in der Classe der Insecten. III. Betrachtungen über täuschende und wahre systematische Ähnlichkeiten zur Beurtheilung der Stellung der Apioceriden und Pupiparen."

Das c. M. Herr Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit des Herrn Prof. Dr. J. Horbaczewski in Prag: „Über künstliche Harnsäure und Methylharnsäure."

Das c. M. Herr Prof. F. Lippich in Prag übersendet eine Abhandlung: „Über polaristrobometrische Methoden, insbesondere über Halbschattenapparate."

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über die ganzen complexen Zahlen von der Form $a + bi$."

Herr Dr. G. Vortmann, Assistent am chemischen Laboratorium der technischen Hochschule in Aachen, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss der Kobaltammoniumverbindungen.“

Der Secretär legt eine von Herrn Anton Sucharda in Tabor eingesendete Abhandlung: „Über eine Gattung Rückungsflächen“ vor.

Ferner legt der Secretär zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor:

1. Von Herrn Dr. Justinian v. Froschauer in Wien. Dasselbe führt die Aufschrift: „Über chemische Agentien, welche die individuelle Disposition für Milzbrand beeinflussen.“
2. Von Herrn Gustav Gessmann, k. k. Militärbeamter in Wien, mit der Aufschrift: „Hypnoskopische Untersuchungen und Versuch, das Zustandekommen abnormer Empfindungen im Hypnoskope auf Grundlage magnetischer Attraction und Repulsion des Blutes zu erklären.“

Das w. M. Herr Prof. E. Suess überreicht eine Mittheilung über die Kenntniss der Structur des Libanon und des Anti-Libanon.

Das w. M. Herr Regierungsrath Th. v. Oppolzer überreicht eine Abhandlung: „Über die Auflösung des Kepler'schen Problems.“

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Heinrich Zikes „Über die Chlorhydrine des Butenylglycerins.“

Herr Professor Dr. Franz Toula an der k. k. technischen Hochschule in Wien überreicht eine von ihm im Vereine mit seinem Assistenten Herrn Johann A. Kail verfasste Abhandlung: „Über einen Krokodilschädel aus den Tertiärablagerungen von Eggenburg in Niederösterreich.“

Herr Dr. J. v. Hepperger, Assistent an der k. k. Sternwarte zu Wien überreicht eine Abhandlung: „Über Krümmungsvermögen und Dispersion von Prismen.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XX. Disp. 2ª—4ª. Torino, 1885; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl.: Öfversigt af Förhandlingar. 41 : a Årg. Nr. 6—8. Stockholm, 1884; 8°.

— kaiserliche, Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XXI. Nr. 5—6. Halle a. S., 1885; 4°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période, tome XIII. Nr. 3. Genève, Lausanne, Paris, 1885; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang IX, Nr. 27—35. Cöthen, 1885; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome C. 1ᵉʳ semestre. Nos. 14—16. Paris, 1885; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. VI. Jahrgang, 1885. Heft IV. April. Berlin; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVIII. Jahrgang. Nr. 7. Berlin, 1885; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVIII, Nr. 2. Wien, 1885; 8°.

— Berliner medicinische: Verhandlungen aus dem Gesellschaftsjahre 1883/84. Band XV. Berlin, 1885; 8°.

Heidelberg, Universität: Akademische Schriften pro 1883/84. 25 Stücke; 4° & 8°.

Institut national genévois: Bulletin. Tome XXVI. Genève, 1884; 4°.

Institute, the Canadian Toronto: Proceedings. Vol. II. Fasciculus Nr. 2. Toronto, 1884; 8°. — Third series. Vol. III. Fasciculus Nr. 1. Toronto, 1885; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1885. II. und III. Heft. Wien, 1885; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXXI. Band, 1885. III. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 29ᵉ année, 3ᵉ série, tome XV. 521ᵉ livraison. Mai 1885. Paris; 4°.

Nature. Vol. XXXI. Nos. 808—809. London, 1885; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen, Nr. 3—6. Wien, 1885; 8°.

Rosenberg, Emil Dr.: Untersuchungen über die Occipitalregion des Cranum und den proximalen Theil der Wirbelsäule einiger Selachier. Dorpat, 1884; Folio.

Society the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. VII. Nos. 3 & 4. London, 1885; 8°.

— the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. V. part. 2. London et Edinburgh, 1885; 8°.

Verein, militär-wissenschaftlicher in Wien. Organ. XXX. Band. 1., 2. und 3. Heft. Wien. 1885; 8°.

— naturhistorischer der preussischen Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XLI. Jahrgang. V. Folge. I. Jahrgang. II. Hälfte. Bonn, 1884; 8°.

Vierteljahresschrift, österreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LXII. Band, II. Heft (Jahrgang 1884, IV). Wien, 1884; 8°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. VI. Jahrgang. Nr. 6 und 7. Ausserordentliche Beilagen Nr. II, III und IV. Wien. 1885; 8°.

Woldřich, Johann N.: Beiträge zur Urgeschichte Böhmens. II. Theil. Wien, 1884; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. V. Jahrgang. 1885. IV. Heft, April. Berlin, 1885; 4°.

— für physiologische Chemie. IX. Band, 3. Heft. Strassburg, 1885; 8°.

Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen, zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde. VI. Band. 1. Heft. Berlin, 1885; 8°.

Verarbeitung und qualitative Zusammensetzung des Zirkons.

(Mit 2 Holzschnitten.)

Von Ed. Linnemann.

(Aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität zu Prag.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Mai 1885.)

Eine praktische Frage, deren Erledigung jedoch zugleich auch ein rein wissenschaftliches Interesse bot, veranlasste mich, grössere Mengen von Zirkon auf Zirkonerde zu verarbeiten. Die Beobachtungen, welche ich hierbei zu machen Gelegenheit hatte, scheinen mir der Mittheilung werth und sind in dem Nachfolgenden enthalten.

Der Zirkon gehört zu den härtesten und am schwersten aufschliessbaren Silicaten. Um das Pulverisiren des Zirkons, welcher behufs Aufschliessung in ein sehr zartes Pulver verwandelt werden muss, zu erleichtern, pflegte man die Zirkonkrystalle rothglühend in kaltes Wasser zu werfen, wodurch sie in Folge vieler entstehender Risse matt werden und sich auch etwas besser zerkleinern lassen.

Dieser Zweck kann bei weitem viel vollständiger erreicht werden, wenn man Zirkonkrystalle der Einwirkung der Dämpfe von Fluorwasserstoffsäure aussetzt. Sie zerfallen hiebei zu einem gröblichen Pulver, welches sich in einem Eisenmörser sehr leicht pulverisiren lässt. Es verhielten sich in dieser Beziehung Zirkonkrystalle vom Ural und von Nordcarolina ganz gleich. Allerdings zerfallen nicht alle Krystalle in gleichem Masse. Manche fast vollständig, bei anderen erhalten sich die besser ausgebildeten Endflächen im Zusammenhange, zerfallen aber trotzdem unter dem Drucke des Pistills leicht zu Pulver.

Die Zirkonkrystalle genannten Ursprungs sind demnach mit unzähligen feinen Sprüngen versehen, welche von einem Silicate

ausgefüllt sind, das durch gasförmige Flusssäure leicht und vollständig aufgeschlossen wird, während die Krystallgrundmasse des Zirkons unangegriffen bleibt.

Man hat so zugleich ein Mittel an der Hand, die krystallinische Grundmasse der Zirkonkrystalle in vollkommen reinem Zustande zur Verarbeitung zu bringen.

Wie bei diesem Präpariren des Zirkons behufs Aufschliessung vorgegangen wurde, mag aus folgenden beispielsweisen Angaben ersichtlich sein.

193 Grm. ganze Zirkonkrystalle aus Nordcarolina wurden unter häufigem Wenden zehn Tage lang in einer Platinschale den Dämpfen von Flusssäure ausgesetzt und die zerfallene, zerbröckelte Masse mit Wasser befeuchtet, abermals bis zur Sättigung mit Flusssäuregas behandelt. Das Ganze wurde alsdann unter Zusatz von Wasser längere Zeit auf dem Wasserbade erwärmt und vollständig, zuletzt unter Zusatz von Salzsäure ausgewaschen. Die erhaltene Lösung enthält die Bestandtheile des zersetzbaren Silicates. Das ausgewaschene Zirkonpulver, dessen Gewicht nach scharfem Trocknen 187 Grm. betrug, liess sich in einem Eisenmörser leicht zu einem so feinen Pulver zerreiben, dass es durch das feinste Seidensieb ging. Durch Behandeln mit etwas Königswasser wurde das aus dem Mörser stammende Eisen entfernt, worauf das so präparirte Zirkon nach dem Waschen und scharfen Trocknen ein schneeweisses, schweres, der Pfeifenerde gleichendes Pulver darstellte, dem weder Flusssäure noch Königswasser weitere merkbare Mengen an Mineralsubstanz entzogen. Das Gewicht betrug 180 Grm., circa 93% der ursprünglichen Zirkonkrystalle.

Demnach enthielten die erwähnten Krystalle Nordcarolinazirkon etwa 4% eines durch Flusssäure aufschliessbaren Silicates, dem auf Grund der vorgenommenen qualitativen Untersuchung obiger Lösung die nachfolgenden metallischen Elemente zu Grunde liegen:

Na, Ka, Li, Mg, Ca, Al. Fe, Zr.

Uralzirkon, grosse, einzelne, aber schlecht ausgebildete, dem Granattypus sich nähernde Krystalle, gaben bei gleicher Behandlung folgendes Resultat. Sie enthielten circa 5% durch

Flusssäure aufschliessbares Silicat, das mit Ausnahme des Li dieselben metallischen Elemente enthielt, wie der Nordcarolinazirkon. Man erhielt etwa 94% des feingepulverten, zum Aufschliessen fertigen Zirkons.

Das Aufschliessen des Zirkons ist nach den bis jetzt empfohlenen Methoden eine schwierige Sache und im Grossen unmöglich. Von den vorgeschlagenen Flussmitteln: Ätznatron, kohlensaures Natron, saures schwefelsaures Natron und Fluornatrium greift das Letztere wohl das Zirkon am leichtesten an, allein die Methode ist aus anderen Gründen im Grossen gleichfalls nicht anwendbar. Die anderen Flussmittel greifen das Zirkon zu langsam und unvollständig an, man muss Stunden lang bei den höchsten erreichbaren Temperaturen erhitzen, die aufgeschlossene Menge Zirkon ist immer nur gering, die Defecte an den Tiegeln so gross, dass, Alles in Allem genommen, diese Methoden im Grossen nicht anwendbar sind.

Auf Grund zahlreicher, zeitraubender Versuche ist es mir gelungen, eine Methode aufzufinden, welche gestattet, 25 Grm. Zirkon in 15 Minuten mit einem einfachen Bunsenbrenner aufzuschliessen, eine Methode, welche sich in anderen Fällen zum Aufschliessen von Silicaten glänzend bewährt hat und für das Laboratorium eine angenehme Acquisition werden wird.

Das Flussmittel besteht in einer Mischung von Ätznatron und wenig Fluornatrium. Eine derartige Mischung greift hinreichend fein gepulverten Zirkon noch rascher und leichter an als Fluornatrium allein. Indem anfangs Kieselfluornatrium und Fluormetalle entstehen, werden diese durch das schmelzende Na(OH) in kieselsaures Natron und Metalloxyde umgewandelt, wobei unter Aufschäumen der Schmelze Wasserdampf frei wird und das Fluornatrium immer wieder regenerirt wird. Desshalb reicht auch eine nur kleine Menge Fluornatrium vollkommen aus. Mit dem Aufhören der Wasserbildung, d. h. dem Aufschäumen der Schmelze, ist die Reaction zu Ende und das Silicat aufgeschlossen.

Das Aufschliessen des Zirkons wurde in einem circa 200 Cc. fassenden, mit dem Deckel 250 Grm. schweren Silbertiegel von 75 Mm. oberem Diameter und 70 Mm. Höhe von beiläufig 2 Mm. Wandstärke vorgenommen.

Man gibt 100 Grm. zuvor bis zum ruhigen Fliessen geschmolzenen Ätznatrons, 10 Grm. reines Fluornatrium[1] und 25 Grm. präparirten, durch ein feines Seidensieb passirten Zirkons in den Tiegel und erwärmt mit einem guten Bunsenbrenner. Bei vollem Gasdruck beginnt das Aufschäumen rasch und bei Aufmerksamkeit, zeitweiligem Entfernen des Brenners und Regulieren desselben, lässt sich ein Überschäumen leicht vermeiden. Nach etwa 10—15 Minuten ist die Hauptreaction vorüber und aus der ruhig fliessenden Masse entweichen ohne Aufschäumen gleichmässig Gasblasen. Diese nachfolgende Reaction rührt daher, dass die etwas weniger feinen Theilchen des Zirkonpulvers längerer Zeit bedürfen, um von der Schmelze gelöst zu werden. Um dies für alle Fälle möglichst vollständig zu erreichen, erhitzt man mit bedecktem Tiegel etwa noch eine halbe Stunde, wobei Dunkelrothgluth erreicht wird und man zweckmässig einige Male mit einem dicken Platindraht umrührt. Auch nach Verlauf dieser Zeit ist die Masse noch dünnflüssig. Man giesst sie in einer Silberschale zu dünnen Kuchen aus, welche sich beim Erkalten leicht loslösen und sich in heissem Wasser leicht unter Zurücklassung von Zirkonerdenatron und die, die Zirkonerde begleitenden Oxyde zertheilt, während Natron, kieselsaures Natron und Fluornatrium in Lösung gehen. In dieser kalischen Lösung konnte von Oxyden, die aus dem Zirkon stammen, nur Thonerde und Lithion nachgewiesen werden.

Der unaufgeschlossene Zirkon bleibt neben etwas Kieselsäure beim späteren Lösen des rohen Zirkonerdenatrons in Salzsäure zurück und betrug nach Entfernung der Kieselsäure mittelst Natronlauge im Mittel mehrerer Versuche im Maximum 1·5% des in Arbeit genommenen präparirten Zirkons.

Der in Wasser unlösliche Theil der Schmelze, das rohe Zirkonerdenatron, wird möglichst vollständig durch Decantation gewaschen, wobei man aufhören muss, sobald das Absetzen

[1] Das Fluornatrium stellt man aus käuflicher reinster Flusssäure dar, indem man dasselbe mit reinem kohlensauren Natron neutralisirt und so lange versetzt, bis kein Niederschlag mehr entsteht. Die Lösung wird nach dem Filtriren mit Salzsäure schwach angesäuert, mit Schwefelwasserstoff ausgefällt, filtrirt, in Platingefässen zur Trockne gebracht, und scharf getrocknet.

nicht mehr gut erfolgt, was stets eintritt, sobald bei zunehmendem Auslaugen der Salzgehalt des Waschwassers stark abgenommen hat. Man sammelt auf Filtern, lässt lufttrocken werden und trocknet auf dem Wasserbade.

25 Grm. präparirten Zirkons geben auf diese Weise im Durchschnitte von sieben verschiedenen Versuchen 26 Grm. rohes Zirkonerdenatron, wobei die Ausbeute in den extremsten Fällen zwischen 23·5 und 30 Grm. schwankte.

Zur weiteren Verarbeitung des „rohen Zirkonerdenatrons" wird dasselbe mit überschüssiger verdünnter Salzsäure gelöst, wiederholt zur Trockne gebracht und wie zur Abscheidung der Kieselsäure behandelt. Es scheidet sich nicht nur Kieselsäure ab, sondern es entweicht auch Flusssäure und eine sehr kleine Menge unaufgeschlossenen Zirkons wird entfernt.

Die Trennung des Zirkonchlorids von allen anderen aus dem Zirkone stammenden Metallchloriden geschieht in der einfachsten Weise durch Behandeln mit einer Mischung von rauchender Salzsäure spec. Gew. = 1·17, absolutem Alkohol und Äther, in welcher Mischung das $ZrCl_4$ fast unlöslich ist, sämmtliche anderen Chloride bis auf ganz geringe Mengen löslich sind.

Das unreine, vor allem Natriumchlorid haltende $ZrCl_4$ wird zu diesem Zwecke zunächst auf dem Wasserbade vollständig getrocknet, auf das feinste gepulvert und durch ein feines Sieb getrieben. Das staubfeine Pulver wird nun in einer geräumigen Flasche mit soviel reiner Salzsäure versetzt, dass die Masse auch bei mehrtägigem Stehen beim Umkehren in der Flasche noch fliessend bleibt, aber weder dick noch gar fest wird. Die hierzu verwendete Salzsäure wird dem Volumen nach gemessen und alsdann das dreifache Volumen absoluten Alkohols nach und nach unter Umschütteln zugegeben. Hierbei findet starke Erwärmung statt und es löst sich hierbei viel $ZrCl_4$ auf, welches sich aber beim Erkalten und dem nachfolgenden Verdünnen der Masse mit reinem Äther wieder fast vollständig abscheidet. Auch der Zusatz von reinem, trockenem Äther hat nach und nach unter Umschütteln zu erfolgen, bis zehn Volumtheile Äther (auf ein Volumtheil Salzsäure) zugegeben sind. Nach mehrstündigem Stehen filtrirt man das $ZrCl_4$ ab, bringt es vom Filter herunter und führt es mit einer Mischung von 1 Volumen conc. reiner

Salzsäure, 3 Volumina absolutem Alkohol und 40 Volumtheile reinen Äthers an, worauf filtrirt, zunächst noch mit dieser Mischung, zuletzt aber mit reinem Äther gewaschen wird, bis dieser nicht mehr gelb, sondern farblos abläuft. Man kann das $ZrCl_4$ durch Wiederholung dieser Operation absolut eisenfrei erhalten, doch empfiehlt sich, wenn man mit grösseren Mengen arbeitet, eine Wiederholung nicht, und ist die weitere Reinigung des $ZrCl_4$ in anderer Weise vorzunehmen.

Nach dieser Behandlung wurde das natronhaltige Zirkonchlorid in Wasser gelöst, von etwas abgeschiedenem Chlorsilber (aus dem Silbertiegel) getrennt, mit etwas essigsaurem Natron versetzt und mit Schwefelwasserstoff vollständig ausgefällt, die geringe Menge Niederschlag, bestehend aus Cu, Bi und Sn entfernt, bis zum Weggehen des Schwefelwasserstoffs erhitzt, mit Salmiak versetzt und mit Ammon ausgefällt. Das bis zum Verschwinden der Chlorreaction gewaschene Zirkonerdehydrat wurde noch zweimal in Salzsäure gelöst, mit Ammon gefällt, gewaschen, zuletzt auf dem Wasserbade getrocknet, fein zerrieben und gesiebt. Ich will es hier als „rohes Zirkonerdehydrat" bezeichnen. Die bei diesen Operationen abgegangenen Waschwasser enthielten neben Natron, Kalk und Magnesia.

Das Gewicht des auf diese Weise aus 400 Grm. „rohen Zirkonerdenatron", das ist also aus circa 400 Grm. Zirkonkrystalle erhaltene „rohe Zirkonerdehydrat" betrug 283·5 Grm. Es lieferte 77—78% Glührückstand, während reines $Zr(OH)_4$ bei Umwandlung in ZrO_2 77·1 Glührückstand liefern sollte. Eine kleine Menge dieses „rohen Zirkonerdehydrates" in Salzsäure gelöst, noch zweimal mit Ammon gefällt, in Chlorid umgewandelt und wiederholt mit der erwähnten Mischung von Salzsäure, Alkohol und Äther behandelt, lieferte vollkommen eisenfreies $ZrCl_4$ als fein krystallinisches, schneeweisses, seidenglänzendes Pulver, das 50% Glührückstand lieferte, während reines $ZrCl_4$ 52·5% Glührückstand an ZrO_2 liefern sollte. Man ersieht hieraus, dass die erwähnte Mischung von Salzsäure, Alkohol und Äther das Zirkonchlorid im Wesentlichen als neutrales und nicht als basisches Chlorid fällt.

Das „rohe Zirkonerdehydrat" enthält noch kleine Mengen von: Fe, Zn, Cu, Mg, Pb, Ca und Na. Abgnerera de wege

der Geringfügigkeit dieser Verunreinigungen ist es nicht leicht, dieselben zu beseitigen, da die Zirkonerde als amorphe Verbindung wie als Hydroxyd, basisches Sulfat, basisches Chlorid oder als basisches Acetat gefällt, stets einen Theil dieser Verunreinigungen mit sich niederreisst und auch eine Wiederholung der Operation nicht zum Ziele führt.

So ist die Fällung der Zirkonerde durch Kaliumsulfat in der Siedhitze als Mittel der Reinigung empfohlen worden, aber es gelingt auf diese Weise nicht einmal das Zirkonsulfat auch bei Wiederholung der Fällung eisenfrei zu erhalten.

Ich habe bei dieser Gelegenheit die nirgends erwähnte Beobachtung gemacht, dass der Niederschlag wohl in gesättigter Kaliumsulfatlösung fast vollkommen unlöslich ist, nicht aber in Wasser. Es löst sich bei fortgesetztem Waschen in dem Masse, als das Kaliumsulfat entfernt wird, eine beträchtliche Menge auf, während der Rest des Sulfates dann gänzlich unlöslich sich erweist. Es zeigte sich, dass der ursprüngliche Niederschlag zwei verschieden geartete Zirkonsulfate einschloss, von welchen das eine wohl in Kaliumsulfatlösung, nicht aber in Wasser unlöslich, das andere aber in beiden Fällen unlöslich war. Das lösliche Salz sowohl wie das unlösliche, verhielten sich nämlich bei einer Wiederholung des Versuches ganz gleich, indem beide, wie die ursprüngliche Zirkonlösung von Neuem je ein lösliches und ein unlösliches basisches Sulfat lieferten. Die in beiden Salzen enthaltene Erde zeigte keinerlei Unterschied und bestand aus derselben Zirkonerde.

Erwähnen will ich bei dieser Gelegenheit der Zirkonacetate. Versetzt man eine neutrale Lösung von Zirkonchlorid mit hinreichend viel Natriumacetat und erwärmt die verdünnte Lösung mehrere Stunden im Wasserbade, so fällt alles Zirkon als voluminöses, flockiges, basisches Zirkonacetat aus, aber keineswegs frei von den Verunreinigungen, obgleich die überstehende Lösung sehr stark sauer von freier Essigsäure ist.

Das basische Acetat löst sich vollständig in erwärmtem Eisessig (selbst in der Kälte gefälltes Hydrat nicht). Aus dieser Lösung wird das Zirkonacetat beim Verdunsten in Form einer spröden, rissigen, in jeder Beziehung dem arabischen Gummi vergleichbaren Masse erhalten. Beim Übergiessen mit Wasser

quillt dieses Salz zunächst zu einer durchscheinenden Gallerte auf, bildet eine dicke, klebrige Masse, die dann zum Syrup und zu einer dicklichen, sehr leicht schäumenden Flüssigkeit wird. Der Versuch, die in Lösung vorhandenen krystallisirbaren Acetate durch Dialysiren zu entfernen, schlug fehl; selbst nach wochenlangem Verweilen auf dem Dialysator konnte nicht einmal Natrium entfernt werden.

Um ein reines Zirkonpräparat zu erhalten, versuchte ich auch den folgenden Weg. Das neutrale Chlorid wurde, nachdem es nochmals mit Schwefelwasserstoff behandelt worden, in einen grossen Überschuss einer gesättigten Lösung von kohlensaurem Ammon eingetragen und mit Schwefelammon ausgefällt. Der unter den nöthigen Vorsichtsmassregeln abgeschiedene Niederschlag enthielt zwar, wie das Funkenspectrum seiner Lösung ergab: Fe, Zn, Pb, Ca und Mg, allein in der Lösung war trotzdem neben Zirkonerde noch etwas Fe, dann aber Zn, Pb, Cu und Ca sowie Mg. Auch zweimaliges erneuertes Fällen mit Ammon als Hydroxyd und Waschen bis zum Verschwinden der Chlorreaction, schaffte Zn, Ca, und Mg nicht aus der Zirkonerde. Man erkennt hieraus, wie schwierig es ist, durch die gewöhnlichen Trennungsmethoden kleine Beimengungen von Cu, Pb, Zn, Fe, Ca und Mg von Zirkonerde zu trennen. Das betreffende Zirkonerdechlorid war mindestens dreimal mit Schwefelwasserstoff behandelt, einmal mit Schwefelammon in ammoniakalischer Carbonatlösung und mindestens fünfmal mit Ammon als Hydroxyd gefällt worden, ohne von obigen Verunreinigungen dadurch getrennt worden zu sein.

Zur völligen Reinigung des Zirkonchlorids führt nur ein mehrmaliges Umkrystallisiren desselben aus heisser, concentrirter, rauchender Salzsäure vom spec. Gewicht 1·17, in welcher das Zirkonchlorid bei genügender Menge an Säure in der Wärme völlig löslich ist, in der Kälte aber sich sehr reichlich wieder abscheidet. Auf die Schwerlöslichkeit des $ZrCl_4$ in concentrirter Salzsäure ist schon früher aufmerksam gemacht worden und das Waschen des Chlorides mit solcher Säure als Mittel zur Reinigung empfohlen worden (Chevreul, Herrmann), doch nur das Umkrystallisiren führt rasch und vollständig zum Ziel. Die Verluste hierbei sind nicht sehr gross. So lieferten beispielsweise 79 Grm. $ZrCl_4$ nach dreimaligem Umkrystallisiren aus je 100 CC. heisser

Salzsäure, Absaugen der Mutterlauge und jedesmaligem Nachwaschen mit je 50 CC. kalter Salzsäure 52 Grm. gereinigtes $ZrCl_4$. Den grössten Theil des in der abfiltrirten Salzsäure enthaltenen $ZrCl_4$ kann man noch durch Zusatz von Weingeist und Äther in etwas weniger reinem Zustande abscheiden. Das ätheralkoholhaltige Filtrat eingedampft, gab einen Rückstand, dessen Funkenspectrum in concentrirter Lösung: Cu, Pb, Zn, Fe, Mg und Ca erkennen liess. Diese Metalle konnten nun auf gewöhnlichem Wege von einander geschieden werden, so dass ihre sehr reinen und brillanten Funkenspectren zur Ansicht kamen.

Das Funkenspectrum der wässerigen Lösung des auf diesem Wege gereinigten $ZrCl_4$ ergab keine einzelnen Spectrallinien mehr, sondern ein anfangs schwaches, aber bald sehr stark auftretendes continuirliches Spectrum, welches von der sich bildenden und weissglühend werdenden Zirkonerde herrührt. Dieser Umstand berechtigt mich, anzunehmen, dass das $ZrCl_4$ alle ihm noch beigemengt gewesene Verunreinigungen verloren, sonst würden die so hellen Linien derselben wenigstens anfangs sichtbar gewesen sein.

Obgleich die wässerige Lösung des Zirkonchlorides kein Linienspectrum gibt, so gibt doch das eingetrocknete Salz im Öffnungsfunken ein sehr linienreiches Spectrum. Auch hier verursacht weissglühende Zirkonerde ein starkes, continuirliches Spectrum, doch wird es bei einem Spectralapparat mit stärker dispersirenden Prismen, welcher schon wegen der grossen Nähe der einzelnen Linien erforderlich ist, möglich sein, eine grosse Zahl von Linien zu messen, und zwar vom grünen Theil des Spectrums angefangen gegen das brechbarere Ende zu. Ich werde auf das Spectrum des reinen $ZrCl_4$ im Öffnungsfunken später bei einem anderen Anlasse noch zurückkommen.

Die, in der durch Flusssäure nicht weiter angreifbaren Grundmasse der Zirkonkrystalle neben Zirkonerde vorhandenen anderweitigen, basischen Oxyde waren in dem salzsauren, ätheralkoholhaltigen Auszuge enthalten. Da die Gesammtmenge dieser Chloride aus 400 Grm. Zirkonkrystalle stammte, so kam die Untersuchung dieser Chloride einer mit 400 Grm. Zirkonkrystallen vorgenommenen vollständigen qualitativen Analyse gleich und man kann sich nicht wundern, dass das Ergebniss

dieser Analyse etwas vollständiger ausfiel, als eine mit den üblichen Mengen vorgenommene qualitative Untersuchung ausgefallen wäre, dass diese Analyse ein besonderes Interesse bietet, da im Verlaufe derselben nicht weniger als noch 16 andere Metalle neben Zirkonium aufgefunden wurden.

Wurde in dem mit salzsäurehaltigem Ätheralkohol gewaschenen $ZrCl_4$ durch Schwefelwasserstoff schon Cu, Bi, Sn zur Fällung gebracht und später dann noch Cu, Pb, Zn, Fe abgeschieden, so lieferte der obenerwähnte Auszug selbst, mit Schwefelwasserstoff einen Niederschlag, der beträchtliche Mengen von Sn, kleinere von Cu, Spuren von Pb, Ag und Pt einschloss. Die beiden letzten Metalle stammen aus dem Platindraht, der zum Umrühren, und aus dem Silbertiegel, der zum Aufnehmen der Schmelze beim Aufschliessen des Zirkons diente. Der Schwefelammoniumniederschlag liess beim Lösen in Salzsäure Co als Rückstand. In die kalische Lösung der Oxyde ging Al, aber kein anderes Metall. Beim Behandeln des Eisenhydroxyds mit Salmiak und Ammon gingen in Lösung: Co, Zn, Mn, Mg und Ca. Mangan war nur in Spuren, Cobalt in kleiner Menge vorhanden, um aber das Zn, Mg und Ca gänzlich vom Fe zu trennen, musste die Fällung mit Salmiak und Amon dreimal wiederholt werden. Zn, Mg, Ca konnten mit grösster Schärfe mittelst des Funkenspectrums der Chloridlösung nachgewiesen werden. Mangan war undeutlicher.

Die helle Farbe des von Zn, Mn, Co, Ca und Mg befreiten Eisenhydroxydes deutete auf die Gegenwart von Erden. Das Eisen wurde mittelst kohlensaurem Ammon und Schwefelammon gefällt und von den Erden getrennt. Das Filtrat lieferte beim Einkochen die Erden, deren gelbe Farbe schon die Gegenwart des Urans verrieth. Zugleich war etwas Zirkonerde zugegen, welche vollständig als basisch-schwefelsaure Zirkonerde durch überschüssiges Kaliumsulfat in der Siedhitze ausgefällt werden konnte. Die relativ helle Farbe der aus den löslichen Sulfaten mittelst Ammon ausgefällten Hydroxyde wies auf die Gegenwart einer weiteren Erde neben Uranoxyd hin. Sie konnte, wenn auch nicht ganz vollständig von Uran mittelst kochender Salmiaklösung getrennt werden, in welcher Lösung sich Uranoxyd nur spurenweise, Zirkonerdehydrat gar nicht löst. Durch Wiederholung

der Operation konnte die Erde ziemlich vollständig von Uran getrennt werden.

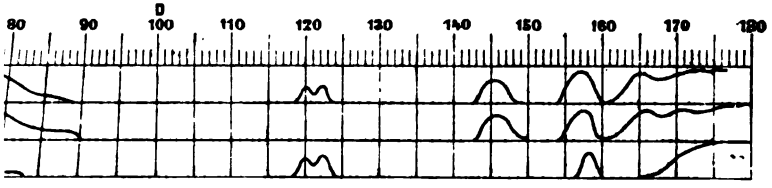
Die Erde ist „Erbinerde" mit Ausschluss von Didym.

Das Uran wurde erkannt an den charakteristischen Uranreactionen, welche alle zutrafen und an dem so bezeichnenden Absorptionsspectrum der Lösung des Hydroxyds in kohlensaurem Ammon, Salzsäure und Salpetersäure.

Das Erbium wurde erkannt an dem Verhalten seines Hydroxyds gegen kochende Salmiaklösung, worin es sich leicht und vollständig löst, an seinem Verhalten gegen kochende Lösungen von essigsaurem Natron, wobei keinerlei Fällung entsteht, während Zirkonerde vollständig gefällt wird, der Löslichkeit seines Sulfates und den so charakteristischen Absorptionsspectren der Lösungen des Hydrates in kohlensaurem Ammon, Salzsäure und Salpetersäure.

Die Zeichnungen der Fig. *A*, zeigen in Nr. I das Absorptionsspectrum der noch mit Uran vermischten Erbinerde

Fig. A.

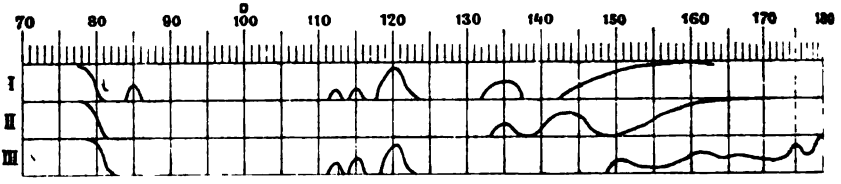


Zirkon, gelöst in kohlensaurem Ammon. Darunter Nr. II das Absorptionsspectrum einer Lösung von Uranoxyd, sowie weiter unter Nr. III einer Lösung von Erbiumoxyd, beide in kohlensaurem Ammon gelöst. Über das Vorhandensein von Uran und Erbium im Zirkon kann demnach kein Zweifel sein.

Was das Absorptionsspectrum der Chloride von Uran und Erbium aus Zirkon, Nr. 1, Fig. *B*, bei 85 der Scale (beiläufige Wellenlänge 6590) im rothen Theile des Spectrums eine Absorption zeigt, welche weder dem Uranchlorid (Absorptionsspectrum Fig. *B*, Nr II) noch dem Erbiumchlorid (Absorptionsspectrum Fig. *B*, Nr. III) zukommt, so ist mit Rücksicht hierauf und mit Rücksicht auf die Frage, ob denn ausser Erbium von den coexistirenden Erden im Zirkon keine anderen als Erbium vorhanden sind, eine weitere Verfolgung dieses Gegenstandes wünschenswerth, um so leichter sein wird, da ja die Abscheidung der

Gadoliniterden aus Zirkon weit einfacher und auch vollständiger bewirkt werden kann, als dies hier in der vorstehenden Arbeit geschah, so lange man noch ganz im Unklaren sich befand, welcher Natur die vorhandenen Oxyde sein mochten. Die beobachtete Absorptionslinie ($\lambda = 6590$) gehört entweder einer der sehr seltenen Erden an, oder wahrscheinlicher, da diese Absorptionslinie keiner der bis jetzt beobachteten Absorptions-

Fig. B.



linien seltener Erden hinreichend nahe kommt, einem neuen Metalle. Zur Lösung dieser Frage gedenke ich entweder bedeutend grössere Mengen von Zirkon zu verarbeiten, oder solche Zirkone zu verwenden, welche wie Hyacinthen und Jargone durch ihre Absorptionslinien einen beträchtlicheren Gehalt an Uran und absorbirende Verbindungen verrathen.

Bekanntlich hat Sorby für gewisse Jargone eigenthümliche Absorptionsstreifen, und zwar im rothen, grünen und violetten Theile des Spectrums beobachtet. Er hielt diese Erscheinung, verursacht durch die Gegenwart eines neuen Elementes, welches er als „Jargonium" bezeichnete, fand aber später, dass diese Absorption dem Uran zuzuschreiben sei. Hierdurch erklärte sich wohl die Absorption im blauen und rothen Theile des Spectrums, nicht aber die beobachtete Absorption im mittleren grünen Theile des Spectrums.

Diese Absorptionsstreifen rühren eben nach meinen eigenen vorliegenden Beobachtungen von Erbinerde her, und die Angabe Sorby's durch Zusammenschmelzen von reiner Zirkonerde und Uranoxyd mit Borax könne eine Perle erhalten werden, welche analoge Absorptionserscheinungen zeige, ist insoferne belanglos, als mir dieser Versuch mit meiner „reinen Zirkonerde" und Uran niemals gelang, offenbar, weil kein Erbium mehr in der Zirkonerde vorhanden war, die Absorptionen entsprachen nur der Gegenwart des Urans.

Ich kehre nun zu dem weiteren Ergebnisse der qualitativen Analyse des salzsäurehaltigen Ätheralkoholauszuges des rohen Zirkonchlorides zurück. Aus dem Filtrate nach dem Schwefelammoniumniederschlage wurde durch Kochen zunächst noch etwas Co abgeschieden. Das Flammenspectrum ergab: Ka, Na, Li, Ca. Das Funkenspectrum der Lösung: Mg, Ca, Ka, Na, Li.

In der krystallinischen Grundmasse des Zirkons sind demnach folgende metallische Grundstoffe enthalten:

Sn, Pb, Cu, Bi, Zr, Al, Fe, Co, Mn, Zn, Mg, Ur, Er, Ca, Ka, Na, Li

nd man sieht hieraus, dass die Bezeichnung des Zirkons als ein Polykrasilith" eine wohlberechtigte und zutreffende wäre.

Über die Chlorhydrine des Butenylglycerins.

Von **Heinrich Zikes.**

(Aus dem chemischen Universitäts-Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

Nachdem das Butenylglycerin von Lieben[1] und Zeisel bei Condensationsversuchen der Aldehyde erhalten wurde, unternahm ich es über Anrathen des Herrn Prof. Lieben, einige Chlorhydrine dieser Verbindung darzustellen und zu untersuchen.

Die Bereitungsweise des Butenylglycerins geschah übereinstimmend mit den Angaben obiger Arbeit, indem Acetaldehyd durch Condensation in Crotonaldehyd, dieser durch Reduction in das Gemenge von Butyl- und Crotonylalkohol überführt wurde.

Aus Letzterem erhielt ich durch Bromaddition und nachherige Zersetzung mit Wasser Butenylglycerin. Als ich dieses rein erhalten hatte, ging ich an die Untersuchung seiner Chlorhydrine.

Butenylmonochlorhydrin. Die Darstellung dieses Körpers führte ich mit kleinen Abänderungen so durch, wie sie Berthelot[2] für Monochlorhydrin des gewöhnlichen Glycerins angibt.

In eine an der einen Seite zugeschmolzene Glasröhre wurden ungefähr 5 Grm. Butenylglycerin gebracht und in dieses Salzsäuregas mit der Vorsicht geleitet, dass die unabsorbirt gebliebene Gasmenge durch ein Chlorcalciumrohr geführt wurde.

Schon nach kurzem Einleiten färbte sich die auf 100° erwärmte Flüssigkeit zusehends dunkler und nach ungefähr 6 bis 8 Stunden war sie mit Chlorwasserstoff gesättigt; hierauf wurde das Rohr zugeschmolzen und durch 36 Stunden im Thermostaten auf 100° erhitzt.

---

[1] Monatshefte für Chemie 1880, p. 818.

[2] Ann. chim. phys. [3] 41, p. 296; Ann. chem. pharm. 88, S. 311; 92, S. 302.

Als nach Wiederholung dieser Operationen die bedeutend dünnflüssiger gewordene Substanz mit destillirtem Wasser aus dem Rohre in einen Kolben überleert worden war, wurde sie mit kohlensaurem Baryt neutralisirt, dann filtrirt und sogleich mit Äther ausgeschüttelt, wodurch Butenylmonochlorhydrin von dem unzersetzt gebliebenen Butenylglycerin, welches in einer später zu schildernden Weise wieder regenerirt wurde, getrennt werden konnte.

Der Äther wurde über dem Wasserbade abgedunstet, der Rückstand im Vacuum vollständig getrocknet und destillirt.

Bei dieser Destillation, die unter 30 Mm. Druck erfolgte, ging ich Fractionen zwischen 100° und 140° auf.

Das letzte Destillat erwies sich als Hauptfraction und ging ein grosser Theil der ersten drei Fractionen nach öfterer Fractionirung diese über, wobei am Schlusse (bei 5 Grm. Butenylglycerin) Fraction 100—114 : 0·42 Grm.; 114—118 : 0·83 Grm.; 118—135 : 0·57 Grm.; 135—140 : 2·2 Grm. wog.

Die Analyse der Hauptfraction ergab folgende Zahlen:

I. Analyse 0·2119 Grm. Substanz lieferte 0·2992 CO_2 und 0·1376 H_2O.

Analyse 0·1860 Grm. Substanz lieferte 0·2632 CO_2 und 0·1202 H_2O.

Analyse 0·1746 Grm. Substanz lieferte 0·2013 AgCl.

Analyse 0·1513 Grm. Substanz lieferte 0·1722 Ag. Cl.

Daher in 100 Theilen:

	I.	II.	III.	IV.	für Monochlorhydrin $C_4H_9O_2Cl$ berechnet:
.....	38·51	38·60	—	—	38·56
.....	7·22	7·18	—	—	7·23
.....	—	—	—	—	25·7
.....	—	—	28·46	28·15	28·51

Die durch die Analyse gefundenen Zahlen stimmen daher gut, die die Theorie für $C_4H_9O_2Cl$ verlangt, ganz gut und ich diese Fraction als einen Körper von der mitgetheilten

Die Fraction 100—114° enthielt 34·7%, die nächste 31·5%, die Hauptfraction vorausgehende 29·8% Chlor.

Wie man aus diesen Zahlen sieht, weichen die Chlorgehalte nicht viel von einander ab; zieht man andererseits den grossen Unterschied in der Siedetemperatur in Betracht, so ist es sehr wahrscheinlich, dass neben etwas Butenyldichlorhydrin namentlich in der tiefstsiedenden Fraction mehrere isomere Butenylmonochlorhydrine bei der Darstellung entstanden sind. In Folge allzu geringer Substanzmenge war es mir jedoch nicht möglich, die Fractionirung fortzusetzen, so dass ich mich auf die weitere Untersuchung der Fraction 135—140° beschränken musste.

Für diese fand ich bei 28 Mm. Druck den Siedepunkt 134—136° (corr.) und das specifische Gewicht bei 17°, bezogen auf Wasser von derselben Temperatur = 1·2324.

Sie stellt eine ölige farblose Flüssigkeit von süsslichem Geschmacke, angenehm aromatischem Geruche dar, die in Wasser löslich und mit Alkohol und Äther mischbar ist.

Die Regenerirung des Butenylglycerins aus der bei Darstellung des Butenylmonochlorhydrins erwähnten, mit Äther ausgeschüttelten Flüssigkeit geschah in der Weise, dass die wässerige Lösung auf dem Wasserbade bis zur Syrupconsistenz eingedampft, hierauf unter öfterem Zusatz von Alkohol und Filtriren das Chlorbarium entfernt, der Alkohol durch zeitweises Hinzufügen von Wasser und Abdampfen gleichfalls vertrieben, endlich der syrupdicke Rückstand unter der Luftpumpe getrocknet wurde.

Der Rückstand zeigte die Consistenz des Butenylglycerins und konnte zu einer neuen Verarbeitung Verwendung finden, obgleich er noch immer etwas Chlorbarium enthielt.

Butenylepichlorhydrin. Es existiren zur Darstellung des gewöhnlichen Dichlorhydrins, aus dem durch Einwirkung von Alkalien Epichlorhydrin erhalten wird, hauptsächlich zwei Methoden.

Die eine von Reboul[1] stellt Dichlorhydrin durch Einleiten von Chlorwasserstoff in ein Gemenge gleicher Volumtheile Glycerin und Eisessig dar, die andere von Carius[2] respective Claus und Nahmacher[3] sucht diese Verbindung durch Einwirkung von Chlorschwefel auf Glycerin zu erhalten.

[1] Ann. chim. phys. [3] 60; Jahresberichte 1860, S. 456.

[2] Carius, Ann. chem. pharm. 124, S. 222.

[3] Deutsch-chem. Gesellsch. 1872, S. 353; Ann. chem. pharm. 168, S. 42.

Ich entschied mich bei der Rohdarstellung von Butenyldichlorhydrin, von dem aus ich zu Butenylepichlorhydrin gelangen wollte, für die erste Methode, da mich bei dem Verfahren von Carius die beträchtliche Menge schwefelhältiger Nebenproducte, wie ich sie während der Untersuchung des gewöhnlichen Dichlorhydrins erhalten hatte, abhielt, diese Methode, obwohl sie die kürzere ist, bei Butenylglycerin anzuwenden.

Bei der Darstellung verfuhr ich folgendermassen: In einen Kolben wurden Butenylglycerin und Eisessig zu gleichen Volumtheilen gebracht, das Gemenge durchgeschüttelt und Salzsäuregas in die auf dem Wasserbade erhitzte Lösung geleitet. Als die Absorption vollendet war, was in der Regel bei ungefähr 15 bis 16 Grm. nach zehnstündigem Einleiten erfolgte, wurde der Inhalt des Kolbens im Vacuum destillirt und bei 26 Mm. Druck Fractionen von 30 bis über 126° aufgefangen, wobei die Fraktionen von 30 bis 100° lediglich Eisessig enthielten.

Von den höher siedenden Destillaten (bei 17·7 Grm. Butenylglycerin) betrug die Fraction 100—118° = 7·7 Grm.; 118—126° = 14·75 Grm.; über 126° = 1·22 Grm.

Als ich nun versuchte, aus diesen Destillaten Butenylepichlorhydrin darzustellen, zeigte sich, dass Fraction 118—126°, obwohl weitaus das Hauptproduct der Einwirkung war und doch zum vierten Theile Butenyldichlorhydrin sein sollte, fast gar keine Ausbeute an Butenylepichlorhydrin ergab, während die nächste eine ganz gute Ausbeute lieferte.

Als ich mich hierauf durch eine Chlor- und Essigsäurebestimmung von der Zusammensetzung der Hauptfraction überzeugen wollte, fand ich Zahlen, die für ein Gemenge von Acetoacetomonochlorhydrin sprechen.

Die Bestimmung wurde in der Weise durchgeführt, dass 0·2 Grm. der Substanz mit 80 Cc. Bariumhydroxydlösung (Titre 0·01633) in einem Silberkolben durch Kochen am Rückflusskühler verseift und das überschüssige Bariumhydroxyd mit Essigsäure (vom Titre 0·0127) zurücktitrirt wurde.

Um die Menge des etwa an der Kolbenwandung anhaftenden Bariumcarbonats, die sonst für die Bestimmung verloren gegangen wäre, zu erfahren, wurde der Kolben mit 20 Cc. Salzsäure (vom Titre 0·0365) ausgespült und diese mit Ammoniak (vom Titre

0·0185) zurücktitrirt. Es wurde 45·6 Cc. Salpetersäure und 17·9 Cc. Ammoniak verbraucht.

In der mit Salpetersäure neutralisirten Lösung machte ich die Chlorbestimmung.

Die Analyse ergab für die Menge des Chlorsilbers = 0·4347 Grm.

Aus diesen Daten berechnen sich 25·92% Chlor und 36·98% Essigsäure.

Durch die schlechte Ausbeute an Butenyldichlorhydrin veranlasst, versuchte ich zu erfahren, ob nicht die Temperatur während der Erwärmung für dessen Darstellung von Belang sei.

Zu diesem Behufe brachte ich die Fraction 118—126° mit einem gleichen Volumen Eisessig in einen Kolben, setzte einen Rückflusskühler auf, und erwärmte diesmal während des Einleitens von Chlorwasserstoff über freiem Feuer; als ich hierauf den Inhalt im Vacuum destillirte, fand ich schon bei der ersten Destillation, dass fast Alles unter 118° überging.

Hiedurch sah ich meine obige Ansicht bestätigt und verwerthete diese Beobachtung bei den späteren Bereitungen.

Aus der Fraction 100—118° wurde Butenylepichlorhydrin dargestellt:

In ein tubulirtes, mit einem Kühlrohr verbundenes Retörtchen wurde die Substanz gebracht und der Tubus mittelst eines Korkes, durch den ein bis auf den Boden der Retorte reichendes Thermometer ging, verschlossen.

Es wurde gelinde im Ölbade erwärmt und successive Ätznatron, und zwar etwas mehr als der berechneten Menge entspricht, also auf 8 Grm. Substanz 2·5 Grm. Ätznatron eingetragen, hierauf wurde stärker erhitzt, wobei die Destillation bei 110° begann und die Hauptmenge zwischen 120—130° überging.

In der Vorlage fanden sich zwei Schichten: eine ölige schwere und eine wässerige, leichtere Schichte, die von der ersteren abgehoben wurde.

Das Öl wurde mittelst frisch geschmolzenem Chlorcalcium getrocknet und dann bei gewöhnlichem Drucke fractionirt.

Hier fing ich Fractionen zwischen 122 bis über 140° auf. Schon nach dreimaliger Fractionirung ging fast Alles zwischen 125—128° über; die andern Fractionen waren sehr klein; über

140° verblieb im Verhältniss zur Hauptmenge ein beträchtlicher Rückstand.

Die Ausbeute war überhaupt keine besonders gute, indem sich auch hier, ähnlich wie bei der Darstellung von gewöhnlichem Epichlorhydrin, über die Hälfte des Butenyldichlorhydrins in Butenylglycerin verwandelte. Um dieses Butenylglycerin aus dem Retortenrückstande zu erhalten, wurde derselbe zunächst in einem ziemlich geräumigen Kolben mit der zwanzigfachen Menge Wasser durch längere Zeit erhitzt, bis die letzten Spuren von öligen Chloriden zersetzt waren.

Nachdem der Kolbeninhalt in eine Glasschale überleert, hier das Wasser abgedampft und durch öftern Zusatz von fast absolutem Alkohol und Filtriren das Chlornatrium beinahe vollständig entfernt worden war, wurde der Alkohol durch Kochen mit Wasser vertrieben, der Rückstand unter der Pumpe getrocknet. In dieser Form konnte er zu einer Neuverarbeitung Verwendung finden.

Die Analyse der Epichlorhydrin-Hauptfraction ergab:

I. Analyse 0·1892 Grm. Substanz gaben 0·3116 Grm. CO_2 und 0·1119 Grm. H_2O.

II. Analyse 0·2512 Grm. Substanz gaben 0·4117 Grm. CO_2 und 0·1476 Grm. H_2O.

III. Analyse 0·244 Grm. Substanz gaben 0·3278 Grm. AgCl.

IV. Analyse 0·184 Grm. Substanz gaben 0·2442 Grm. AgCl.

Dies entspricht:

	I.	II.	III.	IV.	für C_4H_7OCl berechnet:
C	44·86	44·71	—	—	45·07
H	6·56	6·53	—	—	6·58
O	—	—	—	—	15·02
Cl	—	—	33·23	32·82	33·33

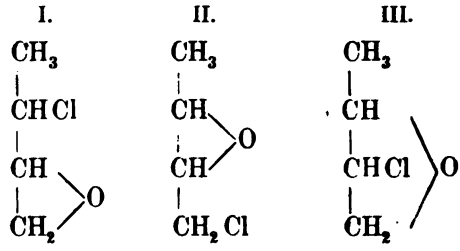
Diese Zahlen stimmen hinreichend mit den berechneten Werthen überein, so dass man diesen Körper als reines Epichlorhydrin betrachten kann.

Den Siedepunkt fand ich bei 125·5 (corr.) (herausragender Faden = 116°; unc. Thermometerstand = 123°; auf 0° red. Barometerstand = 738 Mm.).

Das specifische Gewicht bei 15° bezogen auf Wasser von derselben Temperatur betrug = 1·098.

Es war mir in Folge zu geringer Substanzmenge unmöglich, Versuche zur Aufhellung der Constitution des Butenylepichlorhydrins auszuführen.

Dieselbe muss einer der folgenden drei Formeln entsprechen:



von welchen ich Nr. II mit Rücksicht auf den Siedepunkt für die wahrscheinlichste halte.

Butenyldichlorhydrin. Das Dichlorhydrin des bekannten Glycerins wird dargestellt, indem Epichlorhydrin mit rauchender Salzsäure[1] versetzt oder Salzsäuregas in kühlgehaltenes Epichlorhydrin geleitet wird.

Die zweite Methode ist die einfachere, da man nur trockene Luft durch das erhaltene Gemenge zu leiten braucht, um einen zur fractionirten Destillation geeigneten Körper zu erhalten.

Zur Darstellung des Butenyldichlorhydrins wurde daher die letztere angewendet.

In einen früher gewogenen Peligot'schen Apparat wurden 2·6415 Grm. Epichlorhydrin gebracht, dieser mit einem kleinen gewogenen Schutzröhrchen verbunden und sehr langsam trockenes Salzsäuregas durch die in Eis gekühlten Apparate geleitet.

Die Absorption war ziemlich energisch und wurde bis zur Gewichtsconstanz fortgesetzt.

Die Zunahme betrug nach dem Durchleiten von Luft 0·8786, statt 0·9053. Das erhaltene Product wurde in einen Kolben überleert und im Vacuum destillirt, wo bei Weitem der grösste Theil zwischen 104—107° bei 30 Mm. Druck überging. Ein sehr geringer Rückstand verblieb im Kolben.

---

[1] Ann. chim. phys. [3] 60, p. 1 ff.; Jahresberichte 1860, S. 458.

Die Analyse ergab:

I. Analyse 0·2352 Grm. Substanz lieferten 0·291 Grm. CO_2 und 0·12 Grm. H_2O.

II. Analyse 0·2236 Grm. Substanz lieferten 0·2742 Grm. CO_2 und 0·1139 H_2O.

III. Analyse 0·1706 Grm. Substanz lieferten 0·3417 Grm. AgCl.

IV. Analyse 0·1946 Grm. Substanz lieferten 0·3892 Grm. AgCl.

Daher in 100 Theilen:

	I.	II.	III.	IV.	für $C_4H_8OCl_2$ berechnet:
C	33·71	33·45	—	—	33·57
H	5·65	5·65	—	—	5·59
O	—	—	—	—	11·19
Cl	—	—	49·53	49·49	49·65

Die gefundenen Zahlenwerthe stimmen mit denen, die sich für das gesuchte Dichlorhydrin berechnen, und kann der erhaltene Körper der Formel $C_4H_8OCl_2$ entsprechend zusammengesetzt betrachtet werden.

Den Siedepunkt fand ich bei 30 Mm. Druck zwischen 105 bis 107°, als Werth für das specifische Gewicht bei 16°, bezogen auf Wasser von gleicher Temperatur = 1·274.

Das so erhaltene Dichlorhydrin stellt eine ölige farblose Flüssigkeit von eigenthümlich aromatischem Geruche dar, die sich ziemlich schwer in Wasser, in Alkohol und Äther aber in allen Verhältnissen löst.

Schliesslich sei es mir gestattet, in Erfüllung einer angenehmen Pflicht dem Herrn Prof. Lieben, meinem hochverehrten Lehrer, für die förderlichen Rathschläge, die er mir während der Ausführung dieser Arbeit in der liebenswürdigsten Weise hat zu Theil werden lassen, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Über künstliche Harnsäure und Methylharnsäure.

Von Dr. **J. Horbaczewski,**
Professor der medic. Chemie an der böhm. Universität in Prag.

Im 86. Bande dieser Berichte (II. Abth., Nov.-Heft) machte ich die Mittheilung, dass es mir gelungen ist, durch Erhitzen von Glycocoll mit Harnstoff die Harnsäure künstlich zu erhalten. Bald darauf wurde ich durch verschiedene äussere Umstände (ich übersiedelte nach Prag und musste hier erst ein Laboratorium einrichten) verhindert, die Arbeit fortzusetzen und konnte dieselbe erst vor Kurzem wieder aufnehmen. Zum Theile noch im Laboratorium des Herrn Prof. E. v. Ludwig in Wien, zum Theile schon im hiesigen Laboratorium, habe ich auch andere Reactionen kennen gelernt, nach welchen man die Harnsäure künstlich darstellen kann. Über dieselben werde ich bald eine Mittheilung veröffentlichen, und will jetzt nur noch Einiges über die oben erwähnte Reaction: der künstlichen Darstellung der Harnsäure aus Glycocoll und Harnstoff und über eine analoge Reaction der künstlichen Darstellung der Methylharnsäure berichten.

I. Harnsäure.

Am einfachsten erhält man Harnsäure aus Glycocoll und Harnstoff, indem man das Gemisch beider Körper in einer Eprouvette an einer kleinen Flamme des Bunsen'schen Brenners vorsichtig in der Weise erhitzt, dass man die Eprouvette, oberhalb der Flamme hin- und herdrehend, schief hält und dafür Sorge trägt, dass ununterbrochen eine reichliche Gas-Ammoniakentwickelung aus der Schmelzmasse stattfindet und andererseits, dass man die Schmelze nicht übermässig erhitzt. Die ursprünglich klare und farblose Schmelze färbt sich allmälig gelblich und trübt sich. Man erhitzt dann ganz vorsichtig noch so lange, bis

die Masse (während man erhitzt) entweder ganz fest wird, dabei aber nicht anbrennt, oder wenigstens bis sich eine reichliche Menge eines Niederschlages gebildet hat. Damit ist die Operation beendet.

Es ist zweckmässig, die Reaction nur mit kleinen Mengen (0·1 Gr. bis 0·2 Gr.) von Glycocoll auf einmal vorzunehmen. In diesem Falle dauert die ganze Operation nur wenige Augenblicke und ist die Reactionsmasse nach dem Erkalten nur schwach gelblich gefärbt — während beim Verwenden grösserer Mengen von Glycocoll auf einmal stark braun gefärbte Schmelzen erhalten werden.

Was die Harnstoffmenge anbelangt, die bei der Reaction verwendet werden muss, so ist es nothwendig, einen grösseren Überschuss von Harnstoff zu nehmen. Wenn man nämlich Glycocoll und Harnstoff in dem Mengenverhältnisse ihrer Moleculargewichte zusammenschmilzt, so erhält man keine Harnsäure, auch erhält man keine Harnsäure, wenn man auf ein Moleculargewicht Glycocoll zwei Moleculargewichte Harnstoff nimmt. Erst bei Verwendung von drei Moleculargewichten Harnstoff auf ein Moleculargewicht Glycocoll erhält man Harnsäure. Jedoch ist in diesem letzteren Falle die Harnsäure nur sehr schwer zu isoliren und zu reinigen, weil die erhaltene Schmelze sehr stark braun gefärbt ist. Je mehr man Harnstoff nimmt, desto besser verläuft die Reaction, und desto farblosere Schmelzen erhält man. Es ist daher zweckmässig, das Glycocoll mit der 7- bis 15fachen Menge von Harnstoff zu vermischen und in oben angegebener Weise zusammenzuschmelzen.

Ist die Reaction gut ausgeführt, so erhält man mit einem Bröckchen der Schmelze die Murexidreaction — zwar nicht so schön, wie mit reiner Harnsäure, aber doch ganz deutlich. Ist die Reaction nicht ganz tadellos ausgefallen, dann erhält man mit der Schmelze direct keine Murexidreaction.

Was die Ausbeute an Harnsäure anbelangt, so ist dieselbe, wenn man die Reaction auch in der beschriebenen Weise ganz tadellos ausführt, ziemlich schlecht. Es wurden bei verschiedenen Versuchen aus 1 Grm. Glycocoll und der entsprechenden Harnstoffmenge 50—150 Mlgr. rohe Harnsäure erhalten. Der Grund dieser unbefriedigenden Ausbeute, scheint darin zu liegen,

dass die Reaction erst bei sehr hoher Temperatur verläuft, bei welcher sich die Harnsäure theilweise zersetzen dürfte.

Das früher mitgetheilte Verfahren der Abscheidung und Reinigung der Harnsäure aus den Schmelzmassen hat sich bisher noch als das beste erwiesen. Dasselbe beruht darauf, dass die Schmelze in Lauge gelöst, mit Salmiak und Ammoniak übersättigt und dann mit einem Gemisch von ammoniakalischer Silberlösung und Magnesiamixtur gefällt wird. Der erhaltene Niederschlag wird abfiltrirt, mit ammoniakalischem Wasser gut ausgewaschen, vom Filter heruntergenommen und mit Schwefelkaliumlösung in der Wärme behandelt. Vom Schwefelsilber wird abfiltrirt, das Filtrat mit Salzsäure angesäuert und auf ein kleines Volum eingedampft, worauf Harnsäure auskrystallisirt. Die Darstellung einer vollkommen reinen und farblosen Harnsäure ist aber doch mit ziemlich grossen Schwierigkeiten und Verlusten verbunden, weil die gefärbten Körper, die sich bei der Reaction bilden, der Harnsäure sehr hartnäckig anhaften und mit derselben fortwährend gefällt und gelöst werden. Man kommt nur auf die Weise zum Ziele, dass man die erwähnte Operation der Lösung und Fällung so oft wiederholt bis man ein reines Product erhält, wobei die mit Salmiak übersättigte Lösung der Harnsäure immer stark mit Ammoniak zu übersättigen ist. Die anderen üblichen Reinigungsmethoden der Harnsäure, als: Lösen in concentrirter Schwefelsäure und Fällen mit Wasser, Darstellung des saueren Alkalisalzes können auch nebenbei angewendet werden — besondere Erfolge konnte ich aber dabei nicht verzeichnen. Es sei noch schliesslich bemerkt, dass die saueren Mutterlaugen nach der Ausfällung der Harnsäure aus alkalischer Lösung mit Salzsäure — so lange die Harnsäure noch stark unrein ist — immer noch ziemlich viel Harnsäure in Lösung enthalten und daher, um Verluste zu vermeiden, bei den ersten Fällungen am besten sammt dem Niederschlage zu verarbeiten sind. Je reiner dann die Harnsäure wird, desto weniger löst sie sich im Wasser, respective in saurer Flüssigkeit und desto weniger Harnsäure enthalten dann die saueren Mutterlaugen.

Die Elementaranalyse der erhaltenen künstlichen Harnsäure, welche in der erwähnten Mittheilung angegeben ist, weist zufällig als Wasserstoffgehalt eine viel höhere Zahl auf, als dem

theoretischen Werthe entspricht. Ich habe daher eine reine Substanz noch einmal der Analyse unterzogen und erhielt dabei nachfolgende Werthe, die der Zusammensetzung der Harnsäure entsprechen. 0·1642 Grm. bei 105° C. getrockneter Substanz gaben 0·0391 Grm. Wasser entsprechend 0·00434 Grm. Wasserstoff und 0·2136 Grm. Kohlensäure, entsprechend 0·0583 Grm. Kohlenstoff = 2·64 Procent Wasserstoff und 35·52 Procent Kohlenstoff.

	Gefunden	Berechnet
H.....	2·64 Perc.	2·38 Perc.
C.....	35·52 „	35·72 „

II. Methylharnsäure.

Es war von vorneher zu erwarten, dass, wenn man bei der oben beschriebenen Reaction anstatt Glycocoll ein substituirtes Glycocoll anwenden würde, statt Harnsäure sich eine substituirte Harnsäure bilden dürfte. Ein solcher Versuch wurde mit Sarcosin ausgeführt und bestätigte diese Vermuthung. Wenn man nämlich Sarcosin in kleinen Partien (0·1—0·2 Grm.) mit der 5 bis 10fachen Menge von Harnstoff in der bei der Harnsäure beschriebenen Weise zusammenschmilzt und so lange vorsichtig erwärmt bis die Schmelzmasse schon beim Erhitzen fest wird — was im vorliegenden Falle immer zu erreichen ist — so enthält die Schmelze Methylharnsäure. Dieselbe kann in der Schmelze direct durch die Murexidprobe nachgewiesen werden und zwar gibt ein Körnchen der Methylharnsäureschmelze gewöhnlich eine viel stärkere Reaction, als die Harnsäureschmelze — ja bei gut gelungenen Versuchen ist die Reaction sehr intensiv.

Aus der Schmelze wurde die Methylharnsäure ganz in derselben Weise wie Harnsäure isolirt. Die Reinigung dieser Verbindung ist bei weitem leichter als die der Harnsäure und bereitet gar keine Schwierigkeiten. Die Lösungen der Methylharnsäure werden nämlich so wie die Lösungen der Harnsäure mit einem Gemisch von ammoniakalischer Silberlösung und Magnesiamixtur in Form eines sehr voluminösen, gelatinösen Niederschlags quantitativ gefällt. Zerlegt man dann den abfiltrirten und mit ammoniakalischem Wasser ausgewaschenen Niederschlag mit

einer Auflösung von Schwefelkalium oder Schwefelnatrium in der Wärme, so scheidet sich Schwefelsilber aus und Methylharnsäure geht in Lösung. Diese Lösung wird dann mit Salzsäure angesäuert und im Wasserbade auf ein kleines Volumen gebracht. Nach dem Erkalten krystallisirt Methylharnsäure aus.

Die Schmelzen der Methylharnsäure sind gewöhnlich fast farblos oder nur ganz schwach gelblich gefärbt — geben aber nach dem Auflösen in Lauge ziemlich stark gelb gefärbte Lösungen. Wenn man dann diese Lösungen mit Salmiak übersättigt, und nach Zusatz reichlicher Menge von Ammoniak mit ammoniakalischer Silberlösung und Magnesiamixtur fällt, so bleibt fast der ganze Farbstoff in Lösung und man erhält nach dem Zerlegen der Silbermagnesia-Verbindung mit Schwefelalkali und Eindampfen der angesäuerten Lösung gleich ganz farblose Krystalle von Methylharnsäure. Dieselben sind aber meistens bei der ersten Fällung noch mit etwas Cyanursäure vermischt. Um diese letztere vollständig zu entfernen, löst man die Krystalle noch einmal in Lauge und wiederholt noch einmal die Fällung mit ammoniakalischer Silberlösung und Magnesiamixtur und die Zerlegung des erhaltenen Niederschlags. Das jetzt erhaltene Product ist, wenn man es einmal aus heissem Wasser umkrystallisirt, mit Alkohol, Äther und Schwefelkohlenstoff auswäscht, ganz farblos und vollkommen rein.

Diese so erhaltene Methylharnsäure zeigte folgende Eigenschaften:

1. Sie krystallisirte in mikroskopischen, ziemlich grossen, schwach perlmutterglänzenden Nadeln oder dünnen rhombischen Plättchen — meistens zu Rosetten vereinigt.

2. Sie löste sich leicht in Lauge und in kochendem Wasser. Aus alkalischer Lösung fiel sie nach dem Ansäuern, aus heisser, wässeriger Lösung nach dem Erkalten wieder in Krystallen aus. In kaltem Wasser, verdünnten Säuren, Alkohol, Äther war sie sehr schwer löslich.

3. Sie gab Murexidreaction wie die gewöhnliche Harnsäure.

4. Mit bei 0° gesättigter Salzsäure im zugeschmolzenen Rohre auf 170° durch einige Stunden erhitzt, löste sie sich voll-

ständig so wie die Methylharnsäure von Hill. Diese Lösung wurde mit Bleihydrat destillirt und das Destillat in Salzsäure aufgefangen. Die zur Trockne eingedampfte Lösung aus der Vorlage wurde mit Alkohol behandelt und die alkoholische Lösung abermals zur Trockne gebracht. Der Rückstand gab beim Behandeln mit alkoholischem Kali und Chloroform in der Wärme die Hoffmann'sche Isonitrilreaction.

5. Bei der Elementaranalyse der bei 150° C. getrockneten Substanz wurden folgende Werthe erhalten:

1. 0·0876 Grm. Substanz gaben 23·3 Ccm. Stickstoff, gemessen bei 15° C. und 753 Mm. Barometerstand, entsprechend 0·02684 Grm. Stickstoff = 30·86 Perc.

2. 0·1672 Grm. Substanz gaben 0·0549 Grm. Wasser, entsprechend 0·0061 Grm. Wasserstoff = 3·64 Perc. und 0·2416 Grm. Kohlensäure, entsprechend 0·0659 Grm. Kohlenstoff = 39·42 Perc.

3. 0·1301 Grm. Substanz gaben 0·0413 Grm. Wasser, entsprechend 0·0046 Grm. Wasserstoff = 3·52 Perc. und 0·1885 Grm. Kohlensäure, entsprechend 0·0513 Grm. Kohlenstoff = 39·45 Perc.

Berechnet	Gefunden		
	I.	II.	III.
C....39·56	—	39·42	39·45
H.... 3·30	—	3·64	3·52
N....30·77	30·86	—	—

Diese Zahlen stimmen mit der procentischen Zusammensetzung der Methylharnsäure gut überein.

Vergleicht man die oben angeführten Eigenschaften dieser künstlichen Methylharnsäure mit denen der von Hill aus harnsaurem Blei und Jodmethyl erhaltenen Methylharnsäure, so findet man eine vollständige Übereinstimmung. Auch die Krystalle beider Verbindungen sind einander ähnlich, wie ich mich durch Vergleichen beider Präparate überzeugen konnte. Es wäre daher möglich, dass beide Verbindungen identisch sind — so lange aber die weiteren Zersetzungsproducte der neuen Verbindung noch nicht genauer studirt sind, kann man das mit Bestimmtheit nicht behaupten.

Was die Ausbeute der künstlichen Methylharnsäure bei der oben beschriebenen Bereitung anbelangt, so ist diese ähnlich wie bei der künstlichen Harnsäure nicht besonders günstig und man erhält hier ungefähr so viel Methylharnsäure wie dort Harnsäure, nämlich 50—150 Mlgrm. aus 1 Grm. Sarcosin und der entsprechenden Menge von Harnstoff. Beim Zusammenschmelzen von Sarcosin mit nur der doppelten Menge von Harnstoff (1 Mol. : 3 Mol.) scheint die Ausbeute etwas besser zu sein, aber die erhaltene Schmelzmasse ist in diesem Falle braun gefärbt und die Reinigung der Methylharnsäure schwieriger. In Folge dessen ist es zweckmässiger doch mehr Harnstoff zu verwenden, weil man gleich ein reines Product erhält.

Beide Reactionen: die künstliche Darstellung der Harnsäure und Methylharnsäure sind in der oben beschriebenen Weise sehr leicht auszuführen und gelingen auch immer bei nur einiger Vorsicht, so dass sie beide, namentlich aber die zweite als Vorlesungsversuche dienen können.

Über die ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

In den folgenden Zeilen sollen einige Sätze abgeleitet werden, welche sich auf die aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen beziehen.

Es werde der Inbegriff aller primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$, deren Normen m nicht überschreiten, mit (m) die Anzahl der Individuen des Zahlencomplexes (m) mit $\mathfrak{A}(m)$ bezeichnet.

Setzt man nun:

1.) $$\sum_{x=(m)} f(x) = F(m)$$

so kommt in der Summe:

$$\sum_{x=(n)} F\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

wo $N(\alpha)$ die Norm der complexen Zahl α bedeutet, die Grösse $f(z)$ offenbar in allen Gliedern vor, welche entstehen, wenn x alle Zahlen des Gebietes $\left(\frac{n}{N(z)}\right)$ durchläuft und daher tritt sie in der genannten Summe $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(z)}\right)$-mal auf.

Man hat daher die Gleichung:

2.) $$\sum_{x=(n)} F\left(\frac{n}{N(x)}\right) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) f(x).$$

Es sei nun speciell:

$$f(x) = N(x)^k$$

alsdann wird:

$$\sum_{x=(n)'} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) f(x) = \sum_{x,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right) N(x)^k$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_d N(d)^k\right)$$

wo d alle primären Divisoren der ganzen complexen Zahl x zu durchlaufen hat und die zahlentheoretische Function $\varepsilon(\alpha)$, wie in meinen früheren Arbeiten, den Werth 0 oder 1 besitzt, je nachdem die Norm von α kleiner als 1 ist, oder nicht.

Wird mit $\psi_k(x)$ die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen der primären Divisoren der ganzen complexen Zahl x bezeichnet, so kann man die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)^k = \sum_{x=(n)} \psi_k(x)$$

und daher hat man auch nach 2):

3.) $$\sum_{x=(n)} \psi_k(x) = \sum_{x=(n)} S'_k\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

wo:

$$S'_k(m) = \sum_{x=(m)} N(x)^k$$

ist.

Berücksichtigt man, dass die vierfache Anzahl jener Individuen des Zahlencomplexes (m), deren Norm den Werth β besitzt, gleich der Anzahl der Darstellungen der reellen Zahl β durch die binäre quadratische Form $(1, 0, 1)$ also gleich:

$$4\sum_{d'} (-1)^{\frac{d'-1}{2}}$$

ist, wo d' alle ungeraden Divisoren von β zu durchlaufen hat, so erhält man:

$$\sum_{x=(m)} N(x)^k = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} \beta^k \left(\sum_{d'} (-1)^{\frac{d'-1}{2}} \right)$$

oder, weil unter den ganzen Zahlen von 1 bis m nur die Zahlen:

$$(2x-1),\ 2(2x-1),\ 3(2x-1),\ \ldots,\ \left[\frac{m}{2x-1}\right](2x-1)$$

den ungeraden Divisor $2x-1$ besitzen:

$$\sum_{x=(m)} N(x)^k =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}(2x-1)^k \left\{ 1^k+2^k+3^k+\ldots+\left[\frac{m}{2x-1}\right]^k \right\}.$$

Nun ist aber:

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+r^k =$$

$$= \frac{r^{k+1}}{k+1} + \frac{r^k}{2} + \binom{k}{2}\frac{B_1}{k-1} r^{k-1} - \binom{k}{4}\frac{B_2}{k-3} r^{k-3} + \binom{k}{6}\frac{B_3}{k-5} r^{k-5} - \ldots$$

wo B_λ die λ^{te} Bernoulli'sche Zahl ist, und daher hat man:

$$\sum_{x=(m)} N(x)^k = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}(2x-1)^k \left\{ \frac{1}{k+1}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k+1} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^k + \binom{k}{2}\frac{B_1}{k-1}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-1} - \binom{k}{4}\frac{B_2}{k-3}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-3} +$$

$$\left. + \binom{k}{6}\frac{B_3}{k-5}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-5} - \ldots \right\}.$$

Beachtet man, dass:

$$\left[\frac{m}{2x-1}\right] = \frac{m}{2x-1} - \varepsilon_x \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{x-1}}{2x-1} = \frac{\pi}{4}$$

ist, so kann man diese Gleichung auch in folgender Gestalt schreiben:

4.) $$\sum_{x=(m)} N(x)^k = \frac{\pi m^{k+1}}{4(k+1)} - \Delta_1$$

wo, wie eine genauere Untersuchung zeigt:

5.) $$|\Delta_1| < A m^{k+\frac{1}{2}}$$

ist und A für alle Werthe von m kleiner bleibt, als eine angebbare endliche Grösse A_0.

Die Gleichung 3) verwandelt sich daher in:

6.) $$\sum_{x=(n)} \psi_k(x) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)} \sum_{x=(n)} \frac{1}{N(x)^{k+1}} + n^{k+\frac{1}{2}} \sum_{x=(n)} \frac{A_x}{N(x)^{k+\frac{1}{2}}}$$

$$(|A_x| < A_0).$$

Nun ist aber, wie ich angegeben habe („Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen". Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 50. Band, I. Abtheilung):

7.) $$\sum_{x=(n)} \frac{1}{N(x)^s} = \zeta(s) L_s - \frac{\varepsilon \zeta(s)}{n^{s-1}} \{\zeta(s) + \log n\} \qquad (0 \leqq |\varepsilon| < 3)$$

wo:

$$\zeta(s) = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$L_s = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(2x-1)^s}$$

ist, und daher hat man:

8.) $$\sum_{x=(n)} \psi_k(x) = \frac{n\zeta(k+1) L_{k+1}}{4(k+1)} n^{k+1} - \Delta_2$$

wo:

$$\Delta_2 = \frac{\varepsilon \pi n \zeta(k+1)}{4(k+1)} \{\zeta(k+1) + \log n\} - n^{k+\frac{1}{2}} \sum_{x=(n)} \frac{A_x}{N(x)^{k+\frac{1}{2}}}$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

$$9.) \quad |\Delta_2| < \frac{3\pi\zeta(k+1)}{4(k+1)} \{\zeta(k+1)+\log n\} n + \\ + A_0 \zeta\left(k+\frac{1}{2}\right) L_{k+\frac{1}{2}} n^{k+\frac{1}{2}}.$$

Aus den Relationen 8) und 9) ergeben sich die Formeln:

$$10.) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \psi_k(x)}{n^{k+1}} = \frac{\pi\zeta(k+1)L_{k+1}}{4(k+1)}$$

$$11.) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \psi_{2k}(x)}{n^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+2}\zeta(2k+1)\tau_{2k}}{2^{2k+4}\Gamma(2k+2)}$$

$$12.) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \psi_{2k+1}(x)}{n^{2k+2}} = \frac{(2\pi)^{2k+3}B_{k+1}L_{2k+2}}{16(k+1)\Gamma(2k+3)}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die arithmetischen Theoreme:

Die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\zeta(k+1)L_{k+1}$-fache der k^{ten} Potenz der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der $(2k)^{\text{ten}}$ Potenzen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel $\frac{\pi^{+2k+1}\zeta(2k+1)\tau_{2k}}{2^{2k+2}\Gamma(2k+1)}$-mal so gross, als die $(2k)^{\text{te}}$ Potenz der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der $(2k+1)^{\text{ten}}$ Potenzen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel $\frac{(2\pi)^{2k+2}B_{k+1}L_{2k+2}}{2\Gamma(2k+3)}$-mal so gross, als die $(2k+1)^{\text{te}}$ Potenz der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\frac{\pi^2 L_2}{6}$-fache der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der Quadrate der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\frac{\pi^3\zeta(3)}{96}$-fache des Quadrates der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der Cuben der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\frac{\pi^4 L_4}{90}$-fache der dritten Potenz der Norm der Zahl.

Ist p_1 irgend eine (ein- oder zweigliedrige) Primzahl des Gebietes (n), so stellt die Differenz:

$$S'_k(n) - N(p_1)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1)}\right)$$

offenbar die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen jener Zahlen des Bereiches (n) vor, welche nicht durch p_1 theilbar sind. Ist p_2 eine zweite, dem Zahlencomplexe (n) angehörige Primzahl, so wird nach der eben gemachten Bemerkung die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen aller im Gebiete (n) befindlichen, weder durch p_1 noch durch p_2 theilbaren Zahlen durch den Ausdruck:

$$S'_k(n) - N(p_1)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1)}\right) - N(p_2)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_2)}\right) + \\ + N(p_1 p_2)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1 p_2)}\right)$$

angegeben, weil die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen aller nicht durch p_1 aber durch p_2 theilbaren Zahlen von (n):

$$S'_k\left(\frac{n}{N(p_2)}\right) - N(p_1 p_2)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1 p_2)}\right)$$

beträgt.

Aus den eben gemachten Bemerkungen folgt, dass die Summe der k^{ten} Potenzen der Normen aller zu x theilerfremden, dem Zahlencomplexe (n) angehörigen complexen Zahlen $\varphi_k(x, n)$ durch die Gleichung:

$$13.) \qquad \varphi_k(x, n) = \sum_d S'_k\left(\frac{n}{N(d)}\right) N(d)^k \mu(d)$$

gegeben wird, wo die Summation bezüglich d über alle Divisoren von x auszudehnen ist und die zahlentheoretische Function $\mu(\alpha)$

den Werth 0 hat, wenn α durch ein Quadrat theilbar ist, gleich $+1$ wird, wenn α eine complexe Einheit oder aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, endlich den Werth -1 in allen anderen Fällen besitzt.

Ist speciell $k=0$, so wird offenbar:

$$S_0(m) = \mathfrak{A}(m)$$

so dass man für die Anzahl $\varphi(x, n)$ aller zu x theilerfremden Zahlen des Complexes (n) folgende Gleichung hat:

14.) $$\varphi(x, n) = \sum_d \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(d)}\right)\mu(d).$$

Berücksichtigt man die Relation 4.), so kann man die Gleichung 13.) auch in folgender Weise schreiben:

15.) $$\varphi_k(x, n) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)}\sum_d \frac{\mu(d)}{N(d)} - n^{k+\frac{1}{2}}\sum_d \frac{A_d\,\mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}} \qquad (|A_d| < A_0)$$

wo die Summationen bezüglich d über alle primären Divisoren von x auszudehnen sind.

Nun bestehen, wie ich a. a. O. gezeigt habe, folgende Relationen:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} = \frac{1}{\zeta(s)L_s}$$

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\varphi(x)}{N(x)^s} = \frac{\zeta(s-1)L_{s-1}}{\zeta(s)L_s}$$

wo $\varphi(x)$ die Anzahl jener Glieder eines vollständigen Restsystems für den Modul x ist, welche mit x keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und daher ist:

$$\sum_{x,y=(\infty)} \frac{\mu(x)N(y)}{N(xy)^s} = \sum_{s=(\infty)} \frac{\varphi(x)}{N(x)^s}$$

aus welcher Gleichung sich die Formel:

16.) $$\sum_d \frac{\mu(d)}{N(d)} = \frac{\varphi(x)}{N(x)}$$

ergibt.

Die Gleichung 15.) verwandelt sich daher in:

$$17.) \qquad \varphi_k(x,n) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)} \frac{\varphi(x)}{N(x)} - n^{k+\frac{1}{2}} \sum_d \frac{A_d \mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}}$$

und speciell:

$$18.) \qquad \varphi(x,n) = \frac{\pi n}{4} \frac{\varphi(x)}{N(x)} - \sqrt{n} \sum_d \frac{A'_d \mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}}.$$

Es ist offenbar:

$$19.) \qquad \left| \sum_d \frac{A_d \mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}} \right| < A_0 \sum_{y=(x)} \frac{1}{N(y)^{\frac{1}{2}}}$$

$$< 2A_0 N(x)^{\frac{1}{4}}.$$

Multiplicirt man die Gleichung 13.) mit $\varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)$ und summirt bezüglich x über alle Zahlen des Gebietes (n), so erhält man:

$$20.) \quad \sum_{x=(n)} \varphi_k(x,n) = \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_d S'_k\left(\frac{n}{N(d)}\right) N(d)^k \mu(d)\right)$$

$$= \sum_{x,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right) S'_k\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)^k \mu(x)$$

$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) S'_k\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)^k \mu(x)$$

und speciell:

$$21.) \qquad \sum_{x=(n)} \varphi(x,n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)^2 \mu(x).$$

Berücksichtigt man die Formel 4.) und die bekannte Relation:

$$\mathfrak{A}(m) = \frac{\pi m}{4} + \varepsilon\sqrt{m} \qquad (0 \leqq |\varepsilon| < 1)$$

so verwandelt sich die Gleichung 20.) in:

$$22.) \qquad \sum_{x=(n)} \varphi_k(x,n) = \frac{3n^{k+2}}{8(k+1)L_2} - \Delta_3$$

wo, wie eine einfache Rechnung ergibt:

$$|\Delta_3| < B_0 n^{k+\frac{3}{2}}$$

ist.

Man hat also die Relationen:

23.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \varphi_k(x, n)}{n^{k+2}} = \frac{3}{8(k+1)L_2}$$

24.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \varphi(x, n)}{n^2} = \frac{3}{8L_2}.$$

Bezeichnet man mit $\overline{\varphi}_k(x)$ die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen jener Glieder eines vollständigen Restsystems für den Modul x, welche zu x theilerfremd sind, so ist, wie sich aus 17.) ergibt:

25.) $$\overline{\varphi}_k(x) = \frac{N(x)^k}{k+1} \varphi(x) + C_0 N(x)^{k+\frac{3}{4}}$$

wo C_0 eine für alle x endliche Grösse ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

26.) $$\sum_{x=(n)} \overline{\varphi}_k(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x) + D_0 n^{k+\frac{7}{4}}$$

wo D_0 für alle n eine endliche angebbare Grösse nicht überschreiten kann.

Nun ist:

$$\sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x) = \sum_{x=(n)} N(x)^{k+1} \left(\sum_d \frac{\mu(d)}{N(d)} \right)$$

$$= \sum_{x, y=(n)} N(xy)^{k+1} \frac{\mu(x)}{N(x)}$$

$$= \sum_{x=(n)} N(x)^k S'_{k+1}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu(x)$$

oder nach 4):

$$27.) \quad \sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x) = \frac{\pi n^{k+2}}{4(k+2)} \sum_{x=(n)} \frac{\mu(x)}{N(x)^2} - n^{k+\frac{3}{2}} \sum_{x=(n)} \frac{A_x \mu(x)}{N(x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3n^{k+2}}{2\pi L_2 (k+2)} - \Delta_4$$

wo:

$$|\Delta_4| < E n^{k+\frac{3}{2}}$$

ist und E für alle n endlich bleibt.

Die Gleichung 26.) verwandelt sich daher in:

$$28.) \quad \sum_{x=(n)} \bar{\varphi}_k(x) = \frac{3n^{k+2}}{2\pi L_2 (k+1)(k+2)} - \Delta_5$$

wo:

$$|\Delta_5| < F n^{k+\frac{7}{4}}$$

ist.

Aus den Gleichungen 27.) und 28.) folgen die Relationen:

$$29.) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x)}{n^{k+2}} = \frac{3}{2\pi L_2 (k+2)}$$

$$30.) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \varphi_k(x)}{n^{k+2}} = \frac{3}{2\pi L_2 (k+1)(k+2)}$$

$$31.) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \varphi(x)}{n^2} = \frac{3}{4\pi L_2} .$$

Die letzte Formel hat im Wesentlichen schon Herr F. Mertens aufgestellt.

Man hat daher das folgende arithmetische Theorem:

Die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen derjenigen Glieder eines vollständigen Restsystems in Bezug auf einen gegebenen Modul, welche zum Modul theilerfremd sind, ist im Mittel $\frac{3}{8(k+1)L_2}$-mal so gross, als die Norm der $(k+1)^{\text{ten}}$ Potenz des Moduls.

Schreibt man in der Gleichung:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) = \sum_{x=(n)} \psi_0'(x)$$
$$= \Psi'(n)$$

ür n: $\frac{n}{N(y)}$ multiplicirt mit $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y)$ und summirt bezüglich über alle Individuen des Zahlencomplexes (n), so erhält man:

$$\sum_{x,y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y) = \sum_{y=(n)} \Psi'\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y)$$

der:

$$\sum_{=(n)} \Psi'\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(d)}\right)\mu(d)\right)$$
$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varphi(x,n).$$

Nun ist aber, wie Herr F. Mertens gezeigt hat:

$$\Psi'(m) = \frac{\pi^2}{16} m \left\{\log m + 2C + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - 1\right\} + Gm^{\frac{3}{4}}$$

o G eine für alle m endliche Grösse und:

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{x-1}\log(2x+1)}{(2x+1)^s}$$

Die letzte Gleichung verwandelt sich daher in die folgende:

$$\sum_{(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varphi(x,n) = \frac{\pi^3 n^2}{64}\left\{\frac{6}{\pi^2 L_2}\left(\log n + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{36\mathfrak{F}}{\pi^4 L_2} - \frac{6\mathfrak{M}_2}{\pi^2 L_2^2}\right\} - \Delta_6$$

$$|\Delta_6| < Hn^{\frac{7}{4}}$$

$$\mathfrak{F} = \sum_{x=2}^{x=\infty} \frac{\log x}{x^2}$$

ist.

Es ist demnach:

32.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \varphi(x, n)}{n^2} =$$

$$= \frac{3\pi}{32 L_2} \left\{ \log n + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} + \frac{6\mathfrak{F}}{\pi^2} - \frac{\mathfrak{M}_2}{L_2} \right\}.$$

polaristrobometrische Methoden, insbesondere über Halbschattenapparate.

Von **F. Lippich** in Prag.

(Mit 1 Tafel.)

I.

Durch eine genauere Untersuchung über die Polarisations-
n Gesichtsfelde eines Polarisationsprismas, habe ich in
:r früheren Arbeit: „Über polaristrobometrische Me-
en“ [1] die Grundlage gewonnen für die Beurtheilung und
ie Vervollkommnung jener Messinstrumente, bei welchen
f genaue Ermittlung der Lage der Polarisationsebene des
es ankommt und habe auch verschiedene diesbezügliche
)den des Näheren besprochen und durch experimentelle
ı illustrirt. Hiebei wurde jedoch die Halbschattenmethode
gerade in jener Form, in der sie die häufigste Anwendung
t, nur ganz gelegentlich berührt und nur im Art. XII ein
ihren angegeben, das dem Principe nach mit dieser Methode
:instimmt, bezüglich der ganzen Zusammenstellung des Ap-
:es aber sehr wesentlich von der gebräuchlichen abweicht
e Versuche waren dazumal nach dieser Richtung hin einer-
noch wenig ausgedehnt worden und anderseits, insoweit sie
:esultaten geführt hatten, bereits in einer kleinen Arbeit.
:r ein Halbschattenpolarimeter“ [2] veröffentlicht worden.
:nwärtig möchte ich auf die Halbschattenmethode zurück-
men, um einige Verbesserungen anzuführen, die mir nicht
esentlich scheinen.

---

[1] Sitzb. d. Wr. Akademie, LXXXV, S. 268.

[2] Naturwissenschaftliches Jahrbuch „Lotos“, neue Folge, II. Band,
, 1880.

Bekanntlich handelt es sich bei dieser Methode darum, ein Gesichtsfeld herzustellen, das aus zwei scharf aneinander grenzenden Theilen besteht, welche vermöge der verschiedenen Orientirung ihrer zugehörigen Hauptschnitte, auch bei verschiedenen Stellungen des Analysators die grösste Dunkelheit zeigen, für eine Zwischenstellung derselben aber, gleiche Beschattung, die hauptsächlich durch das Verschwinden der Trennungslinie zwischen beiden Gesichtsfeldhälften beurtheilt werden soll.

Eine Verbesserung gegenüber den gebräuchlichen Apparaten von Jelett, Cornu, Laurent u. A. wird sich zunächst auf eine Erhöhung der Empfindlichkeit oder Genauigkeit der Einstellung und auf eine allgemeinere Verwendbarkeit zu beziehen haben und demgemäss eine Reihe neuer Anforderungen an die Construction des Apparates stellen.

Was nun die Genauigkeit der Einstellung betrifft, so wird dieselbe unter sonst gleichen Umständen, d. h. bei gleicher Wahl und Anordnung der Polarisatoren und der übrigen optischen Theile, nur durch Erhöhung der Intensität der Lichtquelle gesteigert werden können, wenn man gleichzeitig dafür sorgt, dass der Winkel zwischen den Hauptschnitten der Gesichtsfeldhälften entsprechend verkleinert werden kann. [1]

Eine Veränderlichkeit dieses Winkels der Hauptschnitte innerhalb gewisser Grenzen, wird also als eine der ersten zu stellenden Anforderungen anzusehen sein, und es ist ja in der That bekannt, dass die Laurent'sche Einrichtung, welche diese Veränderlichkeit zuerst ermöglicht hat, einen wesentlichen Fortschritt in der Construction der Halbschattenapparate bezeichnet.

Hat man bei gegebener Lichtquelle den günstigsten Werth des Winkels der Hauptschnitte und damit den günstigsten Grad der Beschattung, bei welcher Gleichheit der Gesichtsfeldhälften eintritt, gewählt, dann wird die Genauigkeit der Einstellung noch immer durch mancherlei Umstände bedingt sein, deren Einfluss bei oberflächlicher Betrachtung oft leicht unterschätzt wird. Vor Allem ist die Constructionsart der Polarisationsprismen, die zur Verwendung kommen sollen, wohl zu beachten und es ist hier

[1] A. a. O. S. 304.

zu erinnern, dass Nicol'sche Prismen gewöhnlicher Con-
on in gekreuzter Stellung die Erscheinung des dunkeln
ns geben, dessen Lage, Schärfe und Beweglichkeit in der
citirten Abhandlung näher untersucht wurde bezüglich der
igigkeit von den Polarisatoren und der Art ihrer Anordnung.
t man das Hauptaugenmerk auf das Verschwinden der
linie der beiden Gesichtsfeldhälften, so wird man, damit dieses
hwinden mit gleichbleibender Sicherheit beobachtet werden
die Wahl so treffen müssen, dass der dunkle Streifen
el der Trennungslinie zu Stande kommt, denn nur dann
das Verschwinden dieser Linie gleichzeitig in ihrer ganzen
hnung erfolgen können. Diese Lage des Streifens muss
erhalten bleiben, wenn der Analysator um 180° gedreht
n ist, und auch dann, wenn eine active Substanz ein-
altet wird, und man kann diesen gestellten Bedingungen in
That dadurch genügen, dass man als Analysator ein
isationsprisma mit normalen Gesichtsfeld wählt, ein
ia also, bei welchem die optische Axe sehr nahe normal
zur Richtung der durchgehenden Strahlenbündel[1]. Selbst für
ige Intensitäten der Lichtquelle, bei denen dieser dunkle
fen und die Abschattung des Gesichtsfeldes parallel dem-
n kaum bemerkbar wird, ist diese Wahl des Analysators
Wichtigkeit, denn es handelt sich bei der Einstellung eben
kleine Helligkeitsunterschiede, die an der Grenze der Wahr-
barkeit liegen.

Es ist aber das Verschwinden der Trennungslinie keineswegs
einzige oder wichtigste Moment, welches für die Sicherheit
Einstellung des Analysators in Frage kommt. Verfolgt man
Reihe von Einstellungen an einem Halbschattenapparate mit
er Aufmerksamkeit, so wird man bald erkennen, dass nicht
s die Zonen zu beiden Seiten der Trennungslinie, sondern
i die übrigen Partieen des Gesichtsfeldes zur Beurtheilung
ngezogen werden und desshalb ist es von besonderer Wich-
eit, dass die Helligkeitsvertheilung im ganzen Gesichtsfelde
möglichst gleichförmige sei. Andernfalls, wenn grössere
ile des Gesichtsfeldes verschiedene Helligkeit zeigen, wird

[1] A. a. O. S. 274, 277, 279, 291.

die Einstellung dadurch unsicher, dass man dieselbe nach der Helligkeit bald dieser, bald jener Partieen beurtheilt, und auch hier handelt es sich wieder um Helligkeitsunterschiede, die an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegen. Indem man als Polarisator ebenfalls Prismen mit normalem Gesichtsfelde verwendet, wird man der Bedingung dieser Gleichförmigkeit insoweit genügen können, als hiefür die Polarisatoren allein massgebend sind. Auf die Helligkeitsvertheilung im Gesichtsfelde ist aber auch noch die Beschaffenheit der Lichtquelle von Einfluss und je nach der Anordnung des Apparates wird von ihrer Oberfläche ein grösserer oder geringerer Theil und die in diesem Theile vorhandene Helligkeitsvertheilung in Betracht zu ziehen sein.

Was endlich die allgemeinere Verwendbarkeit der Halbschattenmethode anbelangt, so möchte hier insbesondere auf die wichtige Forderung hinzuweisen sein, dass der Apparat die Anwendung beliebiger heterogener und namentlich homogener Lichtquellen gestatten soll. Dieser Forderung genügen wohl die Zwillingspolarisatoren von Jelett, Cornu und von Schmidt u. Haensch, bei diesen ist es aber nicht möglich, den Winkel der Hauptschnitte beider Polarisatorhälften abzuändern, während wieder die Laurent'sche Platte nur für eine bestimmte Wellenlänge passend hergestellt werden kann. Will man sich überdies nicht auf einige wenige homogene Farben beschränken, so können nur Spectralfarben in Betracht kommen und es wird demnach die Verbindung der Halbschattenmethode mit der spectralen Auflösung des zu Gebote stehenden Lichtes gefordert werden müssen.

Einen Apparat zu construiren, der bei möglichst hoher Empfindlichkeit gestattet, die Beschattung beliebig zu wählen, der überdies die Anwendung beliebiger Lichtquellen ermöglicht, mögen dieselben in Bezug auf Intensität, Zusammensetzung des Lichtes und Helligkeitsvertheilung wie immer beschaffen sein und der insbesondere auch für spectrale Auflösung des Lichtes geeignet ist, war die Aufgabe, die ich mir gestellt und in zwei verschiedenen Formen, wie sie im Nachfolgenden angegeben werden sollen, gelöst habe, in zwei Formen, von denen jede ihre besonderen Vortheile darbieten dürfte und die leicht in einen einzigen Apparat so vereinigt werden können, dass man nach Belieben die eine oder die andere in Anwendung zu bringen vermag.

II.

ie gebräuchlichen Polarimeter sind so eingerichtet, dass
t eines kleinen Fernrohres, vor dessen Objectiv der Analy-
ngebracht ist, der Polarisator, oder vielmehr ein an diesem
iches Diaphragma anvisirt wird. Die Strahlen, die sich
ch in dem Bildpunkte vereinigen, der irgend einem Punkte
Diaphragmaöffnung entspricht, erfüllen vor der Brechung
las Fernrohrobjectiv einen Strahlenkegel, dessen Basis
Diaphragmaöffnung vor dem Analysator und dessen Spitze
m betreffenden Punkte des Diaphragmas am Polarisator
ienfällt; die zum Bilde vereinigten Strahlen sind daher
ils Parallelstrahlenbündel durch die Polarisatoren ge-

eraus folgt aber, wie ich gezeigt habe,[1] dass im Allgemeinen
mer grössere Aufhellung des Gesichtsfeldes mit steigender
ät der Lichtquelle eintreten muss, nämlich immer dann,
cht beide Polarisatoren gleichzeitig normale Gesichts-
esitzen. Da ferner die gewöhnliche Anordnung der Halb-
iapparate eine Lichtquelle erfordern, die noch innerhalb
trächtlichen Theiles constante Helligkeit besitzt, was um
ieriger zu erreichen ist, je intensiver die Lichtquelle sein
endlich diese Anordnung ohne weiteres die Anwendung
ctralfarben nicht zulässt; so habe ich zunächst eine andere
ng versucht, die von den eben genannten Mängeln frei
die ich hier der Vollständigkeit wegen, in Kürze be-
n will. Wesentlich an derselben ist, dass die Polarisatoren
iwendung eines Collimators in paralleles Licht gestellt
und es mag daher der Apparat als Halbschatten-
t mit Collimator bezeichnet werden.
schen den Fernrohr- und Collimatorobjectiven befinden
Polarisationsprismen, die am besten so gewählt sind, dass
ormales Gesichtsfeld haben. Das am Fernrohrobjectiv
ie, analysirende Prisma ist drehbar um die gemeinsame
Axe von Fernrohr und Collimator, das dem Objectiv
eren zunächst gelegene polarisirende Prisma ist fest

. a. O. S. 299—301.

aufgestellt. In der Brennebene des Collimatorobjectives befindet sich die Lichtspalte, deren Breite und Höhe regulirt werden kann; der Collimator ist mit einem Heliometerobjectiv versehen und der Polarisator besteht gleichfalls aus zwei Theilen, deren Hauptschnitte innerhalb gewisser Grenzen beliebige Neigung gegen einander erhalten können; der eine Theil des Polarisators steht vor der einen, der andere vor der anderen Hälfte des Heliometerobjectives. Einen derartigen Polarisator kann man z. B. erhalten, indem man ein Polarisationsprisma durch einen Längsschnitt in zwei Hälften theilt, diese in einem Rohrstück so fasst, dass zwischen den Schnittflächen bei paralleler Stellung der Hauptschnitte ein Spielraum von etwa 1 bis 1·5 Mm. Dicke bleibt, und während die eine Hälfte im Rohrstück festgemacht ist, die andere um die Axe des Rohrstückes gedreht werden kann; dieses Rohrstück wird dann so vor das Collimatorobjectiv gestellt, dass die Schnittebene seines Objectives durch den Zwischenraum zwischen beiden Polarisatorhälften hindurchgeht.

Wenn man nun mit Hilfe des Heliometerobjectives das Bild der Spaltöffnung verdoppelt, so ist sofort ersichtlich, dass zu Folge der gewählten Stellung des Polarisators gegen das Objectiv alle Strahlen, die sich zu dem einen Bilde vereinigen, nur durch die eine, und alle Strahlen, die das andere Bild erzeugen, nur durch die andere Hälfte des Polarisators gegangen sind, dass also in den beiden Bildern die Hauptschnitte einen Winkel mit einander bilden werden, gleich dem Winkel der Hauptschnitte der beiden Polarisatorhälften. Lässt man die beiden Bilder der rechteckigen Öffnung sich längs einer Seite berühren, so erhält man demnach, wie bei einem gewöhnlichen Halbschattenapparate, ein aus zwei Theilen bestehendes Gesichtsfeld, deren Hauptschnitte verschieden orientirt sind und die jetzt in optischem Contact sich befinden.

Die Spaltöffnung und daher auch die leuchtende Fläche kann jetzt sehr mässige Dimensionen erhalten. Macht man z. B. die Spaltbreite gleich 1 Mm. bei einer 5maligen Fernrohrvergrösserung und verdoppelt das Spaltenbild senkrecht zur Spaltrichtung, so erhält man ein Gesichtsfeld von 10 Mm. Breite.

Ganz besonders möchte noch hervorzuheben sein, dass die beschriebene Anordnung eine Vervielfachung der Halb-

ttenmethode gestattet, die eine wesentliche Erhöhung
enauigkeit verspricht. Sie wird dadurch erreicht, dass man
e Collimatorspalte ein Gitter anbringt, dessen Stäbe senk-
zur Spaltlänge verlaufen und bei welchem die Breite der
genau gleich ist der Breite der Zwischenräume. Verdoppelt
lann das Spaltenbild so, dass die hellen Zwischenräume des
Bildes genau auf die dunkeln des anderen Bildes fallen, so
man eine ganze Reihe von Trennungslinien, die alle gleich-
bei der entsprechenden Stellung des Analysators ver-
ıden müssen. Beim Drehen desselben nach der einen oder
deren Richtung wird bald das eine, bald das andere System
orizontalstreifen dunkler erscheinen, und da immer ein
n durch zwei von anderer Helligkeit eingefasst erscheint,
ss sich der Moment der gleichförmigen Helligkeit viel
r beurtheilen lassen. Das Verhalten des Gesichtsfeldes
t an das eines Wild'schen Polaristrobometers mit Savart'-
Polariskop, es besteht aber diesem letzteren gegenüber
ır wesentliche Unterschied, dass die Streifen viel breiter
ıt werden können und jeder Streifen in seiner ganzen
ortwährend gleichförmige Helligkeit behält.
ın könnte zwar, namentlich wenn immer dieselbe Spalt-
und auch dieselbe Art der Verdopplung ihres Bildes an-
et wird, diese Verdopplung statt durch ein Heliometer-
auch auf andere Weise, z. B. durch Einschaltung eines
von entsprechenden kleinen brechenden Winkel zwischen
ıctiv des Collimators und der einen Hälfte des Polarisators
n. Da jedoch die beiden Hälften des Polarisators selbst,
r je nach der Art der Herstellung desselben, verschiedene
sche Fehler haben können und für sich allein schon Ver-
gen der beiden Bilder zu bewirken im Stande sind, die
e wieder corrigirt werden müssen, so spricht schon
mstand allein für die Anwendung eines Heliometer-
, und zwar eines derartigen, bei welchem die eine Hälfte
l und senkrecht zur Schnittfläche verschoben werden

der gewählten Anordnung ist die spectrale Auflösung
ıtes der angewandten Lichtquelle auf mehrfache Art
·bar. Um aber den eigentlichen Messapparat nicht durch

Theile, die unter Umständen wieder entfernt, oder doch beweglich eingerichtet werden müssen, zu compliciren und seine Unveränderlichkeit zu schädigen und durch die Polarisatoren nicht mehr Licht durchzusenden als gerade nothwendig ist, wird es sich entschieden empfehlen, den Spectralapparat ganz von dem Polarimeter zu trennen und auf den Spaltschirm ein Spectrum zu entwerfen, dessen Ausdehnung dann je nach der Grösse der Rotationsdispersion des zu untersuchenden Körpers zu wählen ist. Diese Ausdehnung soll nämlich so gross gewählt werden, dass der Eliminationsstreifen im Spectrum noch hinreichend breit ist gegenüber der Spalte vom Collimator, damit dieselbe in ihrer ganzen Breite noch nahezu gleichförmig verdunkelt werde.

Was die Genauigkeit der besprochenen Methode anbelangt, so habe ich dieselbe nur mit unvollkommenen Polarisatoren, die keine normalen Gesichtsfelder geben, prüfen können, und sie hat sich schon unter diesen Umständen als eine sehr befriedigende herausgestellt. Überdies lassen die Angaben in meiner früheren Abhandlung über polaristrobometrische Methoden[1] und nicht minder die weiter unten folgenden, den hohen Grad der Genauigkeit, der sich erreichen lässt, zur Genüge erkennen.

III.

Um bei der bisher gebräuchlichen Form der Halbschattenapparate ohne Collimator bleiben, zugleich aber auch die Bedingungen der Veränderlichkeit des Winkels zwischen den Hauptschnitten der beiden Gesichtsfeldhälften und der Unabhängigkeit von der Farbe der Lichtquelle erfüllen zu können, habe ich zunächst nur als Projecct einen Polarisator angegeben[2], der im Wesentlichen die folgende Einrichtung hat.

In ein Rohrstück wird ein Polarisationsprisma so eingesetzt, dass es um die Axe desselben gedreht werden kann; ein zweites Prisma wird in dasselbe Rohrstück fest und so eingesetzt, dass eine seiner Seitenflächen nahezu durch die Axe dieses Rohrstückes geht und daher das erstere Prisma vom zweiten nur zur Hälfte verdeckt wird. Dieses halbe Prisma, wie es der Kürze

[1] A. a. O. S. 320.

[2] Naturwissenschaftliches Jahrbuch „Lotos", neue Folge, II. Band. „Über ein Halbschattenpolarimeter", Art. 2.

genannt werden mag, ist gegen den Analysator gewendet und elbar vor seiner, dem Beobachter zugekehrten Endfläche be- sich ein Diaphragma, welches dann durch die betreffende des Halbprismas in zwei gleiche Felder getheilt erscheint. Drehen des ersten Prismas kann man jetzt den Hauptschnitten eiden Felder jede beliebige gegenseitige Winkelstellung Ist der Winkel zwischen den Hauptschnitten nicht Null, l zwar das Lichtbündel, welches aus dem Halbprisma tritt, ere Intensität haben als das andere. Es wird dann bei r Helligkeit beider Gesichtsfeldhälften der Hauptschnitt alysators mit dem Hauptschnitte des halben Prismas einen en Winkel als mit dem Hauptschnitte des ganzen Prismas iessen und nicht, wie bei den anderen Halbschattenpolari- , den Winkel der Hauptschnitte halbiren. Dieser Umstand ch nebensächlich, denn es ist sofort klar, dass bei gege- Winkel der Hauptschnitte auch jetzt noch Gleichheit der sfeldhälften in aller Strenge bei derselben Stellung des ators eintreten muss, welche Intensität auch die Licht- aben mag, was allein für die Messungen zu fordern ist.

r beschriebene Polarisator wurde zuerst für Herrn Prof. lt von den Herren Schmidt und Haensch in Berlin hrt, und zwar in der Weise, dass das Halbprisma durch rtnack-Prazmofski'sches Nicol, während, meinen glichen Angaben entsprechend, das ganze Prisma durch n'sches hergestellt war. Dieser Polarisator hat ziemlich gende Resultate ergeben, obgleich das Prazmofski'sche ei welchem die optische Axe senkrecht steht zur Schnitt- der Bedingung für ein normales Gesichtsfeld nur an- t entsprechen kann. Herr Landolt gibt den wahr- hen Fehler einer Einstellung bei Benützung einer Na- nme zu $\pm 1'$ und bei Benützung weissen Lichtes (Gas- u $\pm 0'5$ an, wobei als Analysator ebenfalls ein Glan'- isma diente. [1] Ich hatte selbst Gelegenheit, einen solchen or zu prüfen und erhielt unter Anwendung weissen (Argand-Brenner) eine etwas grössere Genauigkeit

---

[1] eitschrift für Instrumentenkunde, 1883, S. 121: „Neuerungen an ometern."

nämlich einen wahrscheinlichen Fehler von ± 15 bis $\pm 20''$, wenn der Winkel der Hauptschnitte nahezu $1°5$ betrug; bei starker Beschattung traten die Ungleichförmigkeiten in der Helligkeit der Gesichtsfeldhälften schon recht auffallend hervor, besonders in der vom Prazmofski'schen Prisma gebildeten, wie vorauszusehen war. Trotz der bedeutenden Länge dieses Prismas war doch die Trennungslinie der beiden Hälften hinreichend scharf und gleichförmig.

Es wird weiter unten eine andere Construction des Halbschattenpolarisators bei Besprechung der in Anwendung gebrachten Polarisationsprismen angegeben werden, die sich sehr gut bewährt hat und wie aus den Zahlenangaben ersichtlich ist, eine Genauigkeit schon bei mässig hellen Lichtquellen gewährt, die wohl nahe an der Grenze des Erreichbaren sein dürfte, denn der wahrscheinliche Fehler unter Anwendung eines Argand-Brenners ergab sich zu ± 2 bis ± 4 Secunden. Zuvor sollen aber noch einige andere Verbesserungen in der Anordnung des Apparates angegeben werden, die ebenfalls zur Erzielung einer gleichförmigen Helligkeit des Gesichtsfeldes von Wichtigkeit sind.

In Fig. 1 bedeutet F das Beobachtungsfernrohr, A den Analysator mit dem Diaphragma aa, P den Polarisator mit dem Diaphragma pp, welches mittelst des Fernrohres anvisirt wird, C eine Sammellinse, L die leuchtende Fläche der Lichtquelle, xx die Axe des Apparates, mit welcher die optische Axe des Fernrohres und die Drehungsaxe des Analyseurs zusammenfallen. Das Diaphragma aa ist bezüglich seiner Lage und der Grösse seiner Öffnung dem Analysator und dem Fernrohre anzupassen, d. h. so zu wählen, dass alle durch aa tretenden und von Punkten s des anvisirten Diaphragmas pp ausgehenden Strahlen durch den Analysator und das Fernrohr hindurch in das Auge des Beobachters gelangen können.

Wir nehmen zuerst an, die Linse C werde ganz weggelassen und die Lichtquelle befinde sich in L'; die Helligkeit, unter welcher ein Flächenelement in s gesehen wird, ist unter den gemachten Annahmen proportional der Lichtmenge, die von dem Theile $\alpha\alpha$ ausgesendet wird, welchen der Kegel asa aus der Lichtquelle ausschneidet. Nun ändert sich zwar die Grösse dieses Theiles nicht merklich, wenn man s mit den verschiedenen

ı der Diaphragmaöffnung zusammenfallen lässt, allein für unkt s wird $\alpha\alpha$ an eine andere Stelle der Lichtquelle und wenn daher diese innerhalb einer entsprechend Partie nicht durchaus gleiche Leuchtkraft besitzt, so ch die Diaphragmaöffnung pp nicht gleichförmig hell en können. Überdies wird sich die Helligkeitsvertheilung er Veränderlichkeit der Flamme mit der Zeit ändern.

zen wir die Linse C an ihre Stelle und ist dann L die le Fläche, L' ihr von der Linse entworfenes Bild, so glich des letzteren das eben Gesagte. Nun scheint man den eigentlichen Zweck dieser Linse und ihre Wirkung ıaue Rechenschaft gegeben zu haben, denn die Angaben selbe lauten sehr verschieden. Bald ist es eine Linse ierer Brennweite, etwa gleich der Entfernung zwischen r und Polarisator, während die Lichtquelle nahe der stellt ist, diese also nur die Wirkung hat, als wäre an von L eine etwas grössere und weiter von P entfernte le gesetzt worden; bald gibt man der Linse eine kleine te von einigen Centimetern und stellt die Lichtquelle in ebene. Keinesfalls wird durch derartige Anordnungen tliche Zweck den diese Beleuchtungslinse offenbar ll und auch erfüllen kann, nämlich die Diaphragmaöffnung ıngig von der augenblicklichen Vertheilung der Leucht- r Lichtquelle möglichst gleichförmig zu beleuchten, voll- reicht. Wie wichtig aber die Erfüllung dieser Bedingung ıs den Untersuchungen hervor, durch welche Herr Lan- igt hat, dass der hauptsächlichste Grund für die fort- ı Nullpunktsschwankungen an einem Halbschattenappa- ollimator in der ungleichen und wechselnden Helligkeit edenen Partieen der Beleuchtungsflamme zu suchen sei.[1] olcher Einfluss der Lichtquelle wird natürlich bei enapparaten mit Collimator nicht zu Tage treten, er ber auch bei der andern Form dieser Apparate sehr vollständig durch entsprechende Wahl der Beleuch- beseitigen, indem man dafür sorgt, dass der Theil $\alpha\alpha$ L' der Beleuchtungsflamme für jede Lage des

ıchrift für Instrumentenkunde, 1883, S. 125 und 1884, S. 390.

Punktes *s* unverändert bleibt, und dieses wird erreicht, wenn man das Bild auf die Ebene des Diaphragmas *aa* wirft. Es wird sich empfehlen, kein vergrössertes oder doch nur ein wenig vergrössertes Bild der Lichtquelle zu entwerfen, man wird also die Brennweite von *C* nahe gleich der halben Distanz *AP* wählen und die Lichtquelle in eine Entfernung gleich *AP* von der Beleuchtungslinse aufstellen; hiebei ist nur nothwendig, dass das Bild nahezu in die Ebene *aa* zu liegen komme. Auf alle Fälle wird bei dieser Anordnung die Beleuchtungsflamme in viel grössere Entfernung vom Polarisator zu stellen sein als dies gewöhnlich geschieht, was zugleich den weiteren Vortheil mit sich bringt, dass bedeutendere Erwärmungen des Polarisators und des ganzen Instrumentes von Seite der Lichtquelle vermieden werden. Wie ich mich überzeugt habe, können solche Erwärmungen ebenfalls merkliche Nullpunktsschwankungen bewirken.

Es ist demnach als eine wichtige Regel bei der gegenwärtig besprochenen Halbschattenmethode festzuhalten, die Beleuchtungslinse so zu wählen, dass durch dieselbe ein Bild der Lichtquelle nahe an dem Analysator-Diaphragma zu Stande komme.

Eine Veränderung der Vertheilung der Leuchtkraft in der Flamme wird dann nur die Gesammthelligkeit des Gesichtsfeldes abändern können, während die Helligkeitsvertheilung in demselben immer gleichförmig bleibt, und damit entfallen auch die Nullpunktsschwankungen in Folge der Veränderlichkeit der Lichtquelle.

Weil nun die Lichtquelle unbeschadet der gleichförmigen Helligkeit des Gesichtsfeldes ganz beliebig gewählt werden darf, also beispielsweise auch eine leuchtende Linie oder ein Lichtpunkt sein kann, so ergibt sich sofort, dass durch die erwähnte Anordnung der Beleuchtungslinse die Anwendung von Spectralfarben ermöglicht ist. Man wird zu diesem Zwecke nur einen Spaltschirm in solche Lage gegen die Beleuchtungslinse zu bringen haben, dass das Bild der Spalte auf das Analysator-Diaphragma fällt und auf den Spaltschirm ein Spectrum entwerfen. Man erreicht dieses am bequemsten durch einen Spectralapparat, dessen Collimator gegen den Polarisator gerichtet ist, während das Ocular des Fernrohres durch

Lichtspalte ersetzt wird, eine Einrichtung, die ich schon in
:r ersten Arbeit über polaristrobometrische Methoden[1] näher
;eben habe. Ganz besonders geeignet sind hiefür die Spectro-
von A. Hilger in London mit Christie'schem Halbprisma,
diesen durch blosse Drehung des Prismas jede beliebige
schriebene Stelle des Spectrums an die Spalte gebracht
n kann. Bei der Auswahl des Spectrometers wird man
ns darauf zu achten haben, dass der wirksame Querschnitt
ismen und die Brennweite des Objectivs einen aus der
tretenden Lichtkegel von solchen Öffnungswinkeln er-
hen, wie er nöthig ist, damit derselbe nach der Brechung
Beleuchtungslinse das Polarisator-Diaphragma vollständig
e.

IV.

)gesehen von der richtigen Wahl der Polarisationsprismen
wie schon beiläufig bemerkt, zur Erzielung einer gleich-
n Helligkeit im Gesichtsfelde noch weiter erfordert, dass
der Strahlenbündel, die einem Punkte des Gesichtsfeldes
:hen, in seinem Verlaufe eine partielle Abblendung erleide.
n Halbschattenapparate mit Collimator treten nun die
ı, die sich schliesslich in den Bildpunkten vereinigen, als
strahlenbündel aus dem Polarisatordiaphragma und die-
von ihnen, welche die grösste Neigung gegen die Axe
arates haben, sollen noch vollständig vom Analysator-
;ma aufgenommen werden. Bezeichnet h die Höhe der
m Collimator, f die Brennweite seines Objectivs, p den
:sser des Polarisatordiaphragmas, a den Durchmesser des
;mas am Analysator, und D die Distanz beider Dia-
n von einander, so wird die Bedingung erfüllt sein, wenn

$$a = p + h\frac{D}{f}$$

wird. Umgekehrt findet man hieraus die Höhe der Spalte,
welcher die Helligkeit noch gleichförmig bleibt. Um

. a. O. S. 314. Vergl. auch: Zeitschrift für Instrumentenkunde
3.

daher allzu grosse Dimensionen des Analysators zu vermeiden, wird man eine kleine Spalthöhe und grössere Collimatorlänge, und damit dann das Gesichtsfeld nicht zu kleine Dimensionen erhalte, stärkere Fernrohrvergrösserung wählen.

Bei den Halbschattenapparaten ohne Collimator können, wie ein Blick auf die Fig. 1 ergibt, die beiden Diaphragmen gleich gross oder auch verschieden sein. Es empfiehlt sich aber auch hier, das Analysatordiaphragma möglichst gross zu wählen, da mit seinen Dimensionen die Helligkeit des Gesichtsfeldes zunimmt.

Flüssigkeitsröhren, welche zwischen Polarisator und Analysator eingeschaltet werden, müssen Diaphragmen erhalten, die etwas grösser sind, als das grösste der Diaphragmen am Apparate, welche Forderung häufig nicht genug beachtet wird. Ein sehr geringer Fehler in der Centrirung der Röhrendiaphragmen gegen die des Apparates wird, wenn die ersteren nicht hinreichende Grösse haben, durch partielle Abblendung gewisser Strahlenbündel eine merkliche Nullpunktsverschiebung und noch dazu in verschiedenem Betrage, je nach der Lage der Röhre, bewirken.

Die gleiche Vorsicht in der Wahl der Diaphragmendurchmesser ist natürlich auch für alle anderen Stellen des Apparates, wo welche eingesetzt werden, zu beobachten, so insbesondere bezüglich der Diaphragmen im Collimator und im Fernrohre und an der Beleuchtungslinse.

Ein Diaphragma, das noch besondere Erwähnung verdient, ist die Pupille des beobachtenden Auges und zwar hat man es hier mit einem nach Grösse und Lage veränderlichen Diaphragma zu thun. Je grösser die Änderungen in der Augenstellung sein können, ohne dass eine Änderung in der Helligkeitsvertheilung des Gesichtsfeldes eintritt, desto leichter und sicherer werden die Einstellungen gemacht werden. In dieser Hinsicht ist es nothwendig die Einrichtung zu treffen, dass die Pupille möglichst genau in die Ebene des Ocularkreises oder genauer gesagt, in die Ebene des Bildes gebracht werden könne, welches durch das Fernrohr-Objectiv und Ocular, von dem Analysatordiaphragma entworfen wird. Ist der Ocularkreis grösser als die Pupille, so werden bei dieser Stellung alle aus demselben tretenden Strahlenbündel

leichviel abgeblendet, auch wenn der Pupillenrand über den
des Ocularkreises hinaustritt und die Helligkeitsvertheilung
t gleichförmig. Ist der Ocularkreis kleiner als die Pupille,
ieser Fall wird bei den relativ geringen Dimensionen des
rsatordiaphragmas zumeist vorhanden sein, so wird bei
aler Stellung des Auges keines der austretenden Strahlen-
el abgeblendet, dies tritt erst ein, wenn der Pupillenrand
)cularkreis schneidet; aber auch dann wird der Querschnitt
Strahlenbündels um dieselbe Grösse reducirt. Ganz anders
lt sich die Sache, wenn die Pupille nicht mit der Ebene des
rkreises zusammenfällt, denn in diesem Falle treffen die den
rkreis in verschiedenen Richtungen durchsetzenden Strahlen-
l die Ebene der Pupille an verschiedenen Stellen, und wenn
ndung durch die Pupille eintritt, so hat sie für die einzelnen
enbündel auch verschiedene Grösse. Ist der Ocularkreis
er als die Pupille, so kann jetzt ein gleichförmig helles
htsfeld überhaupt nicht zu Stande kommen; ist der Ocular-
kleiner als die Pupille, so ist ein gleichförmiges Gesichts-
var möglich, so lange der Querschnitt des ganzen aus dem
kreis tretenden Bündels noch kleiner als die Pupille bleibt,
)ielraum aber für die Änderungen in der Augenstellung,
lchen noch keine partiellen Abblendungen eintreten, nimmt
der Entfernung des Auges vom Augpunkt.

ehalten wir die oben gewählten Bezeichnungen bei und
wir weiter μ die Vergrösserung des Fernrohres, ε die
ung der Pupille vom Augpunkt, d die wegen des zwi-
gestellten Nicols auf Luft reducirte Entfernung des Analy-
aphragmas vom Fernrohrobjectiv und q den (grössten)
esser des Querschnittes der Pupillenebene mit dem aus
ularkreis tretenden Gesammtstrahlenbündel, so ist

$$q = \frac{a}{\mu} + \varepsilon\mu\frac{h}{f} \quad \text{oder} \quad q = \frac{a}{\mu} + \varepsilon\mu\frac{p}{D+d},$$

dem es sich um einen Halbschattenapparat mit oder ohne
tor handelt. Wäre im letzteren Falle $\mu = 5$, $a = p = 10$ Mm.
$= 500$ Mm., Zahlen, wie sie einem etwas grösseren
zukommen werden und setzen wir $\varepsilon = 15$ Mm., so er-
h $q = 3 \cdot 5$ Mm., also schon nahe gleich dem mittleren
les Pupillendurchmessers.

Diese Bemerkungen zeigen, dass eine stärkere Fernrohrvergrösserung vortheilhaft ist, ferner dass jedenfalls nur Fernrohre mit convergentem Ocular in Anwendung kommen sollten, und daher der Gebrauch von Galilei'schen Fernrohren, bei denen der Ocularkreis innerhalb des Instrumentes liegt, die fast ausschliesslich an Polaristrobometern vorkommen, zu vermeiden ist. Als Oculare empfehlen sich für so subtile Helligkeitsvergleichungen, wie sie die Halbschattenapparate erfordern, ganz besonders die reflexfreien Oculare, welche von Steinheil in München in zwei verschiedenen Formen verfertigt werden.

Es sollen nunmehr auch die Helligkeiten mit einander verglichen werden, welche nach den beiden auseinandergesetzten Methoden irgend welchem Punkte des Gesichtsfeldes zukommt, wenn die Polarisatoren in beiden Fällen dieselbe Stellung zu einander haben. Da alsdann das Verhältniss der Helligkeiten unabhängig wird von der Wirkung der Polarisatoren, so können wir die Rechnung so führen, dass wir dieselben ganz weggelassen denken und wollen dann als Mass für die Helligkeiten die Lichtmengen i_1 und i_2 suchen, die auf die Flächeneinheit des vom Fernrohr erzeugten Bildes entfallen. Unter H wollen wir die specifische Helligkeit eines Elementes der Lichtquelle verstehen, d. h. die Lichtmenge, welche von der Flächeneinheit in diesem Elemente auf die Flächeneinheit in der Distanz 1 entsendet wird, wobei von einer Veränderlichkeit des H mit dem Emanationswinkel abgesehen werden kann.

Haben wir es mit einem Halbschattenapparat mit Collimator zu thun und bedeutet ω ein Flächenelement der Collimatorspalte, so ist einerseits die ganze von ω ausgehende Lichtmenge, die sich in dessen Bilde vereiniget, da nur die Hälfte des Objectives in Rechnung zu ziehen ist gleich $\omega \frac{\pi H p^2}{8 f^2}$ und anderseits die Fläche des Bildes von ω gleich $\mu^2\omega$, daher

$$i_1 = \frac{\pi H p^2}{8 \mu_1^2 f^2}.$$

Für einen Halbschattenapparat ohne Collimator wollen wir die Entfernung des Polarisatordiaphragmas von der Beleuchtungslinse als klein gegen die übrigen Längsdimensionen

Rechnung kommen, vernachlässigen und die Linse C un-
ar am Diaphragma pp (Fig. 1) gelegen annehmen; mit F
nen wir die Entfernung der Lichtquelle von dieser Linse.
iaphragma aa denken wir uns das Bild $a'a'$ construirt,
s von der Linse C entworfen wird; dieses Bild bestimmt
uf der leuchtenden Fläche L jenen Theil, der nach unserer
ung die Punkte s des Diaphragmas pp mit seiner ganzen
erleuchtet. Ist $d\sigma'$ ein Element dieser Fläche $a'a'$ und ω
nent des Diaphragmas pp, so ist jetzt die ganze durch ω
e Lichtmenge

$$\omega \frac{\int J d\sigma'}{F^2}$$

enn man das zu $d\sigma'$ correspondirende Element $d\sigma$ der
a einführt

$$\omega \frac{\int J d\sigma}{D^2}$$

ans folgt für die Lichtmenge i_2 bezogen auf die Flächen-
es Bildes von ω

$$i_2 = \frac{\int J d\sigma}{4\mu_2^2 D^2},$$

gral ausgedehnt über die Fläche des Analysatordia-
s.
die Lichtquelle constante Helligkeit innerhalb der Fläche
hält man aus obiger Formel

$$i_2 = \frac{\pi J a^2}{4\mu_2^2 D^2},$$

ber genau der Ausdruck, welcher gilt, wenn keine
ngslinie angewendet und die Lichtquelle unmittelbar
aphragma pp gestellt wird. Unter Voraussetzung einer
lben Lichtquelle von gleichförmiger Helligkeit ist ferner:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\mu_2^2 p^2 D^2}{2\mu_1^2 a^2 f^2}$$

us wird leicht ersichtlich, wenn man für p, a, D, f,
zt, wie sie wirklich vorkommen können (z. B, $a = 1{\cdot}5p$,

$D = 2f$), dass bei gleichen Fernrohrvergrösserungen die Helligkeiten i_1 und i_2 nicht sehr bedeutend von einander differiren werden.

Wenn jedoch die Lichtquelle eine lineare ist, wie im Falle spectraler Auflösung des Lichtes, dann wird $\int J d\sigma$ klein gegen $\frac{\pi J p^2}{8}$ und daher i_1 wesentlich grösser als i_2, selbst wenn man, um für den Apparat mit Collimator ein zu kleines Gesichtsfeld zu vermeiden, $\mu_1 > \mu_2$ nehmen würde. In Bezug auf Helligkeit ist also bei spectraler Auflösung des Lichtes die erste Methode der zweiten überlegen.

Ein weiterer Unterschied zwischen beiden Methoden, der bei Anwendung von Spectralfarben zu Tage tritt, liegt darin, dass bei der ersten Methode die Lichtarten die in die Spalte fallen, im Gesichtsfeld nebeneinander liegen, während man nach der zweiten Methode das Mischlicht aller dieser Lichtarten erhält.

Schliesslich sei noch bemerkt, wie sich ein Halbschattenapparat einrichten lässt, um nach Belieben die eine oder die andere Methode anwenden zu können. Man hat zu diesem Zwecke nur an Stelle der Linse C in Fig. 1 das Heliometerobjectiv zu setzen, das dann unbedenklich auch als Beleuchtungslinse verwendet werden kann. Bei grösserer Brennweite dieses Objectives würde man aber die Lichtquelle in eine Entfernung vom Polarisator stellen müssen, die unbequem wäre. Besser und einfacher ist es, eine zweite Sammellinse vor das Objectiv zu stellen, die so gewählt ist, dass nunmehr das Bild des Collimatorspaltes in die Nähe des Diaphragmas *aa* fällt und die Spalte, falls man die Beleuchtungsflamme direct anwenden will, zu entfernen. Natürlich muss das Fernrohr mit entsprechend langem Ocularrohr versehen sein, um die Einstellung auf den Polarisator zu gestatten, bei welcher dann ein schwächeres Ocular zu benützen sein wird. Macht man die zweite Linse in der Axe des Collimators verschiebbar, so lässt sich hiedurch der Einfluss eingeschalteter Flüssigkeitsschichten leicht so corrigiren, dass das Flammenbild immer genau auf das Analysatordiaphragma fällt.

V.

esondere Vorsicht erfordert die Wahl der Polarisations-
n. Die meisten Constructionsarten dieser Prismen ver-
den Zweck, ein möglichst grosses Gesichtsfeld zu erzielen;
ssinstrumenten, die nur ein Gesichtsfeld von wenigen Gra-
rlangen, können die Prismen viel kürzer sein, was schon
grossen Vortheil mit sich bringt, und dann treten noch
Anforderungen in den Vordergrund, die ebenfalls eine
r gewöhnlichen abweichende Constructionsart zweckmässig
nen lassen.

e Forderungen, die an die Polarisationsprismen für die
enden Zwecke zu stellen sind, beziehen sich 1. auf die
sationsart im Gesichtsfelde, welches ein normal
sirtes, 2. auf die Helligkeitsvertheilung in dem-
welche eine vollkommen gleichförmige sein
l 3. darauf, dass bei gekreuzten Polarisatoren selbst bei
ossen Lichtintensitäten das Gesichtsfeld einen mög-
hohen Grad von Dunkelheit besitze.

d für zwei Prismen die beiden ersten Bedingungen er-
werden dieselben in parallelem Lichte, wenn ihre
hnitte irgend einen Winkel mit einander bilden, wieder
ommen gleichförmig helles Gesichtsfeld geben, dessen
it gleichzeitig an allen Stellen Null wird, wenn
ptschnitte auf einander senkrecht stehen. Ist das Ge-
d, welches dieses Verhalten zeigt, hinreichend gross,
ird dieses Verhalten auch noch stattfinden, wenn die
nicht in parallelem Lichte stehen,[1] wie solches
weite der oben beschriebenen Methoden gefordert wer-
s.

schon bemerkt, erfordert das Zustandekommen eines
Gesichtsfeldes Polarisationsprismen, bei denen die
Axe senkrecht steht auf der Längsaxe des Prismas, oder
ichtung der durchgehenden Strahlen. Wenn von doppel-
en Prismen, die wegen der Abblendung des einen Strahlen-
ziemlich lange Hülsen erfordern, hier abgesehen wird,

---

[1] vergl. a. a. O. Art. IX, S. 288—301.

so kämen zunächst die Glan'schen Prismen[1] in Betracht. Es sind dies bekanntlich Prismen mit geraden Endflächen und einer Luftschichte zwischen den Prismenhälften; die optische Axe ist parallel den brechenden Kanten. Das gegen die Längsaxe symmetrische Gesichtsfeld von wenigen Graden ist einerseits bestimmt durch die Strahlenrichtung, für welche die totale Reflexion der ordentlichen Strahlen, anderseits durch die Strahlenrichtung, für welche die totale Reflexion der ausserordentlichen Strahlen an der Luftschichte beginnt.

Abgesehen davon, dass diese Prismen wegen des nothwendigen Verschlusses der Luftschichte nicht als Halbprismen für den oben beschriebenen Polarisator brauchbar sind, haben sie, trotz ihrer Vorzüge gegenüber anderen Prismenconstructionen, Eigenschaften, die ihre Anwendung zu besonders exacten Messungen nicht empfehlen. Einmal erzeugen die mehrfachen Reflexionen innerhalb der Luftschichte mehrfache Bilder, sobald die Prismen in convergentem oder divergentem Lichte stehen und auch für paralleles Licht sind diese Bilder nicht leicht zu vermeiden, da es schwer ist, die Luftschichte genau planparallel zu machen. Überdies ist die Intensität des Nebenbildes keineswegs sehr klein, denn die extraordinären Strahlen treten, da sie sich nahe dem Winkel der totalen Reflexion befinden, unter kleinem Winkel gegen die Grenzfläche in die Luftschichte und werden unter demselben Winkel an den Grenzflächen reflectirt. Diese geringe Neigung der Strahlen in der Luftschichte gegen deren Begrenzungsfläche hat dann noch weiter zur Folge, dass alle Fehler im Schliff und in der Politur dieser Flächen in verstärktem Masse zur Erscheinung kommen. Ferner ist der Lichtverlust in Folge der Reflexion der extraordinären Strahlen an der Luftschichte bedeutend, und was das Misslichste ist, ändern sich diese Lichtverluste innerhalb des Gesichtsfeldes von der einen Grenze bis zur anderen ganz erheblich, selbst im mittleren Theil derselben, so dass die austretenden Strahlen kein gleichförmig helles Gesichtsfeld erzeugen können; dasselbe zeigt vielmehr an der einen Grenze ein Maximum an Helligkeit, die erst

[1] Über einen Polarisator. Centralzeitung für Optik und Mechanik, 1880.

ım, dann immer rascher bis Null abnimmt, welchen Werth der andern Grenze erreicht.

lle diese Übelstände, die immer auftreten werden, wenn rechungsexponent der Zwischenschichte klein ist gegen inimum des Exponenten der extraordinären Strahlen im path, verschwinden vollständig, wenn die Zwischenschichte ner isotropen Substanz besteht, deren Brechungsexponent er extraordinären Strahlen gleich wird, und eine Substanz, e dieser Bedingung sehr nahe entspricht, ist das Leinöl; ıack und Prazmowski[1] haben dasselbe auch bereits tem Erfolge als Kittmittel für ihre Prismen verwendet.

s schien mir auf Grund derartiger Überlegungen geboten, lbschattenapparate und überhaupt für exacte Messinstru- ähnlicher Art eine neue Construction der Polarisations- n zu versuchen. Es sind dieses Prismen mit geraden ächen, bei denen die optische Axe senkrecht zu ängskanten gerichtet ist und die beiden Prismentheile inöl verkittet werden. Der Winkel der Ein- und Austritts- gegen die Schnittebene beträgt 66—66·5° und dem- wird dann der Winkel zwischen der Längsaxe des s und denjenigen Strahlen, welche das Gesichtsfeld nach en Seite begrenzen 3·5—4·3°, was wohl für alle Fälle, die Betracht kommen, ausreicht; nach der andern Seite hin Innern des Prismas die Grenze des Gesichtsfeldes durch htung der Schnittebene bestimmt. Die Endflächen sind tisch und die Länge des Prismas wird 2·3 der Länge einer tseite; sie ist also sehr mässig und beiläufig zwei Drittel r Länge eines Prazmowski'schen Prismas bei gleichen nensionen (Fig. 2).

ie die optische Axe sonst orientirt wird, wenn sie nur ht zur Längsaxe steht, ist ziemlich gleichgiltig; aus der en Werkstätte von Schmidt und Haensch erhielt ich erartige, vorzüglich gelungene Prismen, bei denen die e Axe parallel den brechenden Kanten gestellt war. Bei Prismen versuchte ich zugleich die Seitenflächen auf ratio- Art zu schwärzen, indem ich ein Bindemittel für den auf-

[1] Carl, Repertorium für physikalische Technik, II. Band, S. 217.

zutragenden Lampenruss auswählte, dessen Brechungsindex möglichst gleich ist dem der ordentlichen Strahlen im Kalkspath. Aloë-Harz, dessen Index zu 1·634, oder Tolu-Balsam, dessen Index zu 1·628 angegeben wird, wirken schon recht günstig und geben eine bedeutend bessere Schwärzung als die gewöhnlichen Mittel.

Dennoch war die Aufhellung des Gesichtsfeldes bei gekreuzten Prismen unter Anwendung von Sonnenlicht beträchtlich. Ein Theil des zerstreuten Lichtes rührt auch gar nicht von den mattgeschliffenen Seitenflächen her, sondern hat seinen Grund in Staub und feinen Rissen an den polirten Flächen, vielleicht auch in Ausscheidungen, die beim Verharzen der Kittschichte auftreten, die das Licht nicht nur zerstreuen, sondern gleichzeitig theilweise depolarisiren.

Da die genannten Prismen von Schmidt und Haensch namentlich an den Schnittflächen Risse zeigten, die parallel der optischen Axe gerichtet waren, so stellte ich bei anderen Prismen, die von Dr. Steeg und Reuter verfertigt wurden, die optische Axe senkrecht zur brechenden Kante, zugleich in der Absicht, um bei den gleich zu beschreibenden Halbprismen leichter eine scharfe und fehlerfreie Kante erzielen zu können. Die Seitenfläche *ad* Fig. 2 war an diesen Prismen polirt, und zwar aus folgendem Grunde. Durch die an der Schnittfläche total reflectirten ordentlichen Strahlen wird der Theil *ce* der Seitenfläche *bc* sehr hell beleuchtet und dieser Theil sendet theilweise depolarisirte Strahlen aus, die wieder die Fläche *ad* beleuchten, welche sich schliesslich in der Schnittfläche spiegelt. Ist aber *ad* polirt, dann werden die Spiegelbilder von *ce* bezüglich der verschiedenen polirten Flächen, wie man sich leicht überzeugt, entweder in den Grenzflächen oder ganz ausserhalb des Prismas *ABCD* liegen, und es wird daher kein zerstreutes Licht, das von den mattgeschliffenen Seitenflächen herrührt, in der Richtung der Längsaxe austreten können. In der That hat sich dieses Mittel recht gut bewährt.

Man könnte noch versuchen, den Theil des Prismas, welcher dem einfallenden Lichte zugewendet ist, die Form *abfc*, Fig. 2, zu geben, die Fläche *cf* zu poliren und senkrecht gegen die totalreflectirten Strahlen zu stellen. Es bleibt aber fraglich, ob

icht die stärkere Beleuchtung der polirten Flächen *ab* und *ac* ırch das mehrfach hin und her reflectirte Licht, das an diesen ächen zerstreute Licht soweit vermehrt, dass der Vortheil, den ın erreichen wollte, wieder compensirt wird.

In allen Fällen sind die Diaphragmen an den Prismen mer entsprechend kleiner als die Querdimensionen derselben wählen, damit noch ein hinreichend breiter Theil von 1—2 Mm. den Seitenkanten verdeckt bleibt.

Eine besondere Construction erfordert das Halbprisma. Es ın nicht einfach so hergestellt werden, dass man ein Prisma der eben angegebenen Construction mit einer Seitenfläche n die Axenebene des Apparates bringt und die Kante bei *d*, allerdings scharf hergestellt werden kann, anvisirt, denn die te bei *a* könnte nicht die nöthige Schärfe erhalten und würde n Schatten werfen, während überdies die Seitenfläche *ad* in ihrer Nähe verlaufenden Strahlenkegel theilweise ab- let.

Die folgende Construction vermeidet diese Fehler voll- lig. Das Prisma hat nicht vollkommen gerade Endflächen, haben gegen die Schnittfläche eine geringere Neigung als r angegeben, eine Neigung von beiläufig 63·2° (Fig. 3), end die optische Axe wieder senkrecht steht zu den Längs- n und zugleich senkrecht zu den brechenden Kanten. Die n Prismenhälften werden wie bei den früheren Prismen mit l verkittet und eine der Seitenflächen wird polirt; der obige el ergibt ein Gesichtsfeld von gleicher Grösse wie bei der en Prismenconstruction. Dieses Prisma wird nun so justirt lie an der polirten Seitenfläche liegende Kante *d* (Fig. 3), llkommen scharf und fehlerfrei sein muss, in die Axenebene)parates fällt; diese Kante wird anvisirt. Sodann gibt man itenfläche *da* eine geringe Neigung von 1—1·5° gegen die bene. Dadurch wird bewirkt, dass die Strahlenkegel, die Punkten auf der freien Seite der Kante *d* gehören, eine ise Abblendung nicht erleiden können; der angegebene gswinkel muss mindestens gleich sein dem halben Öff- inkel des Lichtkegels, der seinerseits wieder bestimmt :h das Analysatordiaphragma und durch die Entfernung en vom Polarisator. Endlich ist ersichtlich, dass alle

Strahlen, die auf die äussere Fläche *ad* fallen, so zur Seite geworfen werden, dass sie nicht in den Analysator gelangen.

Ähnliches gilt aber auch für die innere Seite der Fläche *ad*; wegen der Neigung von *ab* und *cd* werden hier gewisse zu *xx* parallele Strahlen *pq* nach der Brechung im Prisma in der Axenebene durch *dx* austreten, es sind dieses die Axen jener Strahlenkegel, die zu den Punkten gehören, welche auf der Prismenseite der Kante *d* liegen und bei der getroffenen Wahl der Winkel werden diese Strahlenkegel noch vollständig austreten können; alle andern Strahlen aber, die auf *ad* fallen, werden zur Seite geworfen und ein kleiner Theil von *ab* in der Nähe der Kante *a* bleibt ganz unwirksam, so dass die mangelnde Schärfe dieser Kante von keinem Einfluss ist.

Auf diese Weise behalten die beiden Hälften des Gesichtsfeldes vollkommen gleiche Helligkeit bis unmittelbar an die Trennungslinie heran.

Das Halbprisma kann leicht so gefasst werden, dass man die nöthige Justirung vorzunehmen im Stande ist, während man in den Apparat hineinsieht.

Es wird sich übrigens empfehlen, auch die übrigen Polarisationsprismen mit etwas geneigten Endflächen zu versehen, um alle Reflexe in der Richtung der Axe des Apparates zu vermeiden.

Die beschriebenen Prismen geben in parallelem Lichte nicht nur, sondern auch bei divergentem oder convergentem Lichte, wenn der Divergenzwinkel eine gewisse Grenze, vielleicht 3 oder 4 Grade nicht übersteigt, ein vollkommen normales und gleichförmiges Gesichtsfeld, das ich mindestens auf 3° schätzen möchte und das selbst bei Anwendung von Sonnenlicht keine Andeutung des dunkeln (Eliminations-)Streifens zeigt. Es sei noch bemerkt, dass die Polarisatoren richtig justirt sind, wenn ihre Hauptschnittsebenen der Drehungsaxe des Analysators, die zugleich optische Axe des Fernrohres ist, parallel liegen. Wegen der normalen Gesichtsfelder braucht übrigens diese Justirung nicht mit aller Schärfe ausgeführt zu werden. Als ich absichtlich der Hauptschnittsebene des einen Polarisators eine Neigung von einigen Graden gegen die Axe gab, differirten die Einstellungen bei 0° und 180° nur um 20—30 Secunden.

Ein Gesichtsfeld, das bei Anwendung sehr intensiver Lichtquellen z. B. des Sonnenlichtes und gekreuzten Prismen vollkommen dunkel wäre, habe ich trotz aller Vorsicht nicht erzielen können. Nach den früheren Bemerkungen über den Ursprung des zerstreuten Lichtes dürfte es auch kaum möglich sein, dasselbe ganz unschädlich zu machen.

Überdies rührt ein Theil der Aufhellung bei gekreuzten Polarisatoren mit normalem Gesichtsfelde gewiss nicht von zerstreutem Lichte her, wie sich aus mancherlei Beobachtungen schliessen lässt; eine der auffallendsten, die ich gemacht habe, war die folgende. Als ich die oben erwähnten Prismen von Schmidt und Haensch mit einem Prisma von Dr. Steeg und Reuter, das kein normales Gesichtsfeld hatte, combinirte, zeigte sich der dunkle Streifen sehr schön, jedoch nur bei einer bestimmten Lage; kehrte ich die Prismen um, so dass die Fläche, die früher dem Beobachter, nunmehr dem einfallenden Lichte zugewendet war, so verblasste der Streifen so sehr, dass kaum eine Andeutung desselben übrig blieb. Combinationen zwischen anderen Polarisatoren zeigten ähnliche Erscheinungen jedoch in sehr verschiedenem Grade. Diese Thatsache dürfte wohl nur zu erklären sein, wenn man annimmt, dass die Polarisatoren überhaupt kein vollständig geradlinig polarisirtes, sondern in verschiedenem Grade elliptisch polarisirtes Licht liefern, was vielleicht auf eine unvollkommene Homogeneität des Materiales zurückzuführen wäre. Jedenfalls ist diese Erscheinung einer eingehenderen Untersuchung ebenso werth, wie noch manche andere, z. B. die zwar geringfügige, aber doch zuweilen sehr deutlich hervortretende verschiedene Färbung des dunkeln Streifens, bläulich an dem einen, gelblich an dem andern Rande, die den Eindruck macht, als wäre am Kalkspath eine geringe Dispersion der Hauptschnitte vorhanden.

VI.

Aus den zuletzt beschriebenen, von Dr. Steeg und Reuter verfertigten Prismen wurde ein Halbschattenpolarisator zusammengesetzt, dessen Diaphragma einen Durchmesser von 8 Mm. hatte und als Analysator wurde eines der beiden Prismen von Schmidt und Haensch benützt, dass mit einem Diaphragma von 12 Mm.

Durchmesser versehen war. Die folgenden, mit diesen Prismen angestellten Versuche hatten den Zweck, die Genauigkeit zu ermitteln, die mit einem Halbschattenapparate ohne Collimator erzielt werden kann. Die Prismen waren an dem Polarimeter angebracht, das in meiner ersten Arbeit über polaristrobometrische Methoden Art. XI beschrieben wurde. Die Collimatorlinse dieses Apparates wurde als Beleuchtungslinse verwendet, das Fernrohr vergrösserte beiläufig 7- bis 8mal und die Entfernung zwichen Polarisator und Analysator betrug 45 Ctm. Der Apparat war auf eine Marmorplatte gestellt, die ihrerseits mit drei Stützen auf einer gewöhnlichen Tischplatte ruhte; diese Aufstellung erwies sich als vollkommen geeignet, um die relative Lage der beiden Theile, aus denen das Polarimeter besteht, unverändert zu erhalten. Alles fremde Licht wurde sorgfältig abgehalten, insbesondere wurde darauf geachtet, dass nicht etwa von der vorderen Fläche des Halbprismas Licht nach dem Analyseur reflectirt werde. Active oder inactive Substanzen waren nicht eingeschaltet.

In den folgenden Tabellen enthalten die mit A bezeichneten Columnen die Ablesungen mit Weglassung der Grade und wenn auch die Minuten constant bleiben, der Minuten; die mit D überschriebenen Columnen enthalten die Abweichungen vom Mittel, die mit m, F_m, F_w bezeichneten Zeilen, die arithmetischen Mittel, die mittleren und wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung und endlich die mit ε bezeichneten Zeilen die Winkel, welche die Hauptschnitte des Polarisators bilden.

Das beobachtende Auge wurde nicht besonders geschützt, die Einstellungen an den Mikroskopen wurden vielmehr mit demselben Auge ausgeführt. Bei der Einstellung des Analysators bin ich so vorgegangen, dass ich zuerst ziemlich rasch soweit drehte, dass die Gleichheit der Gesichtsfeldhälften erreicht schien, dann das Auge schloss, oder zur Seite blickte, hierauf möglichst langsam die Gleichstellung corrigirte, wieder das Auge schloss u. s. f. immer in demselben Sinne drehend. Wurde hiebei die Gleichheit der Hälften überschritten, so drehte ich den Analysator hinreichend weit zurück und begann die Drehung in demselben Sinne wie früher von Neuem. Es zeigte sich nämlich, besonders wenn die Aufmerksamkeit auf die Trennungslinie gerichtet war,

dass die Einstellungen stärker differiren, wenn man das einemal z. B. von rechts dunkel und links hell, das andere Mal von links dunkel und rechts hell zur Gleichheit übergeht, als wenn man die Einstellungen immer in demselben Sinne macht, was wohl davon herrühren mag, dass sich die beiden Seiten der Trennungslinie doch nicht absolut gleich verhalten.

Zu den Beobachtungen Nr. 1 bis Nr. 3 diente als Lichtquelle eine Natriumflamme, die mittelst eines Spaltbrenners erzeugt wurde. Bei Nr 1 war die Soda zwischen zwei parallelen starken Platindrähten eingeschmolzen, der leuchtende Theil der Flamme sehr breit, aber lichtschwach; bei Nr. 2 und Nr. 3 wurde eine sehr kleine Sodaperle auf feinem Platindraht in die Flamme eingeführt, die Perle musste während der Beobachtungsreihe Nr. 3 dreimal erneuert werden. Dennoch waren in Folge der Wirkung der Beleuchtungslinse keine sprungweisen Änderungen an den Einstellungen bemerkbar. Die Helligkeit war jetzt bedeutend grösser als bei Nr. 1.

	Nr. 1		Nr. 2		Nr. 3	
ε	2°30'		1°15'		1°15'	
	A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
	2'34'	—32'	84'	—13'	75'	— 1'3
	2 6	— 4	80	— 9	60	+13·7
	1 35	+27	59	+12	68	+ 5·7
	1 40	+22	58	+13	88	—14·3
	2 4	— 2	74	— 3	86	—12·3
	2 55	—53			84	—10·3
	1 45	+17			68	+ 5·7
	2 27	—25			60	+13·7
	1 24	+38			70	+ 3·7
	1 48	+14			78	— 4·3
m	2 2		71		73·7	
	F_m ±29'		±12		±10'4	
	F_w ±19·5		± 8		± 7	

Für einen Halbschattenapparat mit Laurent'scher Platte wird der wahrscheinliche Fehler zu ±1 Minute angegeben; gewiss wird derselbe noch kleiner ausfallen, wenn man die hier angegebenen Verbesserungen bezüglich der Beleuchtung, des

Fernrohres u. s. f. auch bei den Laurent'schen Instrumenten berücksichtigt. Es bleibt aber noch zu erwägen, dass die elliptische Polarisation jener Lichtsorten die das Licht von der Wellenlänge, für welche die Platte geschliffen ist, immer begleiten werden, die Genauigkeit der Einstellung beeinträchtigen muss und dass die Platte, wenn sie nicht genau planparallel geschliffen ist, kein gleichförmig helles Gesichtsfeld erzeugen kann. Demnach dürfte die oben angegebene Construction des Halbschattenpolarisators selbst für monochromatisches Licht den Vorzug verdienen.

Für die weiteren Beobachtungen suchte ich eine möglichst constante und intensive Lichtquelle zu verwenden. Sie bestand in einem Argandgasbrenner, der nach Töpler's Angabe von einem, inwendig mit weissem Thon ausgefütterten Blechcylinder umhüllt war; die Breite der Öffnung in der Mantelfläche dieses Cylinders konnte beliebig verändert werden.

Es war beabsichtigt, die Abhängigkeit zu ermitteln, in welcher die Genauigkeit der Einstellungen zu der Grösse der Beschattung des Gesichtsfeldes oder zu dem Winkel der Hauptschnitte des Halbschattenpolarisators und zu der Helligkeit der Lichtquelle steht. Zugleich sollte über die Grösse des Einflusses ein Anhaltspunkt gewonnen werden, den die Veränderlichkeit des Auges in Bezug auf die Wahrnehmung von Helligkeitsunterschieden bei derartigen Messungen hat. Diese Veränderlichkeit zeigt sich, namentlich wenn Beobachtungen an verschiedenen Tagen oder Tageszeiten mit einander verglichen werden, so bedeutend, dass eine genauere Feststellung der oberwähnten Abhängigkeit nicht möglich ist, falls nicht naheliegende und ganz besondere Vorsichtsmassregeln angewendet werden, die jedoch gewöhnlich beim praktischen Gebrauche des Instrumentes nicht getroffen werden können und daher hier unberücksichtigt gelassen sind. Im Folgenden sind in jeder Tabelle aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen nur jene vereinigt, die ohne bedeutende Unterbrechung nach einander ausgeführt wurden.

Zwischen den Beobachtungsreihen Nr. 4 und Nr. 5 wurde eine Änderung an der Centrirung des Apparates vorgenommen, wesshalb die Mittel aus den Einstellungen nicht übereinstimmen.

	Nr. 4		Nr. 5	
ε	21'5		21'5	
	A	*D*	*A*	*D*
	19°	—5°	21	+1°
	15	—1	28	—6
	15	—1	26	—4
	11	+3	25	—3
	17	—3	20	+2
	8	+6	25	—3
	16	—2	19	+3
	13	+1	22	0
	15	—1	17	+5
	13	+1	19	+3
m	14		22	
F_m		±3°		±3'6
F_w		±2		±2·4

Mit der Änderung von ε, ändert sich natürlich auch die Einstellung; man gewinnt desshalb aus den unmittelbar folgenden Angaben kein Urtheil über die Unveränderlichkeit des Apparates. Dieselbe war jedoch eine vollkommen ausreichende, indem die Mittel aus Einstellungen die an einem Tage und den darauf folgenden bei gleichbleibendem ε gemacht wurden bis auf Grössen übereinstimmten, die innerhalb des wahrscheinlichen Fehlers des Resultates lagen, wie ich mich wiederholt überzeugt habe und aus einigen weiter unten folgenden Beobachtungen ersichtlich wird.

	Nr. 6		Nr. 7		Nr. 8	
ε	37'		46'		10'	
	A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
	52°	—7	9°	+0'5	6°	+0'8
	45	0	13	—3·5	7	—0·2
	38	+7	12	—2·5	12	—5·2
	45	0	5	+4·5	5	+1·8
	48	—3	7	+2·5	10	—3·2
	50	—5	5	+4·5	5	+1·8
	43	+2	5	+4·5	9	—2·2
	48	—3	19	—9·5	5	+1·8

Nr. 6		Nr. 7		Nr. 8	
A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
50'	—5'	5'	+4'5	3'	+3'8
42	+3	12	—2·5	6	+0·8
39	+6	8	+1·5		
40	+2	14	—4·5		
m 45		9·5		6·8	
F_m	±4'5		±3'6		±2'7
F_w	±3·0		±2·4		±1·8

Der wahrscheinliche Fehler in Nr. 8 ist der kleinste, den ich unter Anwendung der oben angegebenen Lichtquelle erhalten habe. Andere Beobachtungsreihen für einen Werth von ε, der nahe an 1°10' lag, ergaben etwas grössere wahrscheinliche Fehler, zwischen 2' und 3'.

	Nr. 9		Nr. 10		Nr. 11	
ε	1°13'		1°32'		1°48'	
	A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
	9'	+3'5	16'	— 3'3	21'	— 9'
	16	—3·5	3	+ 9·7	25	—13
	10	+2·5	1	+11·7	16	— 4
	12	+0·5	18	— 5·3	4	+ 8
	17	—4·5	17	— 4·3	8	+ 4
	17	—4·5	14	— 1·3	5	+ 7
	17	—4·5	25	—12·3	0	+12
	5	+7·5	6	+ 6·7	15	— 3
	10	+2·5	14	— 1·3	12	0
	12	+0·5			4	+ 8
					20	— 8
					16	— 4
m	12·5		12·7		12	
F_m		±4'1		±7'8		±7'9
F_w		±2'7		±5'2		±5·3

Schon bei $\varepsilon = 2°$ war die Helligkeit für mein Auge entschieden zu gross und die Einstellungen ermüdeten dasselbe bedeutender als bei geringeren Helligkeiten.

	Nr. 12		Nr. 13		Nr. 14.	
ε	2° 3'		2° 45'		3° 20'	
	A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
	4'	+21'	50'	−21'	27'	+ 4'
	19	+ 6	0	+29	66	−35
	23	+ 2	47	−18	55	−24
	15	+10	36	− 7	20	+11
	26	− 1	16	+13	10	+21
	30	− 5	45	−16	9	+22
	11	+14	31	− 2	33	− 2
	39	−14	1	+28	42	− 9
	21	+ 4	32	− 4	21	+10
	36	−11			35	− 4
	11	+14			34	− 3
					12	+19
					18	+13
					48	−17
m	25		29		31	
F_m		±11'5		±19'0		±17'3
F_w		± 7·7		±13·0		±11·7

Um die Helligkeit des Gesichtsfeldes bei constantem Werthe von ε zu verändern, habe ich vor dem Analysator Diaphragmen von verschiedenem Durchmesser angebracht, welche in den folgenden Tabellen mit d bezeichnet sind. Das Diaphragma $d = 12^{mm}$ war dasselbe wie in Nr. 14 und die Vergleichung der Mittelwerthe in Nr. 14, Nr. 15 und Nr. 16 lassen die Unveränderlichkeit des Apparates selbst für grössere Zeitintervalle (zwischen Nr. 14 einerseits und Nr. 15 und Nr. 16 anderseits liegt ein Zeitraum von einem Tage) deutlich erkennen.

	Nr. 15		Nr. 16	
ε	3° 20'		3°20'	
d	12mm		6mm	
	A	*D*	*A*	*D*
	26'	+ 6'	30'	+ 6'
	42	—10	40	— 4
	7	+25	50	—14
	57	—25	18	+18
	22	+10	28	+ 8
	22	+10	52	—16
	21	+ 9	46	—10
	32	0	17	+19
	41	—19	40	— 4
	39	— 7	42	— 6
m	32		36	
F_m	±15'3		±12'5	
F_w	±10·4		± 8·4	

Der Spaltöffnung im Mantel des Argandbrenners wurde ferner verschiedene Breite b gegeben, in Folge der getroffenen Anordnung des Apparates müssen sich dann die Helligkeiten des Gesichtsfeldes bei constantem ε sehr nahe wie die Spaltbreiten verhalten, und zwar sehr nahe und nicht genau desshalb, weil das Diaphragma vor dem Analysator, auf welches das Spaltbild projicirt wird, kreisförmig ist. Der Winkel ε wurde bei den verschiedenen Spaltbreiten so regulirt, dass die Helligkeit des Gesichtsfeldes, soweit dieses durch blosse Schätzung erreichbar war, dieselbe blieb und zwar dieselbe wie in Nr. 10; es ergaben sich dann die folgenden Einstellungen:

	Nr. 17		Nr. 18		Nr. 19	
ε	1° 26'		1° 47'		2° 12'	
b	6mm		4mm		2mm	
	A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
	11'	—0'4	8'	+0'5	6'	+ 6'4
	4	+6·6	13	—4·5	18	— 5·6
	10	+0·6	8	+0·5	25	—12·6
	15	—4·4	6	+2·5	7	+ 5 4
	11	—0·4	10	—1·5	12	+ 0·4

Nr. 17		Nr. 18		Nr. 19	
A	*D*	*A*	*D*	*A*	*D*
13°	—2'4	13°	—4'5	15°	— 2'6
12	—1·4	12	—3·5	6	+ 6·4
13	—2·4	4	+4·5	12	+ 0·4
6	+4·6	6	+2·5	7	+ 5·4
11	—0·4	5	+3·5	12	+ 0·4
				17	— 4·6
				12	+ 0·4
m	10·6	8·5		12·4	
F_m	±3'3	±3'4		±5'7	
F_w	±2·2	±2·3		±3·8	

VII.

Die sämmtlichen angeführten Zahlenwerthe zeigen, welch' überraschend grosse Genauigkeit sich schon bei mässiger Helligkeit der Lichtquelle durch entsprechende Construction des Apparates erreichen lässt. Die Genauigkeit hängt aber nicht nur von der richtigen Construction des Apparates ab, sondern auch von der Helligkeit der Lichtquelle und der Empfindlichkeit des Auges für Helligkeitsunterschiede, und diesbezüglich will ich hier auf die Formel zurückkommen, die ich schon in meiner ersten Abhandlung über polaristrobometrische Methoden auf S. 203 angeführt habe, und deren theilweise experimentelle Prüfung durch die obigen Beobachtungsreihen ebenfalls erfolgen sollte.

Bezeichnen wir mit k die Helligkeit des Gesichtsfeldes bei gegebener Lichtquelle, wenn die Hauptschnitte sämmtlicher Polarisatoren zusammenfallen, mit J die Helligkeit des Gesichtsfeldes, wenn die Hauptschnitte des Polarisators mit einander den Winkel ε einschliessen und der Analysator auf gleiche Helligkeit der Gesichtsfeldhälften eingestellt ist. Es wird dann

$$J = k \cos^2\psi = k \sin^2\varphi,$$

wenn

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

der Winkel ist, den der Hauptschnitt des Analysators mit dem Hauptschnitte des vollen Prismas am Polarisator bildet. Nach dem früher im Art. III Bemerkten ist φ nicht genau gleich $\frac{1}{2}\varepsilon$, sondern etwas kleiner; dieser Werth von φ wurde für die obigen Beobachtungsreihen jedesmal bestimmt.

Ist ferner $\Delta_1 J$ die Helligkeitsänderung in der nicht vom Halbprisma bedeckten Gesichtsfeldhälfte, welche einer Drehung des Analysators um $\Delta\varphi$ entspricht, so wird

$$\frac{\Delta_1 J}{J} = 2 \operatorname{cotan} \varphi . \Delta\varphi$$

und hieraus weiter, wenn man in

$$\operatorname{cotan} . \varphi = \sqrt{\frac{k}{J} - 1}$$

die Einheit gegen $\frac{k}{J}$, das bei wirklichen Messungen immer eine grosse Zahl ist, vernachlässiget und mit ΔJ die Helligkeitsdifferenz der beiden Gesichtsfeldhälften bezeichnet sehr nahe

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta J}{J} \frac{\tan \varphi}{4} = \frac{\Delta J}{J} \frac{\sqrt{J}}{4\sqrt{k}}.$$

Für ΔJ wollen wir jene Helligkeitsänderung nehmen, welche bei der mittleren Intensität J eben an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt. Dann wäre $\Delta\varphi$ nahe gleich dem grössten Einstellungsfehler, der in einer grösseren Zahl von Einstellungen vorkommen kann und dieser ist wieder, wie ich mich durch specielle Versuche überzeugt habe und wie auch aus den angeführten Beobachtungsreihen hervorgeht, im Mittel sehr nahe gleich dem doppelten wahrscheinlichen Fehler. Nennen wir also diesen letzteren $\Delta\varphi_1$ so können wir setzen

a) ... $$\frac{\Delta J}{J} = 8 \operatorname{cotan} \varphi . \Delta\varphi_1$$

b) ... $$\Delta\varphi_1 = \frac{\Delta J}{J} \frac{\tan \varphi}{8} = \frac{\Delta J}{J} \frac{\sqrt{J}}{8\sqrt{k}}$$

Wäre $\frac{\Delta J}{J}$ constant, d. h. unabhängig von J, so würde eine untere Grenze für $\Delta\varphi_1$ nur gesetzt sein durch die jedenfalls aus-

serst kleine Lichtintensität, die überhaupt noch eine merkbare Empfindung hervorruft und bis zu welcher dann die Beschattung getrieben werden müsste, um den kleinstmöglichsten wahrscheinlichen Fehler zu erhalten, natürlich unter der Voraussetzung, dass die Polarisationsprismen bei der gegebenen Lichtquelle diesen Grad der Beschattung erreichen lassen. Es müsste alsdann, wenn man bei grosser Beschattung beginnend, zu immer geringeren Graden derselben fortschreitet, der wahrscheinliche Fehler fortwährend wachsen, was jedoch, wie die Beobachtungen von Nr. 6 bis Nr. 14 zeigen, nicht der Fall ist. Vielmehr nähert sich F_w zuerst allerdings sehr langsam einem Minimum (für unsere Lichtquelle nahe bei $\varepsilon = 1° 10'$), um alsdann bei weiter wachsendem J oder ε rasch anzusteigen. Immerhin zeigen aber diese Beobachtungen, dass es vortheilhafter ist, zu grosse als zu geringe Beschattung zu wählen.

Wir haben demnach anzunehmen, dass $\frac{\Delta J}{J}$ Function von J,

$$\frac{\Delta J}{J} = f(J) = f(k \sin^2\varphi)$$

sei und der Verlauf dieser Function lässt sich wenigstens beiläufig aus den Beobachtungen mit Hilfe der Gleichung *a*) entnehmen, zu welchem Zwecke die Zahlenwerthe in der folgenden Tabelle zusammengestellt wurden.

Nr.	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ	18'	22'5	34'5	35'5	44'5	52'	59'	1°19'	1°35'
$\Delta\varphi_1$	8	2'4	1'8	2'7	5'2	5'3	7'7	13'	11'7
$\frac{\Delta J}{J}$	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{68}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{73}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{48}$
J	1	1·3	3·3	3·4	6	8	11	19	28

Nr.	17	18	19
φ	41'5	51'5	1° 3'
$\Delta\varphi_1$	2'2	2'3	3'8
$\frac{\Delta J}{J}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{156}$	$\frac{1}{121}$

Der reciproke Werth von $\frac{\Delta J}{J}$ kann als Mass für die Empfindlichkeit des Auges für Helligkeitsunterschiede genommen

werden und man sieht demnach, dass diese Empfindlichkeit zuerst mit wachsender Helligkeit rasch ein Maximum erreicht (das übrigens noch immer bei kleiner mittlerer Helligkeit liegt) und sodann wieder, jedoch sehr langsam abnimmt. Ferner ergeben sich für die Unterschiedsempfindlichkeit Werthe, die etwas grösser sind als sonst angegeben wird,[1] insbesondere gilt dieses von dem in Nr. 18 auftretenden Werthe.

Überhaupt dürfte der Apparat zu physiologischen Untersuchungen über die Empfindlichkeit des Auges für Helligkeitsunterschiede ganz geeignet sein und würde den Vortheil darbieten, dass auch die Spectralfarben unter genau gleichen Umständen wie das weisse Licht, namentlich bei gleicher und hinreichender Grösse der zu vergleichenden leuchtenden Flächen untersucht werden können.

Als weitere Folgerung aus Gleichung *b*) möge ferner hervorgehoben werden, dass die grösste Empfindlichkeit des Apparates nicht zusammenfällt mit der grössten Empfindlichkeit des Auges für Helligkeitsdifferenzen, denn das Minimum von $\Delta\varphi_1$ tritt für einen andern Werth von φ oder der Grösse der Beschattung ein als das Minimum für $\frac{\Delta J}{J}$ und zwar liegt das erstere, wie eine leichte Überlegung zeigt, bei einer Helligkeit, die geringer ist als diejenige, für welche das Minimum von $\frac{\Delta J}{J}$ eintritt. Auch in dieser Beziehung ist es zweckmässig, die Beschattung eher zu gross als zu klein zu wählen. In den oben angegebenen Zahlenwerthen tritt dieser Umstand zwar nicht zu Tage, würde man aber in Nr. 7 den Werth von $\frac{J}{\Delta J}$ statt zu 68, zu 100 annehmen, so erhielte man schon für $\Delta\varphi_1$ statt 2'4 die Zahl 1'6, also kleiner als $\Delta\varphi_1$ in Nr. 8. Durch sorgfältige Adaptirung des Auges für Dunkelheit dürfte es in der That möglich sein, die Empfindlichkeit bei geringeren Helligkeiten zu vergrössern und hiedurch die Genauigkeit des Apparates bei Messungen von sehr subtiler Natur, noch mehr zu steigern.

---

[1] Vergl. Helmholtz' physiologische Optik, S. 311.

Für grössere Werthe von φ, für welche das Minimum von $\frac{\Delta J}{J}$ bereits überschritten ist, wird $\Delta\varphi_1$, wie ebenfalls aus Gleichung **) hervorgeht, kleiner gemacht werden können, wenn man die Helligkeit der Lichtquelle verringert. Hiemit in Übereinstimmung sind die Beobachtungsreihen Nr. 15 und Nr. 16.

Gibt man aber bei verschiedenen Helligkeiten der Lichtquelle dem J durch entsprechende Wahl von φ immer denselben Werth, so dass also auch $\frac{\Delta J}{J}$ constant bleibt, so sollten sich die φ_1 sehr nahe verkehrt wie die Quadratwurzeln aus k verhalten. Für die Beobachtungsreihen Nr. 17 und Nr. 19 war nun das Helligkeitsverhältniss 3 : 1 und der Quotient der wahrscheinlichen Fehler $3 \cdot 8 : 22 = 1 \cdot 73$ ist in der That sehr nahe $= \sqrt{3}$.

Somit dürften auch die theoretischen Folgerungen mit den Ergebnissen der Versuche in guter Übereinstimmung sich befinden, soweit eine solche bei der grossen Veränderlichkeit, welcher die Empfindlichkeit des Auges unterliegt, erwartet werden kann.

Wie schon oben bemerkt, wurden die angeführten Versuche ohne Einschaltung einer activen Substanz gemacht. Durch die Einschaltung von Flüssigkeitsröhren können nun leicht Fehler in die Messungen gebracht werden, welche den wahrscheinlichen Fehler einer Bestimmung weit übertreffen.

Diese Fehler, ganz abgesehen von der Verminderung der Genauigkeit durch trübe oder ungleichförmig dichte Flüssigkeiten, haben ihren Grund einestheils in der prismatischen Ablenkung der Flüssigkeitsröhren bedingt durch unvollkommene Parallelität der Endflächen und der Verschlussplatten, anderseits in der Doppelbrechung des Glases der Verschlussplatten. Der erstgenannte Fehler lässt sich leicht durch exacte Ausführung, namentlich unter Anwendung von Polarisatoren mit normalem Gesichtsfelde, bei welchen eine kleine Änderung in der Neigung der durchgehenden Strahlen gegen die Längsaxe der Prismen von geringem Einfluss ist, hinreichend klein machen. Viel schwieriger ist es, die Doppelbrechung des Glases zu beseitigen, die noch überdies durch das Anpressen der Glasplatten an die Endflächen der Röhren und durch ungleichförmige Erwärmung verschiedene Grösse an einer und derselben Platte erreichen kann.

Die genannten Fehler sind ferner von der Orientirung der Röhre abhängig und ändern sich im Allgemeinen beim Drehen derselben um ihre Axe. Die Fehler wegen eines noch vorhandenen geringeren Grades der Doppelbrechung des Glases wird man am einfachsten dadurch vermeiden, dass man die Nullpunktsbestimmung bei leerer, aber bereits mit den Verschlussplatten versehenen Röhre vornimmt und sodann, ohne die Röhre von ihrem Platze zu bringen, dieselbe füllt, was vermittelst seitlich eingesetzter und eingeschliffener Röhrchen durch Ansaugen leicht geschehen kann. Es wird dann auch ein weit geringerer Druck für die Verschlussplatten genügen, als wenn man die Röhre in verticaler Lage zu füllen hat.

Endlich wäre bei Bestimmung grösserer Drehungswinkel mit einer Genauigkeit von einigen Bogensecunden auch der Einfluss des Erdmagnetismus nicht zu übersehen und um diesen zu vermeiden, die Axe des Apparates senkrecht zum magnetischen Meridian zu stellen.

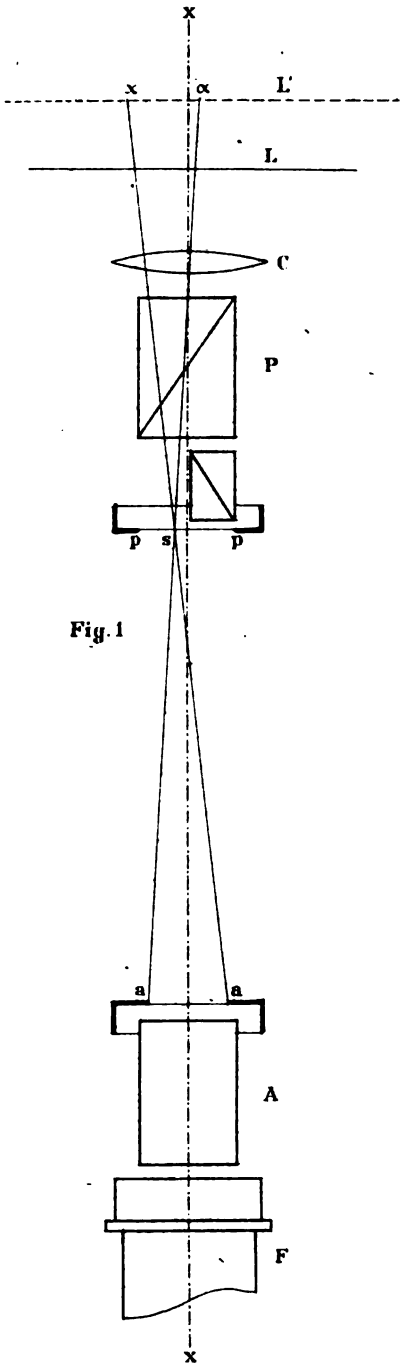


Fig. 1

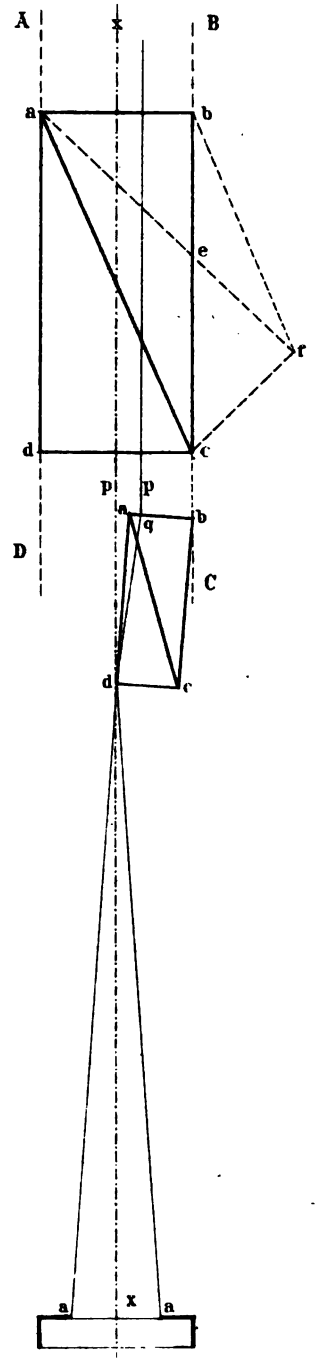


Fig. 2

Fig. 3

Lith. v F. Schima. Wien.

Druck v J. Barth Wien.

Sitzungsb.d.kais.Akad.d.W.math.naturw.Classe XCI.Bd.II.Abth.1885.

Spectrographische Untersuchung von Normal-Lichtquellen und die Brauchbarkeit der letzteren zu photochemischen Messungen der Lichtempfindlichkeit.

(Mit 1 Holzschnitt.)

Von Prof Dr. **J. M. Eder.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. April 1885.)

Zur Photometrie der optischen Helligkeit verschiedener Lichtquellen schlug Hefner-Altenek und nach ihm Siemens eine Flamme von Amylacetat von einer Flammenhöhe von 40^{mm} und einem Baumwolldocht von 8^{mm} Durchmesser vor,[1] welche ein sehr regelmässiges, constantes Licht gibt. Abney[2] und V. Schumann[3] empfehlen diese Lichtquelle auch zur Bestimmung der photographischen Empfindlichkeit verschiedener Präparate, d. h. zur „Sensitometrie".

Um die Brauchbarkeit des in einer Lampe brennenden Amylacetat zu photochemischen Zwecken zu untersuchen, photographirte ich das Spectrum desselben in meinem grossen Steinheil'schen Glas-Spectrographen und verglich die Intensität der einzelnen Theile dieses Spectrums mit derjenigen des Sonnenlichtes und anderer Normallichtquellen, welche in der Photographie gebräuchlich sind, namentlich dem Kerzenlicht, dem blau phosphorescirendem Schwefelcalcium und dem Magnesiumlicht.

Die photographische Aufnahme zeigt die in der Figur abgebildeten Resultate, wenn die Intensität der Wirkung im Blau gleich stark ist.

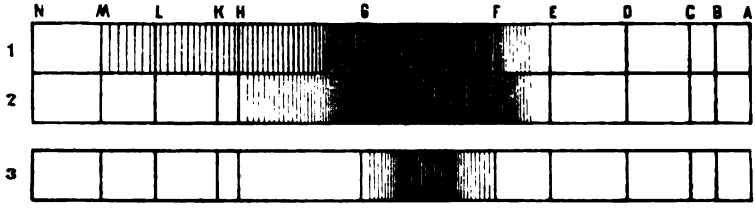
---

[1] Elektrotechnische Zeitschrift. Bd. 5, S. 20.

[2] Photographic News. 1884. S. 787.

[3] Photographisches Wochenblatt. 1885. S. 34.

Nr. 1 in der Figur zeigt das Bild des Sonnenspectrums auf Bromsilbergelatine, welches das Maximum der Wirkung in meinem Spectrographen bei $G^1/_2$ *F.* hat. Die Wirkung erstreckt sich noch kräftig, aber allmälig abnehmend weit über das sichtbare Violett hinaus ins Ultraviolett gegen *M.*



1. Spectrum des Sonnenlichtes, auf Bromsilbergelatine photographirt. — 2. Spectrum des brennenden Amylacetates, auf Bromsilbergelatine photographirt. — 3. Spectrum des blau phosphorescirenden Schwefelcalcium.

Nr. 2 stellt das Spectrumbild des brennenden Amylacetat vor. Dieses erstreckt sich nicht so weit ins Ultraviolett, ja ist sogar im sichtbaren Violett (*G* bis *H*) schon sehr schwach. Das Maximum der Wirkung liegt weiter gegen Hellblau, viel näher gegen *F* als im vorigen Falle. Bei längerer Belichtung wächst die Intensität des Spectrumbildes des Amylacetat bei *F* und weiter gegen Grün bedeutend an Intensität, jedoch bleibt die Wirkung im Violett und Ultraviolett immer relativ sehr schwach, was mit Schumann's Angaben übereinstimmt.

Daraus geht hervor, dass das brennende Amylacetat relativ sehr arm an violetten und ultravioletten Strahlen (im Vergleich mit dem Sonnenlicht) ist und dass die relative Helligkeit im Blau sehr überwiegt. Sehr stark ist auch die Helligkeit im Grün, Gelb und Roth; jedoch wirken diese Farben auf ungefärbtes Bromsilber nur wenig ein und desshalb fehlt hier in Wirkung, welche bei gefärbten Bromsilber aber sehr stark ersichtlich ist.[1]

---

[1] Vergl. des Verfassers Abhandlung „Über das Verhalten der Haloïdverbindungen des Silbers gegen das Sonnenspectrum und die Steigerung der Empfindlichkeit derselben gegen einzelne Theile des Spectrums durch Farbstoffe und andere Substanzen" (90. Band d. Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abth. Decemb. Heft. 1884).

Die Photographie des Spectrums einer gewöhnlichen leuchtenden Gasflamme gleicht sehr derjenigen des Amylacetat; es zeigt jedoch eine etwas grössere relative Helligkeit im Violett.

Diese Ergebnisse bestätigen die Untersuchungen von Crova,[1] Pickering[2] u. A., welche die optische Helligkeit des leuchtenden Theiles der Flammenspectra mittelst der quantitativen Spectralanalyse untersucht hatten, worüber ich schon an einem anderen Orte ausführlich berichtete.[3]

Es kommt noch das blaue Phosphorescenzlicht von Schwefelcalcium („Balmain's leuchtender Farbe") in Betracht, welches von Warnerke als Normallicht vorgeschlagen und seitdem zur Empfindlichkeitsbestimmung photographischer Platten mittelst „Warnerke's Sensitometer" vielfach praktisch verwendet wird.[4] Nr. 3 in der Figur zeigt das ganze sichtbare Spectrum des phosphorescirenden Schwefelcalcium. Es beschränkt sich auf ein schmales Band zwischen *G* und *F* im Blau, welches gegen Violett und Grün verschwindet. Abney,[5] welcher auch dieses Spectrum untersucht hatte, bemerkte noch ein zweites, viel schwächeres Band von *E* bis *C*; jedoch V. Schumann,[6] welcher sich mit demselben Gegenstande beschäftigte, konnte, so wenig wie ich selbst, ein Auftreten von Gelb oder Roth in dem genannten Phosphorescenzspectrum bemerken.

Es fragt sich nun: Sind die Empfindlichkeitsverhältnisse mehrerer lichtempfindlicher Präparate constant, sobald man sie bei verschiedenen Lichtquellen bestimmt?

Darüber liegen vereinzelte Angaben vor: Abney[7] fand, dass Bromsilbergelatineplatten beim blauen Phosphorescenzlicht

---

[1] Beiblätter zu d. Annal. d. Physik u. Chem. Bd. 2, S. 655.

[2] Ibid. Bd. 4, S. 728.

[3] Eder's Ausführliches Handbuch der Photographie. 1884. I. Theil. S. 102.

[4] S. Eder's Ausführliches Handbuch der Photographie. 1884. I. Theil. S. 201 und 3. Theil, 9. Heft.

[5] Photographic News. 1882. S. 230.

[6] Photograph. Wochenblatt. 1885. S. 35.

[7] Photographic News. 1882. S. 230. S. auf Eder's Handbuch der Photographie. 1885. II. Theil. S. 42.

in Warnerke's Sensitometer viel empfindlicher als nasse Jodbromcollodionplatten erscheinen, während die Differenz bei Tageslicht oder Gaslicht nicht so gross ist. Pickering[1] untersuchte 15 verschiedene „Bromsilbergelatineplatten" des Handels, welche entweder reines Bromsilber oder Bromsilber neben Jodsilber und Chlorsilber enthielten. Es schwankte das Verhältniss der Lichtempfindlichkeit je nach der verwendeten Lichtquelle bedeutend. Z. B. wiesen einige Platten, welche bei Gaslicht gleich empfindlich waren, bei Tageslicht eine zwei- bis dreissigfache Verschiedenheit der Empfindlichkeit auf.

Ich dehnte meine photometrischen Versuche auf Bromsilber-, Jodbromsilber-, Chlorsilber-Gelatineemulsion, nasses Jodbromcollodion und gefärbte (eosinhaltige) Bromsilber-Gelatineemulsion aus und bezog Tageslicht, Gaslicht, Hefner-Altenek's Amylacetatlicht, Warnerke's blaues Phosphorescenz-Normallicht und Magnesiumlicht in meine Untersuchungen ein.

Die Resultate sind übersichtlich in nachstehender Tabelle geordnet.

Die Lichtempfindlichkeit von	Lichtempfindlichkeit von		Für die Lichtquelle
Bromsilbergelatine verhält sich zu der	nassem Jodbromcollodion wie	1 : 1/3	Tageslicht
	" " " "	1 : 1/10	blaues Phosphorescenzlicht
	" " " "	1 : 1/4	Amylacetatlicht
	Chlorsilbergelatine wie	1 : 3/4 bis 1/7	Tageslicht
	" " "	1 : 1/10 bis 1/50	Amylacetatlicht
	" " "	1 : 3/4 bis 1	Magnesiumlicht
	eosinhältiger Bromsilbergelatine wie	1 : 1/3 bis 9/10	Tageslicht
	" " " " "	1 : 1 bis 8	Amylacetatlicht

[1] Photographic. Journal. 1885. S. 71.

Die Lichtempfindlichkeit von	Lichtempfindlichkeit von		Für die Lichtquelle
Bromsilbergelatine verhält sich zu der	eosinhältiger Bromsilbergelatine wie	1:10 bis 60	Natriumlicht[1]
	„ „ „ „ „	1:1/5 bis 1/3	blaues Phosphorescenzlicht
	Jodbromsilbergelatine (fertige Bromsilbergelatine mit 10 bis 20 % Jodsilbergelatine gemischt)	1:1/2 bis 1/3	Tageslicht
	„ „ „ „ „	1:1 1/2 bis 2	blaues Phosphorescenzlicht

Daraus folgt deutlich, dass das Verhältniss der Empfindlichkeit verschiedener lichtempfindlicher Substanzen sehr bedeutend schwankt, je nach der Qualität der Lichtquelle. Diese Schwankungen sind so bedeutend, dass sie beim ungefärbten Bromsilber und beim eosinhaltigem Bromsilber das Hundertfache ausmachen können, je nachdem man es bei Tageslicht oder gelbem Natriumlicht prüft. Bei Brom- und Chlorsilbergelatine schwankt z. B. das Verhältniss der Empfindlichkeit beider um das Zehnfache, bei Bromsilber- und Jodbromsilbergelatine um das Zwei- bis Vierfache, je nachdem man bei Tageslicht oder bei Amylacetatlicht (oder was ungefähr dasselbe ist, bei Gas- oder Kerzenlicht) die sensitometrische Vergleichung vornimmt.

Der Schlüssel zu dieser Erscheinung liegt selbstverständlich in der verschiedenen Farbenempfindlichkeit der einzelnen photographischen Präparate; so z. B. hat Chlorsilbergelatine das Maximum der Lichtempfindlichkeit für die Grenze des sichtbaren und Ultraviolett, Bromsilbergelatine für Hellblau (vergl. die oben citirte Abhandlung des Verfassers); nasses Jodbromcollodion liegt zwischen beiden. Wenn nun auch die Spectra der verschiedenen Lichtquellen eine abweichende Helligkeit in den verschie-

[1] Eine nicht leuchtende Gasflamme, in welche Chlornatrium eingeführt wurde.

denen farbigen Theilen ihres Spectrums zeigen, so müssen wohl bedeutende Schwankungen im Verhältniss der Lichtempfindlichkeit auftreten.

Weiters folgt daraus, dass weder die sensitometrischen Bestimmungen bei Gas- oder Amylacetatlicht, noch jene bei blauem Phosphoresenz- oder bei Magnesiumlicht auch für Tageslicht Geltung haben. In einigen Fällen nähern sich die Resultate des Amylacetatlichtes mehr dem Tageslicht, als das Phosphorescenzlicht; in anderen Fällen aber nicht. Arbeitet man dagegen mit ein und derselben Silberverbindung (z. B. Bromsilber) in verschiedenen molecularen Zuständen von verschiedenen Lichtempfindlichkeitsgraden[1], so sind die Resultate nicht so abweichend. Wenn die Empfindlichkeit einer durch Digestion „gereiften" Bromsilbergelatine bei der Probe in Warnerke's Sensitometer (Phosphorescenzlicht) sich als zweimal so empfindlich als vor dem „Reifen" erwies, so fand ich ungefähr dasselbe Resultat bei Tageslicht. Für solche Fälle wird sich der Gebrauch von Warnerke's Sensitometer oder anderen derartigen Instrumenten noch immer empfehlen, wenn es sich um keine absolut genauen Zahlen handelt.

[1] Z. B. Bromsilbergelatine, welche durch längere Digestion immer mehr und mehr lichtempfindlich gemacht wird (sogenanntes „Reifen").

XII. SITZUNG VOM 15. MAI 1885.

Herr Raoul Ritter v. Dombrowski in Wien übermittelt ein Exemplar seines jagdzoologischen Werkes: „Die Geweihbildung der europäischen Hirscharten. Naturwissenschaftliche Studie."

Das w. M. Herr Prof. E. Linnemann in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Das Oxydationsproduct des Propylenoxydes durch Silberoxyd."

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung des Herrn Rudolf v. Limbeck, Assistent am physiologischen Institut der deutschen Universität zu Prag: „Zur Kenntniss des Baues der Insectenmuskeln."

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Adolf Weiss in Prag übersendet eine Mittheilung: „Über die Fluorescenz der Pilzfarbstoffe".

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Arithmetische Notiz".

Herr Prof. Dr. G. v. Escherich in Wien übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen".

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. v. Langer überreicht eine Abhandlung: „Über den Sinus cavernosus der harten Hirnhaut."

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Guido Goldschmiedt ausgeführte Arbeit: „Untersuchungen über Papaverin." (I. Abhandlung.)

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 245, 248 & 249. Tomo XXI. Habana, 1884—85; 8°.

Académie, Impériale des sciences de St. Pétersbourg: Mémoires. Tome XXXII, Nr. 13. St. Pétersbourg, 1884; 4°.

— royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 54e année, 3e série, tome IX. Nr. 3. Bruxelles, 1885; 8°.

Accademia pontificia de' nuovi Lincei: Atti, Anno XXXVI, sessione VIII—XI. — Anno XXXVII, sessione I. Roma, 1884; 4°.

— reale dei Lincei: Atti. Anno CCLXXXII 1884—85. Serie 4a. Rendiconti. Vol. I°. Fascicoli 9° & 10°. Roma, 1885; 4°.

British Museum: Catalogue of the Birds. Vol. X. London, 1885; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Österreichische Statistik. VIII. Band, 3. Heft. Statistik des Sanitätswesens für das Jahr 1882. Wien, 1885; gr. 4°.

— — k. k. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale: Mittheilungen. XI. Band, 1. Heft. Wien, 1885; gr. 4°.

Comité, geologisches: Nachrichten, 1884; Nr. 5. 7—10. Band, 1885; Nr. 1—3. St. Petersburg; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome C. 1er semestre. No. 17. Paris, 1885; 4°.

Gesellschaft, zoologisch-botanische in Wien: Verhandlungen Jahrgang 1884. XXXIV. Band. Wien, 1885; 8°. — Personen-, Ort- und Sachregister der dritten zehnjährigen Reihe 1871 bis 1880 von August Wimmer. Wien, 1884; 8°.

— naturwissenschaftliche, Isis in Dresden: Sitzungsberichte und Abhandlungen. Jahrgang 1884. Juli bis December. Dresden, 1885; 8°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XX. Band. Mai-Heft 1885. Wien; 8°.

— physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XVII. Nr. 3. St. Petersburg, 1885; 8°.

Gesellschaft, kaiserlich russische geographische: Nachrichten. Tome XIX. 1883. Nr. 2. St. Petersburg, 1883; 8°. Tome XX. 1884. Nr. 2—6. St. Petersburg, 1884; 8°. Tome XXI. 1885; Nr. 1. St. Petersburg, 1885; 8°. Bericht der ostsibirischen Abtheilung im Jahre 1883. St. Petersburg, 1884; 8°.

Institute, the North of England of mining and mechanical Engineers: Transactions. Vol. XXIV, part. II. Newcastle-upon-Tyne, 1885; 8°. — An account of the Strata of Northumberland and Durham as proved by Borings and Sinkings. F—K. Newcastle-upon-Tyne, 1885; 8°.

Journal, the American of Science. Vol. XXIX. Nrs. 170—172. New Haven, 1885; 8°.

Kiew: Universitäts-Nachrichten. Tome XXIV, Nr. 1 & 2. Kiew, 1885; 8°.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag: Jahresbericht. Vereinsjahr 1884—1885. Prag, 1885; 8°.

Meteorological Department of the Government of India: Report on the administration in 1883—84, Calcutta; gr. 4°. Indian meteorological Memoirs. Vol. II, part III. Calcutta 1884; gr. 4°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Militär-statistisches Jahrbuch für das Jahr 1879. I. Theil. Wien, 1884; gr. 4°. — Für die Jahre 1880, 1881 und 1882. I. und II. Theil. Wien, 1884—85; gr. 4°.

Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique: Service de la carte géologique du royaume. Explications de la feuille de Heers par M. A. Rutot et par M. E. van den Broeck; — de la feuille de St. Trond par M. A. Rutot et par M. E. van den Broeck; — de la feuille de Landen par M. A. Rutot et par M. E. van den Broeck; — de la feuille de Lamorteau par M. J. C. Purves; — de la feuille du Ruette par M. J. C. Purves; — de la feuille de Virton par M. J. C. Purves; — de la feuille de Modave par M. C. Dupont et par Michel Mourlon et M. J. C. Purves. Bruxelles, 1884; 8°.

Nature. Vol. XXXII. No. 810. London, 1885; 8°.

Observatorio de Madrid: Observaciones meteorologicas durante el anno 1879, 1880 und 1881. Madrid, 1881—1883; 8°.

Observatorio de Madrid: Resumen de las Observaciones meteorologicas efectuadas en la peninsula y algunas de sus istas adyacentes durante los annos del mismo nombre 1876—1880 et 1882. Madrid, 1883—84; 8°.

— — Anuario: Anno XVIII. 1880. Madrid, 1879; 8°.

Osservatorio, R. astronomico di Brera in Milano: Osservazioni meteorologiche eseguite nell' anno 1884 da E. Pini. Milano; 4°.

Società Italiana di Antropologia, Etnologia e Psicologia comparata: Archivio. Vol. XIV, fascicolo 3°. Firenze, 1884; 8°.

Societas pro Fauna et Flora fennica: Meddelanden. 11. Häftet. Helsingfors, 1885; 8°.

Société Impériale de Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1884. Nr. 2. Moscou, 1884; 8°.

— des Ingenieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4e série, 38e année, 2e cahier. Paris, 1885; 8°.

Society, the American geographical: Bulletin. 1884. Nr. 4. New-York; 8°.

— the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLV. Nr. 6. London 1885; 8°.

— the royal of Victoria: Transactions and Proceedings. Vol. XX. Melbourne, 1884; 8°.

— the zoological of London: Proceedings and the scientific meetings for the year 1884. Part IV. London, 1885; 8°.

Tübingen, Universität: Akademische Schriften pro 1883—84. — 27 Stücke; 4° und 8°.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung zu Hamburg: Verhandlungen 1878—1882. V. Band. Hamburg 1883; 8°.

Das Oxydationsproduct des Propylenoxydes durch Silberoxyd.

Von **Eduard Linnemann.**

(Chemisches Laboratorium der k. k. deutschen Universität zu Prag.)

Vor Jahren hatte ich einmal die Vermuthung ausgesprochen, dass das Acrolein ähnlich dem Propylenoxyd constituirt sein könne. Desshalb musste es mich überraschen, als ich etwa vor sieben Jahren die Beobachtung machte, dass eine wässerige Lösung von Propylenoxyd bei gewöhnlicher Temperatur Silberoxyd reducire unter Bildung eines löslichen Silbersalzes, was bis heute für die Körper aus der Reihe des Propylenoxyds unbekannt geblieben.

Das Propylenoxyd, welches dazu dienen sollte die Natur der bei dieser Oxydation entstehenden Säure näher kennen zu lernen, war nach Oser aus bei 105° bis 128° C. siedendem Propylenoxychlorid aus Glycol, nach Bielohoubek aus Glycerin dargestellt und ging unter 35° C über.

6 Grm. Propylenoxyd wurden mit 150 Grm. sehr gut gewaschenem, alkalifreiem frisch gefälltem Silberoxyd (1 Molecul $C_3 H_6O$ auf 6 Molecul Ag_2O) mit beiläufig 300 Cc. Wasser am 16. April 1880 zusammengebracht und in einem zugeschmolzenen Glasballon im Dunklen aufbewahrt. Obgleich eine reichliche Reduction und Bildung von Silberspiegel sehr bald bemerkbar wurde, kam ich jedoch erst am 16. Februar 1884 zur Öffnung des Gefässes. Es zeigte sich beim Öffnen kein Gasüberdruck im Innern des Gefässes, wohl aber ein äusserst schwacher Geruch nach Propylenoxyd. Die Lösung reagirte neutral, hielt reichlich Silber, reducirte sich beim Kochen nicht merklich und lieferte beim Verdampfen auf dem Wasserbade ohne merkliche Silber-

abscheidung eine trokene Krystallisation von Silbersalz. Die direct dem geöffneten Gefässe entnommene Lösung des Silbersalzes enthielt keinen durch Destillation abscheidbaren flüchtigen Körper.

Die Mischung von Silber, Silberoxyd und Silbersalz wurde mit destillirtem Wasser bis zur ganz schwachen Silberreaction in der Kälte ausgezogen, und die filtrirte Silberlösung bei gewöhnlicher Temperatur an der Luft verdunstet, wobei bis zu zwei Centimeter lange, glänzende, bündelförmig vereinigte Nadeln erhalten wurden. Die Gesammtmenge des möglichst sorgfältig gesammelten Silbersalzes betrug 6·5 Grm.

Zur Reinigung wurde das Salz in möglichst wenig kochendem Wasser gelöst, filtrirt und in mehreren Fractionen krystallisirt, wobei bis zu 1 Cm. lange, durchsichtige, sehr dünne glänzende Nadeln erhalten wurden.

Die Analyse des Silbersalzes ergab folgendes:

1. Fraction I 0·2925 Grm. gaben: 0·1889 Grm. Ag.
2. „ III 0·2325 „ „ 0·1503 „ Ag.
3. „ IV 0·3422 „ „ 0·2210 „ Ag.
4. „ III 0·6607 „ „ 0·3470 „ CO_2,

und 0·1160 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_2H_3AgO_2$:	Gefunden		
	III	I	IV
C_2 ..... 14·37	14·32		
H_3 ..... 1·79	1·95		
Ag ..... 64·67	64·64;	64·58;	64·58;

Es folgt hieraus, dass sich das Propylenoxyd keineswegs gleichartig dem Acrolein gegen Silberoxyd verhält, sondern statt einer Säure von gleichem Kohlenstoffgehalte zu liefern, eine solche von geringerem Kohlenstoffgehalte gibt, nämlich „Essigsäure." Das zweite Oxydationsproduct des Propylenoxyds, die „Ameisensäure", ist wohl zweifellos nach dieser langen Zeit in Form von kohlensaurem Silber vorgelegen.

Stellt sich demnach bei dieser Reaction ein auffallender Unterschied zwischen Propylenoxyd und Acrolein heraus, so springt eine ebenso auffallende Ähnlichkeit zwischen den beiden Isomeren

Propylenoxyd und Aceton in die Augen. Beide liefern mit nascirendem Wasserstoff „Isopropylalkohol“ und mit Silberoxyd „Essigsäure“ und Ameisensäure.

Es wäre jedoch kurzsichtig zu übersehen, dass die erhaltene Menge Silberacetat keineswegs einer glatten Oxydation von Propylenoxyd zu Essigsäure und Ameisensäure entspricht, denn aus 6 Grm. Propylenoxyd hätten mindestens 18 Grm. Silberacetat erhalten werden müssen, obgleich nur 6·5 Grm. erhalten wurden. Da keine flüchtigen Substanzen vorhanden waren, so ist wohl nur die Möglichkeit offen, dass ein in kaltem Wasser unlösliches Silbersalz nebstbei entstanden, wodurch der Ausfall gedeckt würde. Ich gestehe, dass ich, gezwungen für andere Zwecke das Silber bald wieder disponibel zu haben, den in Wasser unlöslichen Silberrückstand nicht weiter untersuchte, sondern eingeschmolzen habe, und so zu meinem nachträglichen Leidwesen nicht einmal entscheiden konnte, ob die der gefundenen Essigsäure entsprechende Menge ameisensauren Silbers in Form von Silbercarbonat vorhanden war. Da aber das Ergebniss meiner Untersuchung auch noch eine andere Deutung zulässt, nämlich, dass der Glycol aus Glycerin und somit auch das aus ihm gewonnene Propylenoxyd doch nicht ganz mit dem gewöhnlichen Glycol zusammenfällt, so wäre es wünschenswerth, dieses Thema von Neuem aufzunehmen.

Untersuchungen über Papaverin.

I. Abhandlung.

Von Dr. **Guido Goldschmiedt.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

Das Papaverin wurde im Jahre 1848 von Merck[1] im Opium entdeckt und ihm die Formel $C_{20}H_{21}NO_4$ zugeschrieben. Durch die Analysen einer Reihe von Salzen, die später noch von Merck[2] untersucht wurden, sowie eines Nitro- und eines Bromproductes, welche letztere Andersen[3] studirt hatte, und deren Zusammensetzung mit obiger Formel gut vereinbar war, wurde diese unterstützt. Hesse[4] hingegen hat für Papaverin auf Grund von Analysen einer Substanz, die einer Reinigung durch Umkrystallisiren des oxalsauren Salzes unterworfen worden war, die Ein Kohlenstoffatom mehr im Molekül enthaltende Formel $C_{21}H_{21}NO_4$ aufgestellt und fand auch bei der Untersuchung einer Anzahl von Salzen und Doppelsalzen mit dieser Formel in befriedigender Übereinstimmung stehende Zahlen. Überdies haben auch Beckett und Wright[5] Hesse's Formel bestätigt. Trotzdem ist dieselbe in einigen neueren Werken nicht aufgenommen worden, beispielsweise in Kolbe's ausführlichem Lehrbuch der organischen Chemie, bearbeitet von E. v. Meyer und A. Weddige, wo ausdrücklich gesagt ist, dass, da die ältere Formel auch durch Analysen der wichtigsten Salze festgestellt sei, bevor bestimmtere Beweise für die neuere gebracht würden,

---

[1] Liebig's Annalen LXVI, pag. 125.
[2] „ „ LXXIII, „ 50.
[3] „ „ XCIV, „ 235.
[4] „ „ CLIII, „ 75 und Supplementb. VIII, pag. 289.
[5] Jahresbericht 1876, pag. 813.

die erstere beibehalten werde, und in A. und Th. Husemann und Hilger, Die Pflanzenstoffe 2. Auflage, wo Hesse's Formel überhaupt nicht vorkömmt, obwohl dessen Arbeiten citirt werden. Ich werde auf diesen Punkt, welcher den Gegenstand vorliegender Arbeit in keiner Weise berührt, in einer nächsten Abhandlung zurückkommen, sobald diessbezügliche Versuche abgeschlossen sein werden.

Hesse machte darauf aufmerksam, dass nach seiner Methode gereinigtes Papaverin, sich in der Kälte nicht mit violetter Farbe in concentrirter Schwefelsäure löse, dass diese Farbenreaction vielmehr erst beim Erwärmen eintrete und auf die Gegenwart von Verunreinigungen schliessen lasse, wenn sie mit der nöthigen Vorsicht ausgeführt, sich bereits in der Kälte zeige. Auch die Salze des Papaverins lösen sich farblos in kalter Schwefelsäure auf.

Ich habe das zu nachstehend beschriebenen Versuchen verwendete Papaverin unter der Bezeichnung „purissimum" von der Firma Merck in Darmstadt bezogen; es färbte kalte Schwefelsäure nur ganz schwach violett, beim Erwärmen bewirkte eine relativ sehr geringe Menge des Alkaloids schon eine äusserst intensive dunkelviolette Färbung. Der Schmelzpunkt des Präparates lag bei 147°, wie er übereinstimmend von allen Beobachtern dem Papaverin zugeschrieben wird. Ein Theil dieses Präparates wurde der Reinigung durch Umwandlung in das oxalsaure Salz und Umkrystallisiren desselben nach Hesse's Vorgang unterworfen; es löste sich dann sowohl dieses Salz, wie das aus demselben wieder abgeschiedene Papaverin, vollkommen farblos in concentrirter Schwefelsäure auf. Der Schmelzpunkt der Base war durch diese Operationen nicht geändert. Nachdem festgestellt, worden war, dass diese reine Substanz bei den vorliegenden Versuchen sich vollkommen gleich dem käuflichen Papaverin verhielt, konnte für die späteren Operationen von dieser Reinigung abgesehen werden.

In einer vorläufigen Mittheilung[1] habe ich das Verhalten des Papaverins gegenüber verschiedenen Reagentien kurz beschrieben. Nach den damaligen Resultaten schien die Oxydation mit über-

[1] Monatshefte für Chemie IV, pag. 704.

mangansaurem Kalium wenig Erfolg zu versprechen, es ist mir jedoch durch Abänderung der Versuchsbedingungen gelungen, bei der Einwirkung des genannten Reagens auf Papaverin, sehr gut charakterisirte krystallisirte Verbindungen zu erhalten, und zwar ist der Erfolg der Reaction ein Anderer, je nachdem die Oxydation in wässriger oder in schwefelsaurer Lösung ausgeführt wird. Gegenstand der vorliegenden Mittheilung ist die

Einwirkung von übermangansaurem Kalium in wässeriger Lösung.

30 Grm. fein gepulvertes Papaverin werden in einer Porzellanschale mit einem Liter Wasser übergossen und successive unter fortwährendem Kochen 200 Grm. übermangansaures Kalium, in 3 bis 4 Liter heissen Wassers gelöst, hinzugefügt. Es wird Kohlensäure eingeleitet und bis zur vollständigen Entfärbung gekocht. Nach dem Erkalten wird die hellbernsteingelbe Flüssigkeit abfiltrirt und der Manganniederschlag wiederholt mit Wasser ausgekocht. Wenn dieses nichts mehr aufnimmt, wird der durch Pressen von der wässerigen Flüssigkeit befreite Niederschlag bis zur Erschöpfung mit Alkohol extrahirt, wodurch nach dem Abdestilliren des Alkohols das unoxydirt gebliebene Papaverin zurückgewonnen wird. Das wässerige Filtrat wird so weit concentrirt, dass gerade noch alle Salze in Lösung bleiben, nach dem Erkalten noch eine geringe zur Ausscheidung gekommene Menge Papaverin, das in heissem Wasser nicht ganz unlöslich ist, abfiltrirt und das Filtrat dann am Wasserbade zur Trockene gebracht. Die gepulverte Salzmasse, welche neben den Kalisalzen der entstandenen organischen Säuren sehr viel kohlensaures Kalium enthält, wird mehrmals mit neuen Mengen Alkohols am aufsteigenden Kühler gekocht und das Löslichе von dem Unlöslichen durch Filtration an der Saugpumpe getrennt. Der Alkohol wird nun beinahe vollständig abdestillirt, der braune halbfeste Rückstand mit möglichst wenig Wasser in Lösung gebracht, die wässerige Lösung zur Vertreibung des noch vorhandenen Alkohols erwärmt und nach dem Erkalten mit Salzsäure versetzt, so lange hiedurch noch eine Ausscheidung bewirkt wird. Diese Ausscheidung ist, wenn der Zusatz der Säure zu einer concentrirten Lösung geschieht, ölig, zu einer verdünnten,

ein meist ziemlich stark gelbgefärbter Niederschlag; in ersterem Falle erhärtet er bald und der hiebei entstehende harzige Klumpen zerfällt schliesslich zu einem gelben krystallinischen Pulver, wenn er mit geringen Mengen kalten Wassers öfters durchgearbeitet wird. Der Niederschlag wird schliesslich filtrirt und gewaschen und die Waschwässer mit dem Filtrate vereinigt. Der Niederschlag wird nun aus stark verdünntem Weingeist umkrystallisirt, wobei eine Trennung in ein schwerer lösliches, aber bei niederer Temperatur und in ein leichter lösliches bei höherer Temperatur schmelzendes Säuregemische bewirkt wird. Durch wiederholtes Umkrystallisiren der so erhaltenen Fractionen aus Wasser, absolutem Alkohol, schwachem Weingeist oder Äther in zweckentsprechender Reihenfolge gelingt es bald, diese Gemische in zwei Säuren von constantem Schmelzpunkt zu zerlegen, von welchen die eine (*A*) sich bei circa 180°, die andere (*B*) bei 233°, letztere unter gleichzeitigem stürmischen Aufbrausen verflüssigt.

Das Filtrat von diesem Niederschlage wird mit Äther mehrmals ausgeschüttelt und wenn dieser nichts mehr aufnimmt, die Flüssigkeit concentrirt, abermals mit Äther ausgeschüttelt und dies öfter wiederholt, bis sich in der Lösung Chlorkaliumkrystalle auszuscheiden beginnen, welche entfernt werden, während die Flüssigkeit, nahezu zur Trockene gebracht, mit Alkohol extrahirt wird. Der Rückstand dieses alkoholischen Extractes ist dunkelbraun gefärbt, schmierig, übrigens nicht beträchtlich; nach längerem Stehen sind ziemlich grosse körnige Krystalle, in der Schmiere eingebettet, zu bemerken, welche herausgenommen, zwischen Fliesspapier zerdrückt und aus Wasser einige Male umkrystallisirt, schliesslich den Schmelzpunkt von 180° haben; während des Schmelzens ist heftiges Aufbrausen zu beobachten, wodurch diese Substanz sich von jener mit (*A*) bezeichneten leicht unterscheiden lässt (*C*). Der Rückstand vom Ätherauszug enthält alle drei bisher aufgeführten Substanzen, die Substanz (*C*) vorwiegend, diese ist die leichtest lösliche in allen Lösungsmitteln, und die Trennung derselben von den anderen mit Schwierigkeiten nicht verbunden.

Die mit Alkohol extrahirte Salzmasse, vorzugsweise kohlensaures Kalium, wird jetzt in Wasser gelöst, auf ein bestimmtes

Volum gebracht, in einem aliquoten Theile eine Kaliumbestimmung gemacht und die Hauptmenge mit der zur Bindung des Kaliums nöthigen Menge Schwefelsäure versetzt. Die Flüssigkeit bleibt zunächst klar, bei mässigem Erwärmen am Wasserbade trübt sie sich aber bald und es scheiden sich Kryställchen ab, welche nur abfiltrirt und gewaschen zu werden brauchen, um vollkommen rein zu sein. Diese Substanz ist identisch mit der bei 233°, unter Zersetzung schmelzenden Säure (*B*). Die Menge der auf diese Weise in diesem Antheile des Reactionsproductes zu erhaltenden Säure ist sehr verschieden, sie beträgt bis zu 18 Percent des angewandten Papaverins oder sie kann auch so gering sein, dass von dieser schwerlöslichen Säure beim neutralisiren des kohlensauren Kaliums mit Schwefelsäure gar nichts ausfällt, sondern höchstens nach Concentration der Flüssigkeit sehr kleine Mengen erhalten werden. Man kann dies nach Belieben herbeiführen, je nachdem man das eingedampfte Filtrat vom Manganniederschlage scharf trocknet und mit absolutem Alkohol extrahirt, in welchem Falle das darin sehr schwerlösliche Kalisalz nur in geringen Mengen aufgenommen wird, oder indem man nur eindampft und mit gewöhnlichem Weingeist extrahirt, wodurch die Hauptmasse dieses Kalisalzes mit in Lösung geht.

Das Filtrat von dieser Säure wird nun bis zur beginnenden Krystallisation concentrirt, mit dem anderthalbfachen Volum Alkohol versetzt und die grossen Mengen schwefelsauren Kalis, welche dadurch ausgefällt werden, abfiltrirt. Der von Alkohol befreiten Flüssigkeit wird nun schwefelsaures Kupfer zugesetzt, wodurch zunächst grüne Färbung, nach weiterem Zusatz Abscheidung eines hellblauen Niederschlages veranlasst wird. Derselbe wird abfiltrirt, gewaschen und unter Wasser kochend mit Schwefelwasserstoff zerlegt; das abfiltrirte Schwefelkupfer muss wiederholt mit Wasser anhaltend unter gleichzeitigem Einleiten von Schwefelwasserstoff ausgekocht werden, um die Säure vollständig zu gewinnen. Schliesslich werden die rothgefärbten Lösungen zur Krystallisation eingedampft. Durch Fractioniren gelingt es bald, die zwei hier vorhandenen und in ziemlich gleicher Menge gebildeten Säuren von einander zu trennen. Die eine ist Oxalsäure, die andere ist stickstoffhältig, schmilzt bei 249°, nachdem sie schon bei 190° sich zu schwärzen beginnt (*D*). Die

Filter, durch welche diese rothgefärbten Lösungen gegangen waren, färbten sich an den Rändern immer stark roth; dieselbe Erscheinung, welche durch die Säure (*D*), wie sich später zeigen wird, hervorgerufen wird, wurde auch bei den übrigen Antheilen des Reactionsproductes regelmässig beobachtet, doch ist die dort vorhandene Menge dieser Säure so gering, dass dieselbe nicht aufzufinden war.

Die hier beschriebene Art der Behandlung des Reactionsproductes von übermangansaurem Kalium auf Papaverin hat sich nach zahlreichen, vielfach variirten Versuchen, bei welchen auch die relativen Mengen der Substanzen innerhalb ziemlich weiter Grenzen abgeändert wurden, als die zweckmässigste bewährt. Die Ausbeute an Säure (*B*), welche, wie aus Nachstehendem ersichtlich wird, zunächst Interesse verdient, kann zwar, wenn man sie auf die Quantität wirklich oxydirten Papaverins berechnet, durch Verminderung von Oxydationsmittel etwas gesteigert werden, hingegen bleibt dann mehr Papaverin unoxydirt und es bilden sich nicht unbeträchtliche Mengen schmieriger Producte, welche bei dem empfohlenen Verhältnisse gering sind.

Der Procentsatz an zurückgewonnenen Papaverin ist übrigens selbst bei scheinbar immer gleichartigem Arbeiten, bei verschiedenen Operationen ein wechselnder; er schwankt zwischen 12 und 20 Percent und ist wohl von der Feinheit der Vertheilung des zur Oxydation verwendeten Alkaloids wesentlich abhängig.

Um festzustellen, ob bei der geschilderten Behandlung neben den noch ausführlich zu besprechenden Säuren auch basische Substanzen entstehen, wurde das alkalische Filtrat vom Manganniederschlag destillirt und das Destillat in vorgelegter Salzsäure aufgefangen. Nach dem Eindampfen hinterlässt diese Flüssigkeit ein weisses, an der Luft nicht zerfliessendes Salz, welches in das Platindoppelsalz umgewandelt wurde. Die Analyse bewies, dass es Platinsalmiak war.

0·8355 Grm. Platindoppelsalz gaben 0·3675 Grm. Platin.

in 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $2NH_4Cl+PtCl_4$
Pt.....	43·98	43·89

Untersuchung der bei circa 180° schmelzenden Säure (*A*).

Zur vollständigen Reinigung dieser Substanz genügt es in der Regel, sie noch einige Male aus Wasser oder verdünntem Weingeist umzukrystallisiren, eventuell unter Anwendung von Thierkohle. In den selteneren Fällen, wo dieselbe besonders stark gefärbt gewesen ist, habe ich mit Vortheil die Fällung mit Bleizucker und nachfolgende Zerlegung des Niederschlages mit Schwefelwasserstoff angewandt. Aus concentrirter heisser Lösung wird die Substanz wasserhältig, aus kalter verdünnter wasserfrei in schönen Nadeln erhalten. Die Säure löst sich ziemlich leicht in kochendem Wasser, sehr leicht in Alkohol und Äther und ist sublimirbar. Die angeführten Eigenschaften sind die der Veratrum- oder Protocatechudimethyläthersäure eigenthümlichen, womit auch die Resultate der Analyse übereinstimmen.

I. 0·2195 Grm. Substanz, bei 100° getrocknet, gaben 0·4791 Grm. Kohlensäure und 0·1019 Grm. Wasser.

II. 0·2231 Grm. Substanz, bei 100° getrocknet, gaben 0·4889 Grm. Kohlensäure und 0·1068 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_9H_{10}O_4$
	I	II	
C.....	59·00	59·76	59·34
H.....	5·15	5·28	5·49

Der Gehalt an Krystallwasser beträgt Ein Molekül.

0·4326 Grm. wasserhältige Substanz verloren bei 100° 0·0403 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_9H_{10}O_4+H_2O$
H_2O	9·31	9·00

Es ist die vorliegende Säure somit zweifellos als Veratrumsäure charakterisirt. Bezüglich des Schmelzpunktes derselben, gehen die Angaben der Chemiker, welche sich mit derselben

beschäftigt haben, auseinander. Gräbe und Borgmann[1], welche die Veratrumsäure aus Methyleugenol gewonnen haben, fanden 179 bis 180°, Koelle[2], der sie durch Methylirung von Protocatechusäure erhielt 170 bis 171°, Tiemann und Matsmoto[3] für die Säure aus Methyleugenol 174 bis 175°, Matsmoto[4] beobachtete denselben Schmelzpunkt, Tiemann und Mendelsohn[5] geben für die durch Oxydation von Dimethylhomobrenzcatechin erhaltene 174° an, Koerner[6] bestimmte ihn bei 179·5° an einer aus Protocatechusäure dargestellten Substanz und Herzig[7], welcher die in Rede stehende Säure als Einwirkungsproduct von alkoholischem Kali auf Hexamethylquercetin zu studiren Gelegenheit hatte, gibt 180° an. Ich habe als der reinen nicht sublimirten Veratrumsäure eigenthümlichen Schmelzpunkt, jedesmal 181° beobachtet, wobei aber schon bei 179° Sintern und Weichwerden der Probe beginnt. Dies gilt sowohl von dem aus Papaverin gewonnenen Präparate, als auch von einer Säure, die ich durch Oxydation von Dimethylhomobrenzcatechin darstellte, welches constant bei 218° übergieng. Als Beleg für die Reinheit dieser Säure sei deren Analyse angeführt:

0·2322 Grm. Substanz, bei 100° getrocknet, gaben 0·5055 Grm. Kohlensäure und 0·1178 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet $C_9H_{10}O_4$
C.....	59·12	59·34
H.....	5·61	5·48.

Wie Herr Dr. Herzig mir mittheilt, hat er gefunden, dass auch durch Verseifung von Dimethylprotocatechusäuremethyläther entstandene Veratrumsäure den von mir angegebenen Schmelzpunkt 181° besitze, dass aber sublimirte Säure sich stets bei

[1] Liebig's Annalen CLVIII, pag. 282.
[2] „ „ CLIX, „ 240.
[3] Ber. d. d. chem. Ges. IX, pag. 937.
[4] „ „ „ „ „ XI, „ 124.
[5] „ „ „ „ „ VIII, „ 1138,
[6] „ „ „ „ „ IX, „ 582.
[7] Monatshefte f. Chemie V, pag. 84.

etwas niederer Temperatur verflüssige, möglicherweise ist in diesem Umstande die Erklärung für die abweichenden Angaben zu suchen.

Untersuchung der bei 180° unter Aufbrausen schmelzenden Säure (*C*).

Diese Substanz krystallisirte aus Wasser in derben glasharten Prismen oder, wenn sie aus gesättigter heisser Lösung anschoss, in Nadeln. Sie ist in Wasser löslicher als Veratrumsäure. Bleizucker gibt mit der wässerigen Lösung einen, im Überschuss des Fällungsmittels löslichen, weissen, gelatinösen Niederschlag, Silbernitrat einen ähnlichen, der beim Erhitzen verschwindet, nach dem Erkalten sich wieder als schweres krystallinisches Präcipitat abscheidet. Eisenchlorid erzeugt einen gelbrothen Niederschlag. Die Säure sublimirt in Blättern und Nadeln, deren Schmelzpunkt aber nicht mehr bei 180° [1] liegt, die sich vielmehr schon bei niederer Temperatur unter 170° verflüssigen. Wird die Säure kurze Zeit in einer Eprouvette über ihren Schmelzpunkt erhitzt, so gibt sie Wasser ab, der Rückstand schmilzt dann ohne Schäumen bei 166 bis 167°. Die Säure ist somit nach ihren Eigenschaften als Hemipinsäure respective deren Anhydrid anzusehen; die Analyse bestätigte diese Annahme.

0·2298 Grm. Substanz bei 100° getrocknet gaben 0·4505 Grm. Kohlensäure und 0·1020 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_6$
C	53·46	53·10
H	4·93	4·42.

Untersuchung der bei 233° schmelzenden Säure (*B*).

Dieses das Hauptproduct der Einwirkung von übermangansaurem Kalium auf Papaverin, ist ein weisses, krystallinisches,

[1] Die Angabe Wegscheider's (Monatshefte III, pag. 351), der Schmelzpunkt der Hemipinsäure sei abhängig von der Schnelligkeit des Erhitzens, kann ich bestätigen, doch habe ich auch noch höhere Schmelzpunkte beobachtet, wie dieser Forscher und zwar bis 182°, dies in Übereinstimmung mit Beckett und Wright.

glänzendes Pulver, welches unter dem Mikroskope rechtwinkelig, begrenzte, sehr gleichmässig ausgebildete Tafeln erkennen lässt. Häufig sind zwillingsartige Aneinanderlagerungen von Krystallen zu bemerken. Der Schmelzpunkt liegt bei 233°; im Augenblicke des Schmelzens findet stürmische Gasentwicklung statt und die Substanz färbt sich dunkel. Ich will diese stickstoffhältige Säure, für welche die Analyse die Formel $C_{16}H_{13}NO_7$ ergab und welche nach dem Ergebnisse der Untersuchung ihrer Salze zweibasisch ist, Papaverinsäure nennen.

Die Substanz ist wasserfrei und wurde zur Analyse bei 100° getrocknet.

I. 0·2273 Grm. Substanz gaben 0·4853 Grm. Kohlensäure und 0·0852 Grm. Wasser.

II. 0·2545 Grm. Substanz gaben 0·5378 Grm. Kohlensäure und 0·0865 Grm. Wasser.

III. 0·2514 Grm. Substanz gaben 0·5310 Grm. Kohlensäure und 0·0895 Grm. Wasser.

IV. 0·2384 Grm. Substanz gaben 0·5047 Grm. Kohlensäure und 0·0838 Grm. Wasser.

V. 0·3447 Grm. Substanz gaben bei $B = 749·6$ Mm. und $t = 21°$, $V = 15·5$ CC. Stickstoff.

VI. 0·4885 Grm. Substanz gaben bei $B = 754·0$ Mm. und $t = 20·5°$, $V = 21·5$ CC. Stickstoff.

In 100 Theilen gefunden:

	I	II	III	IV	V	VI
C	58·23	57·63	57·61	57·73	—	—
H	4·16	3·77	3·96	3·90	—	—
N	—	—	—	—	5·07	4·98

	Im Mittel gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{13}NO_7$
C	57·80	58·00
H	3·95	3·92
N	5·02[1]	4·23

[1] Das bei den Stickstoffbestimmungen zur Kohlensäureentwicklung verwendete Natriumbicarbonat gab, wie sich nachträglich herausstellte, eine, wenn auch sehr schwache Ammoniakreaction mit Nessler's Reagenz; daher wohl die etwas zu hohen Stickstoffzahlen.

Die Säure ist in kaltem Wasser sehr schwer löslich und selbst kochendes nimmt nicht allzuviel davon auf; die wässerige Lösung reagirt stark sauer und zersetzt mit Leichtigkeit Carbonate bereits in der Kälte. Äther, Benzol, Xylol, Chloroform, Schwefelkohlenstoff, Petroleumäther, Aceton und absoluter Alkohol lösen sehr wenig Papaverinsäure auf, stark verdünnter Weingeist ist, namentlich in der Wärme, ein gutes Lösungsmittel, desgleichen heisser Eisessig, Amylalkohol und mit Salzsäure angesäuertes Wasser, woraus beim Erkalten die Substanz unverändert wieder ausfällt.

Es ist mir nicht gelungen, durch Anwendung irgend eines dieser Lösungsmittel grössere, messbare Krystalle der Papaverinsäure zu ziehen, obwohl gelegentlich Krystallisationen erhalten wurden, in welchen etwas deutlicher erkennbare Individuen sich vorfanden. In concentrirter Schwefelsäure löst sich Papaverinsäure schon in der Kälte mit rothgelber Farbe auf, beim Erwärmen wird die Flüssigkeit dunkelroth; sowohl die kalt als die warm bereitete Lösung bleibt zunächst beim Verdünnen mit Wasser klar; erstere trübt sich aber bald durch sich ausscheidende Krystalle, die, da ihr Schmelzpunkt bei 230° liegt, unveränderte Substanz sind. Wird die Säure mit concentrirter Schwefelsäure erhitzt und die rothe Flüssigkeit dann in Wasser gegossen, so scheiden sich aus der klaren Flüssigkeit erst nach längerem Stehen dunkelrothe Tröpfchen ab.

Eine wässerige Lösung von Papaverinsänre gibt mit Bleizucker sofort einen Niederschlag, auch Silbernitrat gibt nach einiger Zeit eine ausgiebige Krystallisation, dessgleichen Kupferacetat.

Das Verhalten des zerfliesslichen neutralen Ammoniaksalzes, welches in strahligen Krystallen anschiesst, wenn dessen Lösung nahezu zur Trockene eingedampft wird, gegen Metallsalze, wurde mit einer Lösung geprüft, welche 1 Grm. freie Säure in 50 CC. enthielt.

Chlorcalcium: Keine Fällung, nach einiger Zeit Krystallisation, beim Erwärmen aber sofort schwerer krystallinischer Niederschlag;

Chlorbarium: Keine Fällung, trübt sich sehr bald, beim Erwärmen sofort, von krystallinischem Niederschlag;

Eisensulfat: Gelbliche Färbung, kein Niederschlag, nach einiger Zeit Trübung;

Eisenchlorid: Starke Fällung, Farbe ähnlich dem Schwefelmangan beim Kochen dunkler werdend;

Cobaltsulfat:
Nickelsulfat:
Chromsulfat:
Kupfersulfat:
} Auch beim Kochen keine Fällung;

Kupferacetat: Grüne Färbung; beim Stehen, schneller beim Erwärmen, blaue Nadeln, im Überschuss des Fällungsmittels unlöslich;

Bleiacetat: Starker, gelatinöser, gelblicher, sehr voluminöser Niederschlag; wird beim Kochen oder nach längerem Stehen blendend weiss, deutliche Nadeln;

Silbernitrat: Hellgelber Niederschlag, im Übrigen wie bei Bleiacetat;

Quecksilberchlorid: Keine Fällung;

Quecksilberoxydulnitrat: Wie bei Silbernitrat.

Salze der Papaverinsäure.

Neutrales Kaliumsalz. Durch genaues Neutralisiren der in Wasser suspendirten Säure mit Ätzkali dargestellt; es ist in Wasser ausserordentlich leicht löslich, in absolutem Alkohol sehr schwer. Setzt man der wässerigen Lösung Alkohol zu, so scheidet es sich in Gestalt weisser Blättchen ab, welche abfiltrirt und mit Alkohol gewaschen werden. Das Salz enthält Krystallwasser, welches bei 140° vollständig entweicht.

Die Analyse ergab:

I. 9·2688 Grm. Substanz gaben 0·1145 Grm. schwefelsaures Kalium.

II. 0·2089 Grm. Substanz gaben 0·0889 Grm. schwefelsaures Kalium.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für
	I	II	$C_{16}H_{11}NO_7K_2$
K.....	19·32	19·11	19·16

Die Wasserbestimmung ergab einen Gehalt von $2^1/_2$ Molekülen Krystallwasser.

0·3048 Grm. Substanz verloren bei 140° 0·0294 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{11}NO_7K_2+2^1/_2H_2O$
$2^1/_2H_2O$	9·64	9·95

Wird eine verdünnte Lösung dieses Salzes, und ähnlich verhält sich auch das Natrium- und das Ammoniumsalz, durch Salzsäure zersetzt, so bleibt sie klar, wird etwas gelb und nach einigem Stehen, schnell bei mässigem Erwärmen, scheidet sich die Papaverinsäure in Gestalt kleiner Kryställchen ab, die sich rasch zu Boden setzen. Wird hingegen eine concentrirte Lösung mit Säuren versetzt, so trübt sich die gelb gewordene Flüssigkeit rasch von einem sich bald absetzenden Öl, welches schnell zäher, dann harzig wird und schliesslich zu einem weissen Klumpen erhärtet, der mit dem Glasstabe zerdrückt zu weissem Krystallmehle der Säure, von richtigem Schmelzpunkt, zerfällt. Dieser ganze Vorgang geht in wenigen Minuten vor sich und ist für Papaverinsäure charakteristisch.

Das saure Kaliumsalz wurde in üblicher Weise durch Neutralisiren einer gewogenen Menge Säure mit Ätzkali und nachträglichem Zusatz einer gleich grossen Menge Säure erhalten. Es krystallisirt unter dem Exsiccator in kleinen Nadeln, welche bei 100° getrocknet wasserfrei sind.

0·2401 Grm. Substanz gaben 0.0536 Grm. schwefelsaures Kalium.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{12}NO_7K$
K	9·99	10·57

Kalksalz. Es scheidet sich als blendend weisses krystallinisches Pulver aus, wenn man eine genau mit Ammoniak neutralisirte Lösung von Papaverinsäure mit Chlorcalciumlösung versetzt; auch kann es leicht erhalten werden, wenn man die in

Wasser suspendirte Säure mit kohlensaurem Kalke kocht. Da das einmal ausgeschiedene Salz sehr schwer selbst in viel kochendem Wasser löslich ist, und sich andererseits gerade beim Erwärmen schneller abscheidet, ist es empfehlenswerth bei dieser Darstellungsweise keinen Überschuss an Kalkcarbonat anzuwenden, der dann schwer vom organischen Kalksalze zu trennen ist. Allenfalls vorhandene überschüssige Säure ist hingegen leicht durch verdünnten Weingeist und selbst durch Wasser zu entfernen. Unter dem Mikroskop rhombische Blättchen. Bei der Bestimmung des Wassergehaltes lieferten mehrere Versuche untereinander nicht übereinstimmende Zahlen; das mit kohlensaurem Kalke dargestellte Salz scheint wasserfrei zu sein, jenes aus dem Amonsalz mit Chlorcalcium erhaltene, $1^1/_2$ Krystallwasser zu haben, aber leicht zu verwittern; bei 200° ist es wasserfrei.

I. 0·3453 Grm. Substanz hinterliessen nach dem Glühen 0·0505 Grm. Kalk.

II. 0·3105 Grm. Substanz hinterliessen nach dem Glühen 0·0485 Grm. Kalk.

III. 0·2691 Grm. Substanz hinterliessen nach dem Glühen 0·0409 Grm. Kalk.

In 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
	I	II	III	$C_{16}H_{11}NO_7Ca$
Ca	10·45	11·16	10·85	10·84

Das Bariumsalz wurde durch Wechselzersetzung des neutralen papaverinsauren Kaliums mit Chlorbarium erhalten, verhält sich ähnlich wie das Kalksalz, ist in Wasser noch viel schwerer löslich wie dieses. Weisses Krystallpulver; unter dem Mikroskope zu Rosetten vereinigte Nadeln. Die lufttrockene Substanz verlor bei 200° nur circa 1 Procent ihres Gewichtes.

0·3188 Grm. bei 200° getrockneter Substanz gaben beim Glühen 0·1336 Grm, kohlensaures Barium.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{11}NO_7Ba$
Ba	29·14	29·39

Basisches Kupfersalz. Wenn man Papaverinsäure unter Zusatz von wenig Essigsäure in Wasser auflöst und die Lösung mit essigsaurem Kupfer versetzt, so färbt sich diese grün, bleibt aber vollkommen klar; nach längerem Stehen, schneller schon bei mässigem Erwärmen, scheiden sich sehr schöne glänzende hellblaue Krystallnadeln aus, die im Überschuss von essigsaurem Kupfer und auch in Wasser unlöslich sind. Beim Trocknen werden die Krystalle dunkel-pistaziengrün. Das Salz ist ein basisches Kupfersalz, entsprechend der Formel $C_{16}H_{11}NO_7Cu_2OH$ zusammengesetzt. Das blaue Salz enthält 3 Moleküle Krystallwasser, von welchen bei 130° $2^1/_2$ Moleküle abgegeben werden. Das bei dieser Temperatur noch nicht vertriebene $^1/_2$ Molekül entweicht erst bei höherer Temperatur, wobei aber partielle Zersetzung einzutreten scheint, denn das grüne Salz färbt sich bräunlich und der Gewichtsverlust beträgt mehr, als dem noch vorhandenen Wasser entspricht.

Verschiedene Versuche, welche ausgeführt wurden, um womöglich ein neutrales Kupfersalz darzustellen, misslangen; es entstand immer nur das beschriebene basische. Dies war auch der Fall, als frisch gefälltes Kupferoxydhydrat in der wässerigen Papaverinsäurelösung aufgelöst worden war.

Nachstehende Analysen beziehen sich auf Präparate verschiedener Darstellung, III und IV auf verschiedene Krystallfractionen derselben. Die Substanz wurde bei 130° getrocknet.

I. 0·2657 Grm. Substanz gaben 0·4149 Grm. Kohlensäure, 0·0726 Grm. Wasser und 0·0705 Grm. Kupferoxyd.

II. 0·2656 Grm. Substanz gaben . .[1] Kohlensäure, 0·0681 Grm. Wasser und 0·0713 Grm. Kupferoxyd.

III. 0·1877 Grm. Substanz gaben 0·2936 Grm. Kohlensäure 0·0470 Grm. Wasser und 0·0496 Grm. Kupferoxyd.

IV. 0·2980 Grm. Substanz gaben 0·0792 Grm. Kupferoxyd.

In 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für
	I	II	III	IV	$C_{16}H_{11}NO_7Cu_3(OH)+^1/_2H_2O$
C	42·58	—	42·66	—	42·65
H	3·03	2·84	2·78	—	2·88
Cu	21·18	21·43	21·10	21·24	21·13

[1] Die Kohlensäurebestimmung ging bei dieser Analyse verloren.

Die Wasserbestimmung bei 130° gab, wie bereits erwähnt, einen $2^1/_2$ Molekülen Krystallwasser entsprechenden Gewichtsverlust.

I. 0·3356 Grm. Substanz verloren 0·0376 Grm. Wasser.
II. 0·3109 „ „ „ 0·0348 „ „
III. 0·2229 „ „ „ 0·0260 „ „
IV. 0·3239 „ „ „ 0·0359 „ „
V. 0·2125 „ „ „ 0·0248 „ „

In 100 Theilen:

	Gefunden					Berechnet für
	I	II	III	IV	V	$C_{16}H_{11}NO_7Cu_3(OH)+3H_2O$
$2^1/_2 H_2O$	11·20	11·19	11·66	11·08	11·67	11·38

Neutrales Silbersalz. Dasselbe wird erhalten durch Fällung des neutralen Kalium- oder Ammoniumsalzes mit Silbernitrat; es bildet sich ein gelatinös-flockiger, gelblicher Niederschlag, der nach längerem Stehen oder beim Kochen mit Wasser sofort weiss und krystallinisch wird. Das Salz ist schwer löslich, kann aber doch aus viel heissem Wasser umkrystallisirt werden; es scheidet sich daraus beim Erkalten in Form sehr zarter weisser seidenglänzender Nädelchen ab, die auf dem Filter verfilzen. Das papaverinsaure Silber ist sehr lichtbeständig. Es enthält Krystallwasser, welches bis auf $^1/_2$ Molekül schon über Schwefelsäure entweicht. Dieses letztere verliert es aber selbst beim Trocknen bei 100° im Vacuo nicht.

I. 0·3105 Grm. Substanz gaben 0·3933 Grm. Kohlensäure, 0·0668 Grm. Wasser und 0·1211 Grm. Silber.
II. 0·2746 Grm. Substanz gaben 0·3510 Grm. Kohlensäure, 0·0500 Grm. Wasser und 0·1073 Grm. Silber.
III. 0·3536 Grm. Substanz gaben 0·4470 Grm. Kohlensäure, 0·0637 Grm. Wasser und 0·1376 Grm. Silber.
IV. 0·6424 Grm. Substanz gaben 0·2504 Grm. Silber.

In 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für
	I	II	III	IV	$C_{16}H_{11}NO_7Ag_2+{}^1/_2H_2O$
C	34·54	34·86	34·91	—	34·65
H	2·39	2·02	2·00	—	2·16
Ag	39·00	39·11	38·91	38·97	38·98

Bei den Krystallwasserbestimmungen konnte eine Übereinstimmung nicht erzielt werden; bei einem lufttrockenen Präparate betrug der Gewichtsverlust über Schwefelsäure genau so viel als der Abgabe von 2 Molekülen Wasser entspricht. Andere Proben ergaben weit weniger, so dass es den Anschein hat, dass das Salz einen Theil des Krystallwassers leicht schon beim Liegen an der Luft abgibt.

0·3305 Grm. Substanz verloren im Exsiccator 0·0200 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{11}NO_7Ag_2+2^1/_2H_2O$
$2H_2O$	6·05	6·10

Ein anderes Silbersalz entsteht, wenn man eine heiss gesättigte Lösung von freier Papaverinsäure mit saurer Silbernitratlösung versetzt, es krystallisirt nach einiger Zeit ein Haufwerk gelblicher feiner Nadeln aus; aus einer verdünnteren Lösung kamen einmal etwas grössere, citronengelbe rechtwinklig begrenzte, längliche Tafeln zur Ausscheidung. Das Salz kann aus mit Salpetersäure angesäuertem Wasser, unter Zusatz von Silbernitrat, umkrystallisirt werden, ohne eine Veränderung in seiner Zusammensetzung zu erleiden. Es ist lichtbeständig. Die nachstehenden Analysen stimmen bezüglich des Silbergehaltes sehr gut für ein übersaures Salz, der Formel $C_{16}H_{12}NO_7Ag+C_{16}H_{13}NO_7$ entsprechend, hingegen wurden für Kohlenstoff zu niedere Procentzahlen gefunden. Analyse II wurde mit einem Präparate ausgeführt, welches durch Umkrystallisiren des zu Analyse I verwendeten bei Gegenwart von Silbernitrat erhalten worden war.

I. 0·2686 Grm. Substanz, bei 150° getrocknet, gaben 0·4700 Grm. Kohlensäure, 0.0744 Grm. Wasser und 0·0371 Grm. Silber.

II. 0·2673 Grm. Substanz, bei 150° getrocknet, gaben 0·4659 Grm. Kohlensäure, 0·0747 Grm. Wasser und 0·0375 Grm. Silber.

In 100 Theilen:

	Gefunden I	Gefunden II	Berechnet für $C_{16}H_{12}NO_7Ag+C_{16}H_{13}NO_7$
C	47·72	47·54	49·93
H	3·08	3·10	3·25
Ag	13·81	14·03	14·04

Das bei 150° abgegebene Krystallwasser auf obige Formel bezogen würde einem Molekül entsprechen.

I. 0·2745 Grm. Substanz verloren 0·0072 Grm. Wasser.
II. 0·2749 „ „ „ 0·0063 „ „

In 100 Theilen:

	Gefunden I	Gefunden II	Berechnet für $C_{16}H_{12}NO_7Ag+C_{16}H_{13}NO_7+H_2O$
H_2O	2·62	2·29	2·29

Salzsäureverbindung. Papaverinsäure löst sich in concentrirter Salzsäure mit gelber Farbe auf, nach längerem Stehen scheiden sich zuerst citronengelbe, weiche, kleine feine Nadeln, später orangerothe grössere harte Krystallkörner aus; es wurde durch ein Platinfilterchen abfiltrirt und aus Salzsäure umkrystallisirt; nun fielen nach einiger Zeit nur mehr die orangerothen Krystalle aus, die abfiltrirt und mit verdünnter Salzsäure gewaschen, auf Fliesspapier trocknen gelassen werden. Die Verbindung ist wasserfrei, verliert, wenn auch sehr langsam, schon beim Stehen über Schwefelsäure und Ätzkali einen Theil, bei 105° die ganze Salzsäure und reine Papaverinsäure bleibt zurück.

I. 0·5750 Grm. Substanz verloren bei 105°; 0·0529 Grm. Salzsäure.
II. 0·3889 Grm. Substanz gaben 0·1520 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden I	Gefunden II	Berechnet für $C_{16}H_{13}NO_7.HCl$
HCl	9·20	9·94	9·93

Bei einer Darstellung wurden die oben erwähnten gelben Nadeln aus der Flüssigkeit entfernt, bevor die Bildung orange-

rother Körner begonnen hatte, mit verdünnter Salzsäure gewaschen, und die nach dem Pressen zwischen Fliesspapier lufttrocken gewordene Substanz, im Platinschiffchen gewogen. Im Exsiccator über Schwefelsäure wurde eine bedeutende, aber langsam erfolgende Gewichtsabnahme constatirt, die aber keinesfalls abgegebenem Krystallwasser allein zuzuschreiben war, da Salzsäuredämpfe in der Atmosphäre des Exsiccators nachweisbar waren. Im Verlaufe von drei Wochen betrug der Gewichtsverlust 8·10 Procent der abgewogenen Substanz, worauf das Gewicht constant blieb. Das Schiffchen wurde nun in eine Glasröhre gebracht und diese im Parafinbade erhitzt, gleichzeitig wurde ein langsamer Strom reinen Wasserstoffs durchgeleitet und ein mit verdünntem Ammoniak beschickter Absorptionsapparat vorgelegt, so dass die darin aufgefangene Salzsäure ihrer Menge nach bestimmt werden konnte. Schon bei 70° fängt die Substanz an sich orangeroth zu färben, wird aber bald wieder heller, schliesslich ist der Rückstand gelb, mit einem Stich ins Grünliche und schmilzt bei 230°, ist daher wohl nicht ganz reine Papaverinsäure. Die Temperatur wurde bis auf 180° gesteigert.

Aus den bei dieser Analyse erhaltenen Zahlen geht hervor, dass die hellgelbe Verbindung, die Salzsäureverbindung der Papaverinsäure mit $2^1/_2$ Molekülen Krystallwasser ist.

0·6050 Grm. Substanz verloren im Exsiccator 0·0490 Grm., bei dem nachfolgenden Erhitzen im Wasserstoffstrome 0·0720 Grm. an Gewicht, und die in Ammoniak aufgefangene Salzsäure gab 0·1861 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{16}H_{13}NO_7HCl+2^1/_2H_2O$
$HCl+2^1/_2H_2O$	20·00	8·10 Verlust im Exsiccator, 11·90 „ beim Erhitzen	19·75
HCl	7·98		8·72

Dass der Salzsäuregehalt etwas zu klein befunden wurde, war zu erwarten, nachdem, wie bereits erwähnt, schon im Exsiccator Salzsäure entwichen war.

Die Bemühungen, ein Doppelsalz der beschriebenen Salzsäureverbindung mit Platinchlorid herzustellen, waren vergebliche,

unter allen erprobten Verhältnissen, kam immer nur die Salzsäureverbindung zur Ausscheidung; dies war auch der Fall, als eine mit Eis gekühlte und mit genügender Menge Platinchlorid versetzte Lösung von Papaverinsäure in Salzsäure mit Salzsäuregas gesättigt wurde. Alkohol zersetzt die Salzsäureverbindung sofort; ein Tropfen davon auf die trockene, wasserhältige oder wasserfreie Substanz gebracht, bewirkt augenblickliches Weisswerden der benetzten Stellen.

Mononitropapaverinsäure.

Papaverinsäure löst sich leicht in concentrirter Salpetersäure, welche sich dabei dunkelroth färbt; wenn man die Flüssigkeit im Wasserbade zur Trockene bringt, so bleibt ein in einer rothen, scheinbar amorphen Masse eingeschlossener, krystallinischer Rückstand zurück. Durch kochendes Wasser können die beiden Substanzen getrennt werden; am Filter bleibt ein in Wasser nahezu unlöslicher rothvioletter Niederschlag, aus der wässerigen Lösung scheiden sich zu kugeligen Aggregaten vereinigte Nadeln aus, die, da sie noch etwas röthlich gefärbt sind, nochmals unter Anwendung von Thierkohle aus heissem Wasser umkrystallisirt werden. Die Substanz ist nun rein; schwach gelbgefärbte Nadeln schmelzen unter lebhafter Gasentwicklung bei 215°. Wenn man statt der concentrirten, selbst sehr verdünnte Salpetersäure anwendet, so ändert dies nichts am Verlaufe der Reaction. Am besten aber erhält man die neue Verbindung, welche, wie vorgreifend erwähnt sei, Mononitropapaverinsäure ist, nach folgendem Verfahren:

Man löst Papaverinsäure in Eisessig auf, welcher salpetrige Säure enthält und kocht am Rückflusskühler, wobei die Flüssigkeit intensiv roth wird. Schliesslich wird der Eisessig nahezu vollständig im Ölbade abdestillirt und die rückständige, beinahe schwarze Schmiere mit Wasser gekocht. Ungelöst bleibt ein violett-rothes Pulver, das durch Filtration von der etwas roth gefärbten Flüssigkeit getrennt wird. Diese wird nun durch Thierkohle entfärbt, und nach nochmaligem Umkrystallisiren der ausgeschiedenen Krystalle aus möglichst wenig heissem Wasser zeigt die Nitrosäure den bereits aufgeführten Schmelzpunkt. Trotzdem ist sie noch nicht ganz rein, denn wenn man sie in

kohlensaurem Natrium auflöst, was schon in der Kälte leicht unter Kohlensäureentwicklung gelingt, so bleibt eine ganz geringe Menge gelber Flocken zurück, die abfiltrirt werden. Salzsäure fällt aus dem Filtrate die Nitrosäure wieder aus, welche filtrirt, mit kaltem Wasser gewaschen und nochmals aus heissem umkrystallisirt wird. Aus gesättigter siedender Lösung scheidet sie sich in schönen, sehr feinen glänzenden und die ganze Flüssigkeit dicht erfüllenden hellgelben Nadeln aus, welche immer radial um einzelne Punkte angeordnet sind. Die Mononitropapaverinsäure ist leicht löslich in kochendem, wenig in kaltem Wasser, jedoch viel leichter als Papaverinsäure; ebenso leicht löslich in Alkohol und Eisessig. Die Filter, durch welche ihre Lösungen gelaufen waren, färbten sich an der Luft roth; die Säure selbst aber verändert sich, der Luft exponirt, weder im trockenen noch im feuchten Zustande.

Die Säure enthält Krystallwasser, welches bei 125° vollständig entweicht und die Analyse der bei 140° getrockneten Substanz führte zur Formel $C_{16}H_{12}(NO_2)NO_7$.

I. 0·2307 Grm. Substanz gaben 0·4314 Grm. Kohlensäure und 0·0611 Grm. Wasser.

II. 0·3073 Grm. Substanz gaben bei $B = 754·2^{mm}$ und $t = 20°$ $V = 21·0$ C. C. Stickstoff.

In 100 Theilen

	Gefunden		Berechnet für $C_{16}H_{12}(NO_2)NO_7$
	I	II	
C	51·00	—	51·06
H	2.94	—	3·19
N	—	7·75	7·45

Die Nitropapaverinsäure krystallisirt aus wässeriger Lösung mit einem Molekül Krystallwasser, welches zum Theile schon im Exsiccator, vollständig bei 125°, ausgetrieben wird.

I. 0·2183 Grm. lufttrockene Säure verloren bei 125° 0·0102 Grm. Wasser.

II. 0·5911 Grm. lufttrockene Säure verloren bei 125° 0·0318 Grm. Wasser.

In 100 Theilen

	Gefunden		Berechnet für $C_{16}H_{12}(NO_2)NO_7 + H_2O$
	I	II	
H_2O	4·67	5·37	4·57

Silbersalz. Durch Fällung erhalten wir bei Einwirkung von Silbernitrat auf eine neutrale Lösung von nitropapaverinsaurem Ammonium beinahe weisses, nicht lichtempfindliches Krystallpulver, das aus viel heissem Wasser umkrystallisirt wird. Unter dem Mikroskope Nadeln; ohne Krystallwasser.

0·2717 Grm. bei 130° getrockneter Substanz gaben 0·3192 Grm. Kohlensäure 0·0386 Grm. Wasser und 0·0951 Grm. Silber.

In 100 Theilen

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{10}(NO_2)NO_7Ag_2$
C	32·04	32·54
H	1·58	1·69
Ag	35·00	35·25

Die von der Lösung der Nitrosäure in kohlensaurem Natrium abfiltrirten gelben Flocken lösen sich in kochendem Wasser und fallen beim Erkalten als schöne glänzende gelbe Nadeln wieder aus, die bei 122° schmelzen, unzersetzt sublimiren und geschmolzen, strahlig krystallinisch wieder erstarren. Die vorhandene Menge reichte selbst zur oberflächlichen Untersuchung nicht aus. In etwas grösserer Quantität bildet sich der gleichzeitig mit Nitropapaverinsäure entstehende rothe Körper. Er ist in Wasser und Alkohol kaum löslich, leicht aber in kohlensaurem Natrium mit tiefrother Farbe; dieselbe Färbung ertheilt er auch concentrirter Schwefelsäure. Aus der Lösung in Natriumcarbonat wird er durch verdünnte Säuren wieder abgeschieden und zwar ist er in dieser Weise erhalten, compacter, dunkler gefärbt und scheint krystallinisch zu sein. Die Substanz schmilzt bei 245 bis 246° unter Zersetzung. Aus der Analyse derselben lässt sich die Formel $C_{14}H_9NO_7$ ableiten, die aber, da keine weiteren Anhaltspunkte zur Beurtheilung der Beziehungen des Körpers zu Papaverinsäure vorliegen, und überdiess verlässliche Kriterien für die Reinheit

desselben auch nicht gewonnen werden konnten, vorläufig mit Reserve gegeben werden muss.

I. 0·2129 Grm. Substanz, bei 150° getrocknet, gaben 0·4368 Grm. Kohlensäure und 0·0586 Grm. Wasser.

II. 0·3756 Grm. Substanz, bei 150° getrocknet, gaben bei $B = 739^{mm}$ und $t = 20°$, $V = 17·5$ C. C. Stickstoff.

In 100 Theilen

	Gefunden		Berechnet für $C_{14}H_9NO_7$
	I	II	
C	55·96	—	55·44
H	3·06	—	2·97
N	—	5·07	4·62

Auf obige Formel bezogen, scheint das bei 150° entweichende Wasser $^1/_2$ Molekül zu betragen.

0·3881 Grm. Substanz verloren 0·0125 Grm. Wasser.

In 100 Theilen

	Gefunden	Berechnet für $C_{14}H_9NO_7 + {}^1/_2H_2O_1$
$^1/_2H_2O$	3·22	2·88

Pyropapaverinsäure.

Es ist bereits erwähnt worden, dass Papaverinsäure unter heftiger Gasentwicklung schmilzt; das entweichende Gas ist Kohlensäure; um den Betrag derselben festzustellen, wurde eine gewogene Quantität Papaverinsäure in einem Kölbchen, das mit Chlorcalciumrohr und Kaliapparat in Verbindung gesetzt war, im Ölbade auf 235° erhitzt und ein langsamer Strom Wasserstoff durchgeleitet. Die Substanz färbt sich während des Schmelzens dunkel und die Gasentwicklung findet stürmisch im Augenblicke der Verflüssigung statt. Es ist nicht vortheilhaft, so lange zu erhitzen, bis das Aufsteigen von Bläschen ganz aufgehört hat, was ziemlich lange dauert, sondern es empfiehlt sich bald zu unterbrechen, da sonst weitere Zersetzung stattfindet, die, wenn sie auch in der Menge abgegebener Kohlensäure keinen erheblichen Ausdruck findet, doch die Reinigung des rückständigen Spaltungsproductes wesentlich erschwert. Es ist übrigens nicht schwer den

richtigen Zeitpunkt für das Unterbrechen der Reaction zu finden. Die in dieser Weise ausgeführten Bestimmungen zeigten, dass das Molekül Papaverinsäure ein Molekül Kohlensäure abgespalten habe:

I. 0·7335 Grm. Substanz gaben 0·0989 Grm. Kohlensäure ab.
II. 2·3312 „ „ „ 0·3058 „ „ „

In 100 Theilen

	Gefunden		Berechnet für CO_2 aus $C_{16}H_{13}NO_7$
	I	II	
CO_2	13·48	13·12	13·29

Der schwarze erhärtete blasige Rückstand, in welchem eine Säure von der Formel $C_{15}H_{13}NO_5$ entsprechender Zusammensetzung erwartet werden musste, wurde in Alkohol gelöst und mit Wasser versetzt, wodurch eine krystallinische graue Ausscheidung veranlasst wurde; durch Zusatz von Alkohol wird diese wieder in Lösung gebracht und durch Kochen mit Thierkohle leicht Entfärbung erzielt. Die eingedampfte Flüssigkeit zeigt bald Krystallisation in Gestalt kleiner, weisser, regelmässig ausgebildeter Blättchen, welche bei 226° zu sintern beginnen, bei 230° vollkommen geschmolzen sind; Gasentwicklung findet während des Schmelzens nicht statt. Die neue Säure ist in Wasser und Alkohol leichter löslich als Papaverinsäure in schwachem Weingeist schwerer, wenigstens fällt sie aus solchen Lösungen, welche beide Säuren enthalten zuerst aus. Man kann die Pyropapaverinsäure auch durch Auflösen in Natriumcarbonat, eventuell Kochen dieser Lösung mit Thierkohle und nachfolgendes Wiederabscheiden durch Salzsäure, mit Vortheil reinigen.

Die Pyropapaverinsäure krystallisirt ohne Krystallwasser.

Die Analyse bestättigte die Formel $C_{15}H_{13}NO_7$.

0·2111 Grm. Substanz gaben 0·4837 Grm. Kohlensäure und 0·0872 Grm. Wasser.

In 100 Theilen

	Gefunden	Berechnet für $C_{15}H_{13}NO_7$
C	62·49	62·73
H	4·59	4·53

Silbersalz. Es entsteht durch Umsetzung des pyropapaverinsauren Ammoniums mit Silbernitrat. Weisser wenig lichtempfindlicher Niederschlag. In Wasser schwer löslich, krystallisirt ohne Wasser.

0·2106 Grm. Substanz gaben 0·3535 Grm. Kohlensäure 0·0572 Grm. Wasser und 0·0584 Grm. Silber.

In 100 Theilen

	Gefunden	Berechnet für $C_{15}H_{13}NO_5Ag$
C	45·77	45·69
H	3·02	3·05
Ag	27·73	27·41

Einwirkung von Kalihydrat auf Papaverinsäure.

Ein halbes Gramm Papaverinsäure wurde mit Ätzkali im Silberschälchen geschmolzen, die Schmelze in Wasser gelöst, mit Schwefelsäure angesäuert und mit Äther ausgeschüttelt, der nach dem Abdestilliren eine relativ beträchtliche Menge eines krystallisirten Rückstands zurückliess, welcher in wässeriger Lösung mit Bleiacetat einen Niederschlag gab. Der gewaschene Bleiniederschlag wurde unter Wasser mit Schwefelwasserstoff zerlegt und das Filtrat vom Schwefelblei zur Krystallisation gebracht. Die anschiessenden Krystalle waren an Habitus, Schmelzpunkt, Eisenreaction leicht als Protocatechusäure zu erkennen, der aber noch Spuren einer höher schmelzenden Substanz, wahrscheinlich unzersetzt gebliebene Papaverinsäure beigemengt war.

Alkoholisches Kali wirkt äusserst langsam auf Papaverinsäure ein; nach 72stündigem Kochen im Silberkölbchen am Rückflusskühler, während dem fortwährend Lakmuspapier bläuende Dämpfe sich entwickelten, wurde mit Wasser verdünnt und unter Ersatz des abdestillirten Wassers so lange bei vorgelegter Salzsäure destillirt, als das Uebergehende alkalisch reagirte. In dem Destillate war eine äusserst geringe Menge krystallinischer Flocken suspendirt; die saure Flüssigkeit wurde mit Aether ausgeschüttelt, der einen geringen krystallisirten Rückstand hinterliess, dann eingedampft. Es blieb eine kleine Menge eines weissen krystallinischen Rückstandes zurück, der, nicht zerfliesslich, beim Erhitzen mit Kalihydrat ammoniakalische Dämpfe entwickelte

welcher also wohl Salmiak gewesen ist. Die Verarbeitung des Rückstandes führte zu keinen verwerthbaren Resultaten, neben vorwiegender unveränderter Papaverinsäure wurde nur eine untergeordnete Menge einer zunächst amorphen Säure, welche aber nach langem Stehen krystallinisch zu werden scheint, aufgefunden. Es ist jedenfalls nur ein kleiner Antheil des verwendeten Materials in die Reaction einbezogen worden und soll der Versuch demnächst bei höherer Temperatur im geschlossenen Rohr wiederholt werden.

Untersuchung der bei 249° schmelzenden Säure (*D*).

Diese Säure, welche, wie erinnerlich sein dürfte, als Kupfersalz gemeinschaftlich mit Oxalsäure ausgefällt worden war und nach Abscheidung des Kupfers mit Schwefelwasserstoff durch fractionirte Krystallisation von dieser getrennt wurde, ist leicht an ihren Eigenschaften als α-Pyridintricarbonsäure (Weidel's Carbocinchomeronsäure) zu erkennen. Der Schmelzpunkt, die charakteristische und beständige rothe Färbung der wässerigen Lösung mit Eisensulfat, die Reaction mit Silber- und Kupfersalzen, endlich auch der Habitus der Krystalle gestatteten keinen Zweifel. Überdiess wurde beim Kochen mit Eisessig Kohlensäureabspaltung und Bildung von Cinchomeronsäure nachgewiesen und durch die Analyse der reinen bei 110° getrockneten Säure die Zusammensetzung der Annahme entsprechend befunden.

0·1905 Grm. Substanz gaben 0·3168 Grm. Kohlensäure und 0·0401 Grm. Wasser.

In 100 Theilen

Gefunden	Berechnet für $C_8H_5NO_6$
C.....45·35	45·59
H..... 2·34	2·37

Der Wassergehalt wurde, wie der α-Pyridintricarbonsäure eigenthümlich, im Betrage von $1^1/_2$ Molekülen gefunden:

0·2147 Grm. Substanz verloren bei 110° 0·0242 Grm. Wasser.

In 100 Theilen

Gefunden	Berechnet für $C_8H_5NO_6 + 1^1/_2H_2O$
$1^1/_2H_2O$..11·27	11·34

Als Producte der Oxydation des Papaverins durch übermangansaures Kalium wurden demnach constatirt:

Papaverinsäure .... $C_{16}H_{13}NO_7$
Veratrinsäure ..... $C_9H_{10}O_4$
Hemipinsäure ..... $C_{10}H_{10}O_6$
α-Pyridintricarbonsäure .. $C_8H_5NO_6$
Oxalsäure, Ammoniak und, wie in einem besonders zu diesem Zwecke ausgeführten Versuche constatirt wurde, Kohlensäure.

Zur besseren Beurtheilung des Verlaufes der Reaction und der dabei erzielten Ausbeuten seien die Mengen der einzelnen Bestandtheile angegeben, wie sie bei der gemeinschaftlichen Verarbeitung des Productes von acht Oxydationen, wodurch wohl richtige Durchschnittszahlen entstanden sein dürften, erhalten worden sind:

Angewandtes Papaverin ..... 232 Grm.
davon wurden unoxydirt wiedergewonnen 27·5 „
daher sind oxydirt worden ..... 204·5 Grm., welche lieferten an: Reiner Papaverinsäure ..... 40·2 Grm.
„ Veratrinsäure ..... 9·9 „
„ Hemipinsäure ..... 6·8 „
„ α Pyridintricarbonsäure ... 12·0 „
„ Oxalsäure ..... 12·4 „

Hiezu kommen noch Gemische von Säuren, welche nicht mehr getrennt, sondern zur Verarbeitung mit den Producten noch auszuführender Oxydationen zurückgestellt wurden und zwar Gemisch von Veratrin- und Papaverinsäure ..... 5·5 Grm.
„ „ α Pyridintricarbonsäure und Oxalsäure .. 13·5 „
ferner dem Gewichte nach nicht controlirte, aber nicht erhebliche Quantitäten von Säuren, namentlich Hemipinsäure, welche in den schmierigen Rückständen der letzten Mutterlaugen der Krystallisationen enthalten waren.

Es wurden also im Ganzen aus 204·5 Grm. Papaverin 100·3 Grm., also nahezu 50 Procent des angewandten Alkaloids an krystallisirten Producten erhalten, eine Ausbeute, welche eine ganz befriedigende ist.

[1] Bei der Aufarbeitung, der diese beiden Säuren enthaltenden Flüssigkeit hat leider ein kleiner Verlust stattgefunden, so dass die angeführten Zahlen zu klein sind.

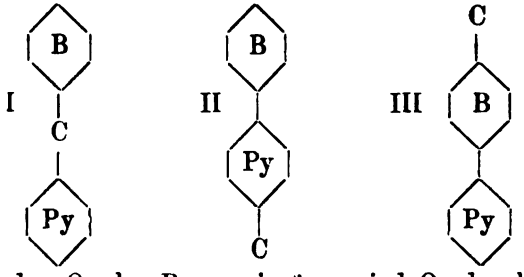
Wenn man die Formeln der oben aufgeführten, als Oxydationsproducte des Papaverins entstandenen Säuren, mit jener des Papaverins selbst vergleicht, so kommt man nothwendiger Weise zu dem Schlusse, die Papaverinsäure sei das primäre Oxydationsproduct, aus welchem durch weitere Einwirkung des oxydirenden Mittels, Veratrin-, respective Hemipinsäure einerseits, α-Pyridintricarbonsäure anderseits entstehe. Es wäre nun allerdings sehr wünschenswerth gewesen, den directen experimentellen Beweis hierfür zu erbringen, das heisst nachzuweisen, dass reine Papaverinsäure bei der Oxydation die genannten Säuren als Spaltungsproducte wirklich liefere, ein Beweis, den herzustellen, mir bisher nicht möglich gewesen ist, da ich wegen Mangel an Material, bisher einen einzigen Versuch mit nur 2 Grm. Papaverinsäure in dieser Richtung ausführen konnte, der zu keinem befriedigenden Resultate führte. Hingegen kann man die bereits mitgetheilte Thatsache, dass beim Schmelzen der Papaverinsäure mit Ätzkali, Protocatechusäure in sehr beträchtlicher Ausbeute entstehe, wohl auch als genügend sicheren Beweis gelten lassen.

Während nun bei allen mit Opiumalkaloiden durchgeführten Untersuchungen der Abbau des Moleküls zu weitgehenden Spaltungen führte, bei welchen ein aromatisches Spaltungsproduct und ein stickstoffhältiges entstanden, ist es mir beim Papaverin gelungen, ein saures Oxydationsproduct zu gewinnen, in dem die Anzahl der Kohlenstoffatome, derjenigen, welche im Moleküle des Alkaloids selbst enthalten ist, noch ziemlich nahe steht, und in welchem die beiden Atomgruppen (Benzol- und Pyridinkern), welche in allen Opiumalkaloiden enthalten zu sein scheinen, noch miteinander verbunden sind. Es ist begreiflich, dass die Aufklärung der Constitution einer solchen noch ziemlich complicirten Verbindung eine sehr bedeutende Annäherung an die Erkenntniss der Structur des Alkaloides selbst bedingen würde.

Ich will nun versuchen darzulegen, wie weit es möglich ist, sich auf Grundlage des vorliegenden Versuchsmateriales und mit Benützung der einschlägigen von Anderen gemachten Erfahrungen eine Vorstellung über die Constitution der Papaverinsäure zu machen.

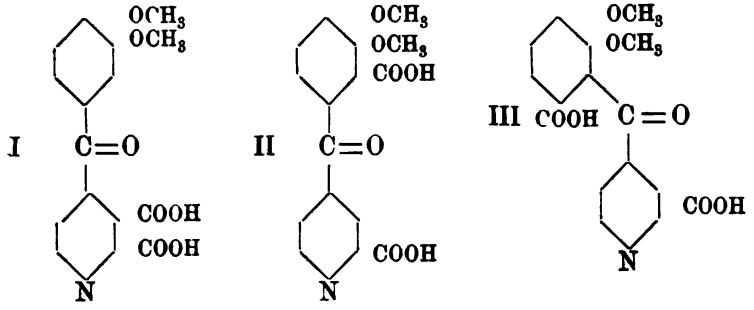
Die Papaverinsäure $C_{16}H_{13}NO_7$ besitzt, da sie zweibasisch ist, zwei Carboxylgruppen, sie besitzt ferner, da aus ihr Veratrin-

und Hemipinsäure entstehen, zwei Methoxylgruppen; zieht man diese C_4, welche durch den nachgewiesenen Charakter der Seitenketten gekennzeichnet sind, von den C_{16} der Papaverinsäure ab, so bleiben C_{12} übrig; wenn nun in der Papaverinsäure ein Benzol- und ein Pyridinkern vorkommen, welche zusammen C_{11} haben, so muss das letzte noch unaufgeklärte Kohlenstoffatom unbedingt, entweder einer Seitenkette eines der beiden Kerne angehören, oder die Verbindung der beiden Kerne vermitteln; man gelangt also für das Kohlenstoffgerippe der Papaverinsäure, wobei die Carboxyl- und Methoxylgruppen unberücksichtigt bleiben und die relativen Stellungen der Bindungen willkürlich gewählt sind, zu nachstehend schematisch dargestellten Möglichkeiten:



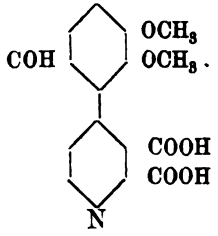
Von den O_7 der Papaverinsäure sind O_6 durch zwei Carboxyl- und zwei Methoxylgruppen in Anspruch genommen; da Hydroxylgruppen nach dem Resultate der Salzuntersuchungen nicht vorhanden sind, so läge es nahe, eine Ketongruppe anzunehmen und auf Basis der dem Schema I entsprechenden Möglichkeit, die Papaverinsäure als dimethoxylirte Dicarbonsäure eines Phenylpyridilketons aufzufassen. Da nun die beiden Methoxylgruppen sicher dem aromatischen Kerne angehören, so würde es sich in Bezug auf die Vertheilung der Seitenketten nur mehr darum handeln, ob beide Carboxylgruppen mit dem Pyridinreste verknüpft sind oder ob dieselben auf beide Reste vertheilt sind, so dass unter Annahme einer ketonartigen Structur und mit Berücksichtigung der durch Wegscheider[1] mit Sicherheit ermittelten Constitution der Hemipinsäure $= C_6H_2 \begin{cases} COOH\ (1) \\ COOH\ (2) \\ OCH_3\ (3) \\ OCH_3\ (4) \end{cases}$ folgende graphisch dargestellten Fälle in Betracht kommen:

[1] Monatshefte für Chemie III, pag. 348.



Diese drei Formeln würden in gleicher Weise der empyrischen Zusammensetzung der Papaverinsäure Genüge leisten, keine aber dem Verlaufe der Oxydation, denn mit der Structur entsprechend der Formel I ist, wie ein flüchtiger Blick auf die Schemata lehrt, die Bildung von Hemipinsäure, mit jener entsprechend II oder III das Entstehen einer Pyridintricarbonsäure nicht vereinbar.

Wenn man nun von einer ketonartigen Structur absieht und auf Grundlage der durch die Schemata II und III (pag. 400) dargestellten Möglichkeiten, in welchen Fällen die Papaverinsäure als Derivat eines Phenylpyridins erscheint, eine Structurformel für dieselbe zu construiren sucht, welche den beobachteten Thatsachen und ihrer empyrischen Zusammensetzung genügt, so kommt man zu folgender graphischen Darstellung:



bei welcher die der α-Pyridintricarbonsäure von Skraup[1] aus theoretischen Gründen zugeschriebene, experimentell aber noch nicht erwiesene Constitution N : COOH : COOH : COOH = (1 : 2 : 3 : 4) berücksichtigt ist, ohne dass damit gesagt sein soll, dass dieselbe vor der von Hoogewerf und van Dorp[2] vorgeschlagenen (1 : 2 : 3 : 5) oder (1 : 2 : 3 : 6) den Vorzug verdiene.

[1] Ebendaselbst. I, pag, 80).

[2] Ber. d. A. chem. Ges. 1881, pag 645.

Skraup und Cobenzl[1] haben nachgewiesen, dass bei der Oxydation des von ihnen entdeckten β-Phenylpyridins gleichzeitig Benzoesäure und Nicotinsäure entstehen, dass also zwei Reactionen nebeneinander verlaufen, von denen die eine vollständige Zerstörung des Pyridin- die andere des Benzolrestes zur Folge hat.

Nimmt man an, dass die Reaction in analoger Weise bei einer Papaverinsäure, wie sie durch die vorgeschlagene Constitutionsformel angedeutet ist, unter gleichzeitiger Oxydation der Aldehydgruppe zu Carboxyl stattfinde, so erscheint die Bildung von Hemipinsäure sowohl, als von Pyridintricarbonsäure aus derselben leicht verständlich. Das gleichzeitige Auftreten von Veratrinsäure ist für diese Auffassung durchaus kein Hinderniss, da es bekannt ist, mit welcher Leichtigkeit Hemipinsäurederivate Kohlensäure abspalten und in Protocatechusäurederivate übergehen.

Die vorerst vielleicht auffallende Annahme einer Aldehydgruppe im aromatischen Reste bei einem Oxydationsproducte hat in diesem Falle nichts Unwahrscheinliches, wenn man sich an das Entstehen von Opiansäure $C_6H_2\begin{cases}COH & (1)\\ COOH & (2)\\ OCH_3 & (3)\\ OCH_3 & (4)\end{cases}$ und selbst von Meconin $C_6H_2\begin{cases}CH_2OH & (1)\\ COOH & (2)\\ OCH_3 & (3)\\ OCH_3 & (4)\end{cases}$ bei der Oxydation des Narcotins erinnert und berücksichtigt, welchen energischen Widerstand die Opiansäure, nach den bereits citirten Untersuchungen Wegscheider's, der Oxydation zu Hemipinsäure entgegensetzt.

Ich halte demnach die, immerhin mit Reserve in Vorschlag gebrachte Constitutionsformel für, nach dem vorliegendem Untersuchungsmateriale, sehr wahrscheinlich und behalte mir vor, diese Ansicht durch weitere Versuche zu stützen oder entsprechend zu rectificiren.

Ausserdem möchte ich noch auf den Umstand aufmerksam machen, dass bei diesen Untersuchungen zum erstenmal aus

[1] Monatshefte für Chemie. 1883, pag. 456.

einem Opiumalkaloid eine Pyridintricarbonsäure erhalten worden ist und zwar dieselbe Pyridintricarbonsäure, welche in zahlreichen Arbeiten von Weidel, Skraup, Hoogewerf und van Dorp, Ramsay und Dobbie als Oxydationsproduct der verschiedenen Chinaalkaloide nachgewiesen worden ist. Es ist zweifellos, dass die bei der Oxydation der Chinaalkaloide entstehende Tricarbonsäure ihre Bildung einem zerstörten Chinoline verdankt. Es wäre daher nicht ganz unwahrscheinlich, dass sich diess auch beim Papaverin so verhielte, wonach dieses dann ein Derivat eines Phenylchinolins sein müsste.

Beiträge zur Kenntniss der Kobaltammoniumverbindungen.

Von G. Vortmann.

(Aus dem chemischen Laboratorium der technischen Hochschule zu Aachen.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Mai 1885.)

I. Oxykobaltiake.

Die meisten der bisher ausgeführten Arbeiten über ammoniakalische Kobaltverbindungen beschäftigen sich fast nur mit jenen Verbindungen, welche aus Lösungen erhalten werden, die wochen- und selbst monatelang dem Einflusse der atmosphärischen Luft ausgesetzt waren. Diejenigen Verbindungen aber, welche sich zuerst in den ammoniakalischen Lösungen der Kobaltoxydulsalze durch Einwirkung der Luft bilden und durch deren Zerfall die beständigeren Salze entstehen, sind noch immer zu wenig bekannt, so dass eine eingehendere Untersuchung über deren Bildung, Zusammensetzung und Zersetzungen wohl am Platze zu sein schien.

Es unterliegt wohl gar keinem Zweifel mehr, dass die von Gmelin zuerst beobachteten und erst von Fremy[1] untersuchten Oxykobaltiake diejenigen Salze sind, welche durch Einwirkung der Luft auf ammoniakalische Lösungen der Kobaltoxydulsalze zuerst entstehen; schon nach Verlauf weniger Minuten bemerkt man an der Oberfläche solcher Lösungen oder an den Gefässwänden die Bildung grünlich-brauner Krystallnadeln, deren Menge rasch zunimmt.

Obwohl ausser Fremy auch Gibbs[2] die Oxykobaltiake untersucht hat, sind die Angaben über letztere noch sehr

[1] Ann. Chem. Pharm. LXXXIII. 227, 289.

[2] Proceedings of the american Academy of arts and sciences XI. 38.

mangelhaft und zum Theil auch nicht ganz richtig. Was zunächst die Formel des salpetersauren Salzes betrifft, so gibt Fremy folgende an:

$$Co_2\ O_2\ (NH_3)_{10}.(NO_3)_4 + 2\ H_2O,$$

während Gibbs vorläufig eine mit seinen Analysen besser übereinstimmende, nämlich:

$$Co_2\ O_4\ (NH_3)_{10}\ (NO_3)_4 + 2\ H_2O$$

annimmt.

Über die Eigenschaften des Nitrates berichten Fremy und Gibbs ziemlich übereinstimmend; beide fanden auch, dass diese Salze beim Behandeln mit Salzsäure oder Schwefelsäure unter Rückbildung von Kobaltoxydulsalz zersetzt werden, nur beim Kochen des Nitrates mit Salpetersäure beobachtete Fremy die Bildung von salpetersaurem Roseokobalt, ebenso bemerkte Gibbs beim Kochen desselben Salzes mit Salzsäure, dass sich hiebei etwas Purpureokobaltchlorid bildete. Diese Angaben sind insoferne richtig, als ja alle Kobaltammoniumverbindungen bei andauerndem Kochen mit Säuren zerfallen und schliesslich in Oxydulsalze übergehen; geringe Mengen von Purpureokobaltchlorid entstehen ferner stets beim Kochen von Kobaltammoniumsalzen mit Salzsäure.

Werden die Oxykobaltiake mit nicht allzu verdünnten Säuren digerirt, so gehen sie nicht sofort in Kobaltoxydulsalze über, es entstehen vielmehr Zwischenproducte, welche in sauren Lösungen sogar ziemlich beständig sind und sich sowohl durch ihre Farbe, als auch durch ihre Krystallisationsfähigkeit in hohem Grade auszeichnen, ferner auch dadurch, dass sie bei Zersetzung durch Alkalien, Sauerstoff entwickeln, wie die Oxykobaltiake, aus denen sie hervorgegangen sind.

Erst im Jahre 1883 beschrieb Maquenne[1] zwei neue Verbindungen, welche er durch Einwirkung eines ozonisirten Luftstromes auf ammoniakalische Kobaltsulfatlösung erhalten hat; er analysirte zwei mit diesen angeblich identische Salze, ein Sulfat und ein Chlorid, welche er für saure Salze der Fremy'schen

[1] Compl. rend. 96. 344.

Oxykobaltiake hält. Das Sulfat stellt er durch Eintragen von schwefelsaurem Oxykobaltiak in ein Gemenge gleicher Raumtheile concentrirter Schwefelsäure, Alkohol und Wasser und darauf folgendes Verdünnen des Gemenges mit Chlorwasser dar. Aus diesem Sulfat erhielt er durch Zersetzung mit Chlorbaryum in salzsaurer Lösung das Chlorid. Die von Maquenne für diese zwei Salze angegebenen Formeln sind:

$$Co_2\,O_2\,(SO_4)_2.(NH_3)_{10}.SO_4H_2 + H_2O$$

$$Co_2\,O_2\,Cl_4.(NH_3)_{10}\,HCl + 3\,H_2O$$

Mit Maquenne's Auffassung kann ich mich nicht einverstanden erklären; wie ich weiter unten zeigen werde, existiren allerdings saure Salze der Oxykobaltiake, diese theilen aber mit den Fremy'schen Salzen die Eigenschaft, durch kaltes Wasser unter Sauerstoffentwicklung zersetzt zu werden, wobei sie aber zum Theil in Salze der Maquenne'schen Reihe übergehen.

In der vorliegenden Arbeit habe ich hauptsächlich das Verhalten der Oxykobaltiake gegen Säuren berücksichtigt, die Veränderungen hingegen, welche sie in ammoniakalischer Lösung oder durch Erhitzen erleiden, nur kurz erwähnt; die hiebei entstehenden Verbindungen sind keine Oxykobaltaminsalze mehr und sollen in einer späteren Arbeit berücksichtigt werden.

Fremy's Oxykobaltiake.

Salpetersaures Oxykobaltiak. Nach Fremy ist das Nitrat das am leichtesten darstellbare Salz dieser Reihe; er erhielt es durch Einwirkung von Luft auf ammoniakalische Kobaltnitratlösung. Gibbs verbesserte diese Methode, indem er durch eine ammoniakalische Lösung von Kobalt- und Ammoniumnitrat Luft hindurchleitete, wobei die Flüssigkeit olivenbraun wurde und nach 24stündigem Stehen dunkelolivengrüne prismatische Krystalle abschied. Zu meinen Versuchen stellte ich es dar durch Auflösen von 20 Grm. krystallisirten Kobaltnitrat in möglichst wenig Wasser (circa 10 CC.), Eintragen der Lösung in 100 Grm. Ammoniak vom specifischen Gewicht 0·938, Erhitzen der Flüssigkeit bis zum beginnenden Sieden, Filtriren und Durchsaugen eines mässig raschen Luftstromes durch die abgekühlte Lösung.

Die Bildung des Oxykobaltiaks fand sofort statt, so dass von Zeit zu Zeit das in die Flüssigkeit eintauchende Glasrohr sich verstopfte und gereinigt werden musste; nach 2—3stündigem Durchsaugen der Luft war die Bildung des Oxykobaltiaks beendigt, was besonders daran erkannt wurde, dass an das vorher gereinigte Glasrohr sich keine Krystallkruste mehr ansetzte. Der Luftstrom wurde nun unterbrochen, das Salz auf einem Filter gesammelt, einmal mit möglichst starkem Ammoniak, dann mit Alkohol gewaschen, gut abgesaugt und einige Stunden über Schwefelsäure getrocknet. Wurde längere Zeit Luft durch die ammoniakalische Flüssigkeit geleitet, so zersetzte sich das gebildete Salz wieder unter Sauerstoffabgabe. Das so erhaltene salpetersaure Oxykobaltiak bildet dunkelbraune, nahezu schwarze, bis $^1/_2$ Ctm. lange, prismatische Krystalle; die Ausbeute betrug beinahe stets 9 Grm. Oxykobaltiak aus 20 Grm. Kobaltnitrat; das ammoniakalische Filtrat enthält jedoch noch geringe Mengen desselben, welche auf Zusatz von Alkohol in Form kleiner, grünlichbrauner Kryställchen sich abscheiden.

Bessere Ausbeuten erhält man, wenn man nach Gibbs dem Kobaltsalz auch Ammoniumnitrat zufügt. Bei Anwendung von 20 Grm. Kobaltnitrat, 20 Grm. Ammoniumnitrat, 100 Grm. Ammoniak vom specifischen Gewicht 0·912 wurden 18 Grm. salpetersaures Oxykobaltiak erhalten. Die Bildung des letzteren geht in diesem Falle langsamer vor sich, da ein grosser Theil des Kobaltnitrat-Ammoniaks sich krystallinisch abscheidet und erst nach und nach in Oxykobaltiak übergeht. Zur vollständigen Umwandlung ist hiebei mindestens 10stündiges Durchsaugen von Luft nothwendig; das Oxykobaltiak bildet auf diese Weise dargestellt ein dunkelbraunes kleinkrystallinisches Pulver. Was die Formel des salpetersauren Oxykobaltiaks anbetrifft, so habe ich oben angegeben, dass Gibbs darin zwei Atome Sauerstoff mehr annimmt als Fremy; meine Analysen bestätigen durchgehends Fremy's Formel, gleichwohl schreibe ich sie in etwas anderer Weise. Die meiste Schwierigkeit bei Aufstellung der Formel der Oxykobaltiake machte der Sauerstoffgehalt derselben. Ich erkläre diesen in einer, wie ich glaube, durchaus befriedigenden Weise, welche ausserdem auch die Beziehungen der Oxykobaltiake zu den Maquenne'schen Salzen klar erkennen lässt.

Die Oxykobaltiake enthalten gerade so wie die Roseo-, Purpureo-, Luteosalze etc. das sechswerthige Doppelatom Co_2; sie geben mit vier Molekülen einer einbasischen Säure neutrale Salze. Von den übrigbleibenden zwei Affinitäten des sechswerthigen Kobaltammoniums ist die eine mit einer Hydroxylgruppe (Rest des Wassers) verbunden, die andere hingegen mit einer Oxyhydroxylgruppe (Rest des Wasserstoffsuperoxyds). Als Beweise für die Gegenwart der letzteren führe ich, da Oxydationserscheinungen auch andere Kobaltammoniumsalze zeigen, nur Reductionserscheinungen an, welche dem Wasserstoffsuperoxyd ebenfalls zukommen:

1. Eine mit verdünnter Schwefelsäure angesäuerte Lösung von Kaliumpermanganat wird durch Zusatz eines Oxykobaltiaksalzes unter Sauerstoffentwickelung entfärbt.

2. In der braunen Flüssigkeit, welche durch Vermischen einer Eisenchloridlösung mit Kaliumeisencyanidlösung entsteht, bewirken Oxykobaltiaksalze Bildung von Berlinerblau.

3. Eine mit verdünnter Schwefelsäure versetzte Lösung von Kaliumbichromat wird auf Zusatz eines Oxykobaltiaksalzes in Chromoxydsalz übergeführt.

Dem salpetersauren Oxykobaltiak kommt hiernach folgende Formel zu:

$$Co_2 . (NH_3)_{10} . \left\{ \begin{matrix} OH \\ O{\cdot}OH \end{matrix} \right\} . (NO_3)_4 + H_2O,$$

1. 0·5907 Grm. gaben 0·3090 Grm. $CoSO_4 = 19{\cdot}91\%$ Kobalt.
2. 0·4314 Grm. gaben 0·2225 Grm. $CoSO_4 = 19{\cdot}63\%$ Kobalt.
3. 0·3857 Grm. wurden mit Barytwasser destillirt, das Destillat in überschüssiger, verdünnter Schwefelsäure (1 CC. entsprach 0·0082088 Grm. NH_3) aufgefangen und mit $^1/_4$ Norm. Ammoniak zurücktitrirt. Durch das überdestillirte Ammoniak wurden 13·1 CC. der Schwefelsäure gesättigt; hieraus berechnet sich der Gehalt an Ammoniak zu $27{\cdot}88\%$.
4. 0·4455 Grm. auf gleiche Weise behandelt, neutralisirten 15·3 CC. der Schwefelsäure $= 28{\cdot}19\%$ Ammoniak.
5. 0·3932 Grm. sättigten bei der Destillation mit Barytwasser 13·6 CC. Schwefelsäure $= 28{\cdot}39\%$ Ammoniak; der Destillationsrückstand wurde in der Wärme mit Kohlensäure gesättigt, längere Zeit hindurch gekocht, filtrirt und

aus dem Filtrate der Baryt durch Schwefelsäure ausgefällt; es wurden erhalten: 0·2940 Grm. $BaSO_4$, diese entsprechen 34·65% N_2O_5.

6. 0·6865 Grm. wurden im Kohlensäurestrom durch Kochen mit Wasser zersetzt; der entweichende Sauerstoff wurde, nachdem er mehrmals durch verdünnte Schwefelsäure hindurchgegangen war, über Kalilauge aufgefangen; seine Menge betrug 22·0 CC. bei 21·0° C. und 750·0 Mm. Barometerstand. Hieraus berechnet sich die Menge des gasförmigen Sauerstoffes zu 4·095 %. Der im Entwickelungskölbchen verbleibende Rückstand wurde nun mit Jodkalium und verdünnter Salzsäure zersetzt und das ausgeschiedene Jod mittelst einer Lösung von Natriumhyposulfit (ein Liter entsprach 12·576 Grm. Jod = 0·7922 Grm. Sauerstoff) titrirt, wobei 8·5 CC. derselben nöthig waren = 0·981 % Sauerstoff. Somit enthält das salpetersaure Oxykobaltiak im Ganzen 5·076 wirksamen Sauerstoff.

	Berechnet	Gefunden		
Kobalt.....	19·54	19·91	19·63	
Ammoniak.....	28·15	28·39	27·88	28·19
Salpetersäure (N_2O_5)	35·76	34·65		
Sauerstoff	5·298	5·076		

Das salpetersaure Oxykobaltiak ist sehr unbeständig; im trockenen Raume verliert es schon bei gewöhnlicher Temperatur Wasser und geringe Mengen Ammoniak und nimmt eine cantharidengrüne Farbe an.

0·4115 Grm. verloren nach vierwöchentlichem Stehen über Schwefelsäure 0·0217 Grm. = 5·27% und enthielten noch 27·03% Ammoniak.

0·2795 Grm. verloren in drei Wochen 0·0177 Grm. = 6·33% und gaben bei der Destillation noch 26·26% Ammoniak.

Beim Liegen an freier Luft zersetzt es sich ebenfalls bald, doch ist die Zersetzung anderer Art: es verwandelt sich in ein lockeres, schwarzes Pulver.

0·5320 Grm. verloren 0·0330 Grm. = 6·20% und enthielten noch 20·52% Ammoniak; in einem anderen Versuch verloren

0·2787 Grm. Substanz 0·0222 Grm. = 7·96% und gaben 19·22% Ammoniak.

Erhitzt man das salpetersaure Oxykobaltiak in einem trockenen Luftstrom auf 110° C. bis zum constanten Gewichte, so verliert es seinen Hyperoxydsauerstoff, ferner zwei Molekule Ammoniak und Wasser.

1. 2·5545 Grm. verloren hierbei 0·2970 Grm. = 11·62%; die Dämpfe wurden in ½ Norm. Schwefelsäure (1 CC. entsprach 0·0082088 Grm. NH_3) geleitet und sättigten 15·8 CC. derselben = 5·07% Ammoniak.
2. 1·0240 Grm. verloren 0·1215 Grm. = 11·86%; die Dämpfe wurden erst durch ein mit Ätzkalistücken gefülltes und gewogenes *U*-Rohr und dann in ½ Norm. Schwefelsäure geleitet. Die Gewichtszunahme des Kalirohres betrug 0·0475 Grm. = 4·63%; neutralisirt wurden 7·05 CC. Schwefelsäure = 5·65% Ammoniak.

Nimmt man an, dass die Zersetzung nach folgender Gleichung vor sich geht:

$$Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}OH\\O.OH\end{matrix}\right\}.(NO_3)_4 + H_2O = Co_2.(NH_3)_8.(OH)_2.(NO_3)_4 + 2\,NH_3 + H_2O + O$$

so müsste der Gewichtsverlust 11·26%, das Wasser 2·98% und das Ammoniak 5·63% betragen; die Übereinstimmung der gefundenen mit den berechneten Zahlen ist eine hinlänglich befriedigende. Der Rückstand sieht rothbraun aus; erhitzt man ihn bis auf 130—140°, so erfolgt unter Feuererscheinung lebhafte Zersetzung, wobei schwarzes Kobaltoxyd hinterbleibt.

Nach der angegebenen Zersetzungsgleichung sollte aus dem Oxykobaltiaksalz salpetersaures Fuskokobaltiak entstanden sein, dieses scheint aber unter Abscheidung von Kobaltoxydhydrat in ammoniakreichere Verbindungen überzugehen, was sich durch folgende zwei Gleichungen veranschaulichen lässt:

1. $3\,Co_2(NH_3)_8.(OH)_2.(NO_3)_4 = 2\,Co_2.(NH_3)_{12}.(NO_3)_6 + Co_2.(OH)_6$
2. $5\,Co_2'.(NH_3)_8.(OH_2).(NO_3)_4 = 2\,Co_2.(NH_3)_{10}.(NO_3)_6 + Co_2.(NH_3)_{10}.(OH)_2.(NO_3)_4 + Co_2(OH)_6.$

Übergiesst man das durch Erhitzen des salpetersauren Oxykobaltiaks auf 110° erhaltene Product mit Wasser, so geht ein Theil sehr leicht mit gelbbrauner Farbe in Lösung, aus welcher Salzsäure einen gelbbraunen krystallinischen Niederschlag fällt, dessen Analyse zur Formel

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} Cl_6 + 2 H_2O$$

führte, und welcher somit identisch mit dem zuerst von Gibbs[1] erhaltenen gelben (Roseo-)Kobaltdecaminchlorid ist.

0·4263 Grm. sättigten bei der Destillation mit Natronlauge 16·53 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 31·83% NH_3. Der Destillationsrückstand wurde in HCl gelöst, auf einen kleinen Rest eingedampft und das Kobalt mittelst Kaliumnitrits gefällt. Es wurden 0·7265 Grm. bei 100° getrockneten Kobaltkaliumnitrits erhalten = 22·126% Kobalt.

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	21·97	22·126
Ammoniak ...	31·65	31·83

Dieses gelbe Kobaltdecaminchlorid erhielt ich auch aus Lösungen, die salzsaures Oxykobaltiak enthielten, beim Fällen mit Salzsäure in der Kälte, wobei ein Gemenge desselben mit einem grünen Chlorid der Maquenne'schen Reihe niederfällt.

Es löst sich in Wasser mit bräunlich-gelber Farbe und gibt mit Sublimatlösung einen in gelben Nadeln krystallisirenden Niederschlag.

Der in Wasser schwerer lösliche Theil hat eine dunkelbraune Farbe; beim Übergiessen mit Salzsäure löst sich das Kobaltoxydhydrat auf und es hinterbleibt ein gelber Rückstand, aus dessen Ammoniakgehalt (35·57%) man berechtigt ist, denselben als ein Gemenge von Decamin- mit Luteokobaltchlorid zu betrachten. Nachdem hiermit nachgewiesen wurde, dass das Zersetzungsproduct des salpetersauren Oxykobaltiaks aus einem in Wasser leicht löslichen Decaminsalz (das basische Nitrat) und

[1] Proc. of the americ. academy of arts and sciences. Vol. XI. 1876. 16.

aus einem Kobaltoxydhydrat, Decamin- und Luteosalz enthaltenden Rückstand besteht, erlangen die beiden oben für das salpetersaure Fuskokobaltiak angegebenen Umsetzungsgleichungen einen hohen Wahrscheinlichkeitsgrad.

Die vom salpetersauren Oxykobaltiak abfiltrirten Flüssigkeiten geben, wenn man sie mit verdünnter Schwefelsäure (1 : 5) übersättigt und mit Alkohol bis zur bleibenden Trübung versetzt, nach 12—24stündigem Stehen einen rothbraunen krystallinischen Niederschlag, der aus zwei Salzen besteht, welche nach Entfernung der alkoholischen Mutterlauge, durch Wasser getrennt werden können. In Lösung geht Roseokobaltsulfat, ungelöst bleibt ein in rothbraunen Prismen krystallisirtes Salz von der Formel:

$$Co_2\,(NH_3)_8\cdot(OH)_2\cdot(SO_4)_2 + 3\,H_2O.$$

Es ist dieses Salz ein basisches Octaminsulfat von genau derselben Zusammensetzung wie das schwefelsaure Fuskokobaltiak Fremy's, es unterscheidet sich aber von diesem durch seine Unlöslichkeit in Wasser, ferner dadurch, dass es sich in concentrirter Salzsäure mit bräunlich-grüner Farbe löst, aus welcher Lösung Quecksilberchlorid ein braunes, im Fällungsmittel und Salzsäure ganz unlösliches Doppelsalz fällt. Es löst sich in concentrirter Schwefelsäure mit brauner Farbe auf und fällt beim Verdünnen der Lösung mit Wasser allmälig unverändert wieder aus. Erwärmt man die Lösung in concentrirter Schwefelsäure gelinde, so geht die braune Farbe derselben in eine kirschrothe über; beim Verdünnen mit Wasser und Zusatz von Alkohol erhält man nun nicht mehr das ursprüngliche Salz, sondern in Wasser leicht lösliches, neutrales Octaminsulfat. Ich führe von dem unlöslichen Sulfat hier keine Analysen an, da ich es in einer später folgenden Abhandlung bei den Octaminsalzen ausführlicher zu besprechen gedenke.

Ich erwähnte oben, dass wenn man in die Lösung, aus welcher salpetersaures Oxykobaltiak sich abgeschieden hat, länger, als zur Bildung desselben nöthig ist, Luft einleitet, das Salz wieder zersetzt wird. Aus 20 Grm. Kobaltnitrat dargestelltes Oxykobaltiaksalz war erst nach ungefähr 15-stündigem Durchleiten von Luft verschwunden; die ammoniakalische Lösung

wurde filtrirt und der auf dem Filter zurückbleibende braunschwarze Niederschlag mit kalter concentrirter Salzsäure digerirt, wobei Kobaltoxydhydrat in Lösung ging und ein Gemenge von gelbem Decaminchlorid und Luteochlorid zurückblieb. (Gefunden: $NH_3 = 34{\cdot}05\%$. $Cl = 40{\cdot}46\%$.) Das ammoniakalische Filtrat war röthlichbraun gefärbt; eine Probe desselben gab mit Salzsäure in der Kälte ohne Aufbrausen einen dunkelvioletten Niederschlag, nach längerem Stehen schieden sich auch grüne Nadeln und Melanokobaltchlorid ab. Es wurde mit dem doppelten Volumen Alkohol versetzt, nach 24 Stunden von dem syrupösen braunrothen Niederschlag decantirt und letzterer mit wenig kaltem Wasser behandelt, worin er sich leicht mit brauner Farbe löste.

Eine Probe dieser Lösung gab mit Salzsäure einen Niederschlag, der aus rubinrothen und aus dunkelgrünen Nadeln bestand; letztere lösten sich in Wasser leicht zu einer blauvioletten Flüssigkeit, in welcher Salpetersäure keinen Niederschlag hervorbrachte, Sublimatlösung dagegen eine blättrig-krystallinische Fällung erzeugte.

Der Rest der wässerigen Auflösung wurde in das doppelte Volumen Alkohol eingetragen; da hierbei starke Trübung, aber kein Niederschlag sich bildete, wurden einige Tropfen Salpetersäure zugesetzt, worauf sofort eine flockig-käsige Abscheidung erfolgte. Es wurde filtrirt, der röthlichbraun gefärbte Niederschlag mit Alkohol gewaschen, zwischen Filtrirpapier abgepresst und über Schwefelsäure getrocknet. Die Analyse desselben führte zu einem basischen Kobalthexaminnitrat von der Formel:

$$Co_2.(NH_3)_6(OH)_3.(NO_3)_3 + 2H_2O.$$

1. 0·4431 Grm. verloren bei 100—110° 0·0348 Grm $= 7{\cdot}85\%$ und gaben beim Erhitzen mit Schwefelsäure 0·2873 Grm. $CoSO_4 = 24{\cdot}68\%$ Kobalt.
2. 0·5060 Grm. gaben 0·3292 Grm. $CoSO_4 = 24{\cdot}76\%$ Kobalt.
3. 0·4711 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 11·65 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) $= 20{\cdot}299\%$ Ammoniak.
4. 0·4890 Grm. sättigten bei der Destillation mit Barytwasser 12·15 CC. derselben Schwefelsäure $= 20{\cdot}396\%$ Ammoniak; der Destillationsrückstand wurde mit Kohlensäure gesättigt

aufgekocht, filtrirt und aus dem Filtrate das Baryum als Sulfat gefällt; es wurden 0·3471 Grm. $BaSO_4$ erhalten = 32·90% N_2O_5.

	Berechnet	Gefunden	
Kobalt	23·93	24·68	24·76
Ammoniak	20·69	20·299	20·396
Salpetersäure (N_2O_5)..	32·86	—	32·90
Wasser	7·30	7·85	—

Die vom syrupösen Niederschlag abgegossene Flüssigkeit wurde mit Salzsäure gefällt; beim Übergiessen des Niederschlages mit Wasser löste sich Roseokobaltchlorid auf, während grauschwarzes Melanochlorid zurückblieb.

Um zu untersuchen, welche Körper sich bei langsamer Zersetzung des salpetersauren Oxykobaltiaks bilden, wurden 20 Grm. Kobaltnitrat wie bei den früheren Versuchen in Oxykobaltiak übergeführt und die Krystalle mit der Mutterlauge im lose verschlossenen Kolben bis zur vollständigen Zersetzung stehen gelassen. Nach Fremy soll es sich hierbei allmälig in Luteokobaltnitrat umwandeln. In der That war schon nach 2—3 Tagen die Bildung eines gelben Salzes zu bemerken, dessen Menge täglich zunahm, so dass die braunen Krystalle des salpetersauren Oxykobaltiaks sich in gelbe blättrige Kystalle umzuwandeln schienen. Nach 7-tägigem Stehen war kein Oxykobaltiaksalz mehr wahrnehmbar; die Flüssigkeit wurde filtrirt, die gelben, aus quadratischen Blättchen bestehenden Kryställchen mit Ammoniak und Alkohol gewaschen und über Schwefelsäure getrocknet. Die Analyse ergab 28·93% Ammoniak und 17·01% Kobalt; Luteokobaltnitrat verlangt 29·39% Ammoniak und 17·00% Kobalt.

Das ammoniakalische Filtrat wurde mit verdünnter Schwefelsäure übersättigt und mit Alkohol bis zur bleibenden starken Trübung versetzt; nach 24-stündigem Stehen wurde vom Niederschlage abfiltrirt. Letzterer war ein Gemenge von Roseokobaltsulfat und dem braunrothen krystallinischen Sulfat $Co_2(NH_3)_8(OH)_2(SO_4)_2 + 3H_2O$, welche durch Behandlung mit Wasser von einander getrennt werden konnten. Das Filtrat gab auf Zusatz von mehr Alkohol zunächst einen hellrothen, krystallinischen

Niederschlag von Roseokobaltsulfat; nachdem von diesem wieder abfiltrirt worden war, erzeugte Alkohol im Filtrate keinen krystallinischen Niederschlag mehr, sondern einen syrupösen von braunrother Farbe; die über letzterem befindliche Flüssigkeit setzte nach längerem Stehen nur Kobaltoxydulammonsulfat ab. Der syrupöse Niederschlag wurde durch nochmaliges Auflösen in Wasser und Fällen mit Alkohol gereinigt, dann über Schwefelsäure getrocknet und zerrieben. Da die Analyse desselben zu keiner passenden Formel führte, wurde er in Wasser gelöst; hierbei blieb ein geringer Rückstand, der an seinem Verhalten zu Salzsäure und Sublimatlösung als das unlösliche basische Octaminsulfat erkannt wurde. Die von diesem abfiltrirte wässerige Lösung wurde mit concentrirter Salzsäure im Überschuss versetzt. Nach mehrstündigem Stehen bildete sich ein aus kleinen schwarzen Nädelchen bestehender Niederschlag, die überstehende Flüssigkeit war nach 24 Stunden nur noch blassroth gefärbt. Die Analyse dieses schwarzen Salzes führte zur Formel:

$$Co_2(NH_3)_7 . Cl_5 . H_2O.$$

Die Formel würde auf wasserhaltiges Melanokobaltchlorid stimmen, doch verhält sich das neue, schwarze Salz wesentlich verschieden. Es besteht aus 12 Mm. langen, kohlschwarzen Krystallen, von denen nur die grösseren im durchfallenden Lichte dunkellauchgrün aussehen. Melanokobaltchlorid auf gleiche Weise aus dem Sulfat dargestellt, bildet ein dunkelviolettgraues Pulver, in welchem mit blossem Auge keine Krystalle zu sehen sind. Ferner löst sich das neue, schwarze Salz in Wasser viel schwerer auf, die Lösung ist schmutziggrün gefärbt, zersetzt sich beim Erwärmen sehr schnell unter Bildung von Kobaltoxydulsalz, und gibt mit Sublimatlösung nicht das für Melanokobaltchlorid charakteristische, aus feinen, langen, bräunlichrothen Nadeln bestehende Doppelsalz. Die Lösung in concentrirter Schwefelsäure ist bräunlichgrün gefärbt, während Melanokobaltchlorid sich mit bräunlichrother bis kirschrother Farbe löst.

Da dieses neue Salz nur in geringer Menge sich bildet, habe ich vorläufig nur dessen Formel festgestellt, theile jedoch auch diese nur unter Reserve mit und hoffe, in nächster Zeit ausführlicher über dasselbe berichten zu können.

Schwefelsaures Oxykobaltiak. Die Darstellung dieses Salzes gelingt nach Fremy nur, wenn man die Luft langsam auf die ammoniakalische Kobaltsulfatlösung einwirken lässt. Meine Versuche ergaben, dass es sich noch leichter bildet, als das Nitrat. 20 Grm. krystallisirtes Kobaltsulfat wurden in wenig heissem Wasser gelöst, die Lösung in 100 Grm. Ammoniakflüssigkeit vom specifischen Gewichte 0·912 eingetragen, bis zur vollständigen Lösung des Kobaltsalzes erwärmt, dann abgekühlt und Luft durchgesogen. Man beobachtet sofort an der Oberfläche der Flüssigkeit und an den Gefässwänden die Entstehung kleiner dunkelgrüner Kryställchen; die Oxydation ist in zwei Stunden beendet, man unterbricht dann den Luftstrom, da das schwefelsaure Oxykobaltiak sich sonst weit schneller zersetzt, als das Nitrat. Es wurde auf einem Filter mit Ammoniak gewaschen (worin es so wenig löslich ist, dass das Filtrat nahezu farblos abläuft), gut abgesogen und zwischen Filtrirpapier abgepresst oder 2—3 Stunden über Schwefelsäure getrocknet. Aus 20 Grm. Kobaltsulfat wurden durchschnittlich 13 Grm. schwefelsaures Oxykobaltiak erhalten; es bildet dieses dunkelbraune, nahezu schwarze prismatische Krystalle, die etwas beständiger sind, als das Nitrat.

Die Analyse ergab folgende Zahlen:

1. 0·4500 Grm. verloren, bei 120° bis zum constanten Gewichte erhitzt, 0·0770 Grm. = 17·33%, und gaben beim Eindampfen mit Schwefelsäure 0·2405 Grm. $CoSO_4$ = 20·34% Kobalt.
2. 0·6207 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 21·2 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 NH_3), hieraus ergeben sich 18·03% Ammoniak.
3. 0·5134 Grm. auf gleiche Weise behandelt neutralisirten 17·5 Grm. derselben Schwefelsäure = 27·98% Ammoniak; der Destillationsrückstand gab nach Zusatz von Salzsäure und Chlorbaryum 0·4132 Grm. $BaSO_4$ = 27·63% SO_3.
4. 0·4152 Grm. einer anderen Bereitung sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 14·2 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·008436 Grm. NH_3) = 28·85% Ammoniak; der Rückstand gab 0·3304 Grm. $BaSO_4$ = 27·32% SO_3.

5. 0·3747 Grm. wurden im Kohlensäurestrom mit verdünnter Schwefelsäure (1 : 10) längere Zeit gekocht und der entweichende Sauerstoff über Kalilauge aufgefangen. Es wurden von diesem 15·6 CC. bei 752 Mm. Barometerstand und 20° C. erhalten, woraus sich der Sauerstoffgehalt zu 5·36% berechnet. In der gekochten Lösung war das Kobalt als Oxydulsulfat enthalten.
6. 0·3390 Grm. wurden im Kohlensäurestrom mit Wasser gekocht; das Sauerstoffgas wurde erst durch verdünnte Schwefelsäure geleitet, dann über Kalilauge aufgefangen. Hiebei wurden erhalten 11·35 CC. Gas bei 750·5 Mm. Barometerstand und 17·0° C.; der Destillationsrückstand wurde mit Jodkalium und verdünnter Salzsäure versetzt und das ausgeschiedene Jod mit Natriumhyposulfit (1 CC. = 0·012576 Grm. Jod) titrirt, wobei 6·3 CC. nöthig waren. Hieraus berechnet sich der Sauerstoffgehalt zu 4·36% als Gas, 1·47% an Kobalt gebunden, somit im Ganzen 5·83% Sauerstoff mehr, als dem Kobaltoxydul entsprechen würden. Aus diesen Zahlen ergibt sich die Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \left\{ \begin{matrix} OH \\ O.OH \end{matrix} \right\} . 2\ SO_4 + 3\ H_2O.$$

	Berechnet	Gefunden			
Kobalt.....	20·21	20·34	—	—	—
Ammoniak....	29·11	28·03	27·98	28·85	—
Schwefelsäure	27·40	—	27·63	27·32	—
Sauerstoff	5·48	—	—	5·36	5·83

Wird das schwefelsaure Oxykobaltiak im Luftbade auf 110—120° erhitzt, so wird es braunroth, verliert Wasser, Ammoniak und seinen Hyperoxydsauerstoff. Im Versuch (1) betrug der Gewichtsverlust 17·33%.

In einem anderen Versuche wurden 3·0113 Grm. in einem Schiffchen im Luftstrome auf 110° erhitzt; die entweichenden Dämpfe wurden durch verdünnte Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) geleitet und sättigten 20·0 CC. derselben = 5·45% Ammoniak; der Gewichtsverlust betrug im Ganzen 0·5430 Grm. = 18·03%.

Nach der Gleichung:

$$Co_2\,(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}OH\\O.OH\end{matrix}\right\}.\ 2\,SO_4 + 3\,H_2O = Co_2\ (NH_3)_8\,.(OH)_2.$$
$$2SO_4 + 3H_2O + 2NH_3 + O$$

sollte das Salz einen Gewichtsverlust von 17·81% erleiden, wovon 5·82% auf das Ammoniak entfallen. Die Zersetzung erfolgt somit nahezu genau nach der angegebenen Gleichung; der Rückstand besteht auch in der That aus schwefelsaurem Fuskokobaltiak. Er wurde in Wasser gelöst, die Lösung filtrirt und mit einem Gemenge von Ammoniak und Alkohol gefällt; der syrupöse Niederschlag wurde über Schwefelsäure getrocknet und dann analysirt.

1. 0·5243 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 16·35 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 25·59% Ammoniak; der Rückstand wurde mit Salzsäure und Chlorbaryum versetzt, die Menge des Baryumsulfats betrug 0·4798 Grm. = 31·42% SO_3.
2. 0·3503 Grm. gaben 0·2113 Grm. $CoSO_4$ = 22·96% Kobalt

Berechnet für $Co_2\,(NH_3)_8\,(OH)_2.2\,SO_4 + 3\,H_2O$		Gefunden	Fremy fand:		
Kobalt	22·10	22·96	21·8	22·0	23·6
Ammoniak	25·47	25·59	25·6	—	—
Schwefelsäure ..	29·96	31·42	31·5	—	—

Dieselbe Zersetzung wie durch Erhitzen erleidet das schwefelsaure Oxykobaltiak auch, wenn man es durch längeres Durchsaugen von Luft in der Flüssigkeit, aus welcher es sich abgeschieden hat, wieder zersetzt. Aus 20 Grm. Kobaltsulfat dargestelltes Oxykobaltiaksalz war nach drei Stunden vollständig verschwunden; die Flüssigkeit wurde sofort mit Alkohol gefällt, der syrupartige Niederschlag wieder in Wasser gelöst, die Lösung filtrirt, abermals mit Alkohol versetzt und der Niederschlag über Schwefelsäure getrocknet.

1. 0·6468 Grm. gaben 0·3935 Grm. $CoSO_4$ = 23·15% Kobalt.
2. 0·3725 Grm. sättigten bei der Destillation mit Natronlauge 11·5 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 25·34% Ammoniak.

3. 0·3430 Grm. gaben 0·2850 Grm. $BaSO_4$ = 26·02% SO_3. Wenngleich in diesem Falle der Schwefelsäuregehalt etwas zu niedrig gefunden wurde, unterliegt es doch keinem Zweifel, dass sich Fuskokobaltiak gebildet hat.

Bei der Einwirkung der Luft auf eine verdünnte, ammoniakalische Kobaltsulfatlösung (10 Grm. Kobaltsulfat, 50 Grm. Ammoniak, 50 Grm. Wasser) bildet sich ebenfalls Oxykobaltiaksalz; dieses scheidet sich jedoch nicht ab, sondern scheint in dem Maasse als es sich bildet, wieder zersetzt zu werden. In der Flüssigkeit bilden sich sehr bald ölartige, rothbraune Tropfen (wahrscheinlich Fuskokobaltiaksalz), welche nach ungefähr 12stündiger Einwirkung der Luft verschwinden. Nach 2—3 Tagen sind in der Flüssigkeit fast nur Roseo- und Luteokobaltsulfat enthalten.

Salzsaures Oxykobaltiak. Dieses ist wegen seiner Leichtlöslichkeit in Ammoniak und seiner Zersetzbarkeit in feuchtem Zustande etwas schwieriger darzustellen, als die vorhergehenden Salze. Fremy erhielt durch Sättigung einer oxydirten ammoniakalischen Kobaltchlorürlösung mit Salmiak einen aus gelben, prismatischen Krystallen bestehenden Niederschlag, den er wegen seiner Zersetzbarkeit durch kaltes Wasser für das salzsaure Oxykobaltiak hielt; er analysirte denselben aber nicht, da er ihn nur mit Luteokobaltchlorid gemengt erhalten konnte.

Zur Darstellung des salzsauren Oxykobaltiaks verfuhr ich folgendermassen:

20 Grm. krystallisirtes Kobaltchlorür wurden in 50 Grm. Ammoniakflüssigkeit vom specifischen Gewichte 0·912 eingetragen, durch gelindes Erwärmen gelöst, hierauf die Lösung abgekühlt, wobei Kobaltchlorürammoniak als blassrothes krystallinisches Pulver sich abschied, und Luft eingeleitet, bis dieses vollkommen verschwunden war, was 2—$2^1/_2$ Stunden in Anspruch nahm. Die dunkelbraune Lösung wurde nun mit Salmiak gesättigt, vom ungelösten Salmiak abfiltrirt und mit Alkohol versetzt. Anfangs schied sich das Oxykobaltiaksalz als flüssiges Harz aus, wurde aber mit dem Alkoholzusatz fortgefahren, die Flüssigkeit geschüttelt und mit einem Glasstab das Harz von den Gefässwänden abgerieben, so wurde das salzsaure Oxykobaltiak als braunschwarze, krümmelige Masse erhalten. Die Flüssigkeit

wurde vom Niederschlag abgegossen, dieser mehrere Male mit neuen Mengen Alkohol geschüttelt und abgeschlemmt, sodann auf ein Filter gebracht, gut abgesogen, rasch zwischen Filtrirpapier abgepresst und 1 bis 2 Stunden über Schwefelsäure getrocknet.

Hatte man nicht zu viel Alkohol zugesetzt und filtrirt die abgegossene alkoholische Flüssigkeit, so scheidet sich bisweilen das salzsaure Oxykobaltiak nach $^1/_2$stündigem Stehen in Form kleiner, grünlichbrauner, irisirender Blättchen aus.

Auch auf Zusatz von Alkohol allein lässt sich das salzsaure Oxykobaltiak aus einer oxydirten ammoniakalischen Kobaltchlorürlösung abscheiden, man erhält es aber auf diese Weise in Form eines dünnflüssigen, dunkelbraunen Syrups, welcher nach mehrmaligem Verreiben mit starkem Alkohol wohl sehr zähflüssig, aber nicht fest erhalten werden kann. Über Schwefelsäure trocknet er zu einer leicht zerreiblichen schwammigen Masse ein, die jedoch bereits etwas Ammoniak verloren hat.

Die Analyse ergab folgende Zahlen:

A. Mit Chlorammonium und Alkohol gefällt, 2 Stunden über Schwefelsäure getrocknet.

1. 0·3435 Grm. gaben 0·2123 Grm. $CoSO_4$ = 23·52% Kobalt.
2. 0·2800 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 11·7 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 34·30% Ammoniak; der Rückstand gab nach dem Ansäuern mit Salpetersäure und Fällen mit Silbernitrat 0·3567 Grm. Chlorsilber und 0·0008 Grm. metall. Silber, hieraus ergibt sich der Chlorgehalt zu 31·61%.

B. Mit Alkohol allein gefällt; harzige Masse, 12 Stunden über Schwefelsäure getrocknet.

1. 0·4002 Grm. gaben 0·2717 Grm. $CoSO_4$ = 25·84% Kobalt.
2. 0·3087 Grm. gebrauchten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 11·95 CC. derselben Schwefelsäure zur Sättigung, hieraus berechnet sich das Ammoniak zu 31·77%.

C. Grünlichbraune Blättchen, zwischen Papier abgepresst.

1. 0·3565 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 15·15 CC. Schwefelsäure von der angegebenen Concentration, hieraus ergibt sich der Ammoniakgehalt zu 34·88%; der Destillationsrückstand gab bei der Fällung des Chlors mit Silbernitrat 0·4332 Grm. Chlorsilber und 0·0015 metall. Silber, mithin 30·199% Chlor.

Aus diesen Zahlen ergibt sich für das salzsaure Oxykobaltiak die Formel:

$$Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix} OH \\ O.OH \end{matrix}\right\}.Cl_4.$$

	Berechnet	Gefunden		
		A.	*B.*	*C.*
Kobalt.....	24·58	23·52	25·84	—
Ammoniak ..	35·42	34·30	31·77	34·88
Chlor.....	29·58	31·61	—	30·199

Die Ausbeuten an salzsaurem Oxykobaltiak sind recht gute, ich habe aus 30 Grm. Kobaltchlorür ungefähr 20 Grm. desselben erhalten; so grosse Mengen sind jedoch schwer vor rascher Zersetzung zu bewahren, da sie zu lange Zeit zum Trocknen brauchen. Sie gehen über Schwefelsäure oder an der Luft sehr bald in ein bräunlichrothes Salz über, welches nur noch Spuren von Oxykobaltiaksalz enthält. Ein eben solches Salz scheidet sich nach mehrstündigem Stehen aus den vom salzsauren Oxykobaltiak abgegossenen Flüssigkeiten in Form kleiner bräunlichrother Blättchen ab. Diese beiden Körper sind das erste Zersetzungsproduct des salzsauren Oxykobaltiaks, sie unterscheiden sich von diesem durch einen Mindergehalt von 1 Atom Sauerstoff, verlieren leicht zwei Mol. Ammoniak, wobei sie offenbar in salzsaures Fuskokobaltiak übergehen, wie sich aus der Analyse der bräunlichrothen Blättchen ergibt:

	Gefunden	Berechnet für		
		a.	*b.*	*c.*
Kobalt.....	24·08	24·48	25·37	24·38
Ammoniak	31·88	35·26	32·90	28·10
Chlor.....	30·37	29·46	30·53	29·34
Gewichtsverlust bei 100° ...	7·32	10·78	7·52	11·15

a. $= Co_2 . (NH_3)_{10} . (OH)_2 . Cl_4 + H_2O$

b. = Übergangsproduct: $Co_2 . (NH_3)_9 . (OH)_2 . Cl_4 + H_2O$

c. $= Co_2 . (NH_3)_8 . (OH)_2 . Cl_4 + 3\ H_2O$.

Jodwasserstoffsaures Oxykobaltiak. Versetzt man eine oxydirte ammoniakalische Kobaltchlorürlösung mit einer kaltgesättigten wässerigen Jodkaliumlösung, so entsteht sofort ein schwer löslicher grüner, aus kleinen Nadeln bestehender Niederschlag, welcher das den vorher beschriebenen Salzen entsprechende Jodid ist. Das Salz wurde mit concentrirter Jodkaliumlösung, dann mit Alkohol gewaschen und auf einer Thonplatte an freier Luft getrocknet. Es ist das beständigste Oxykobaltiaksalz, verändert sich an der Luft nicht und wird erst durch viel Wasser unter Sauerstoffentwickelung und Abscheidung eines grünen, flockigen, basischen Salzes zersetzt. Concentrirte Jodkaliumlösung zersetzt es in der Kälte nicht, daher es mit derselben ausgewaschen werden kann. Auch aus dem Nitrate lässt es sich erhalten durch Verreiben des fein gepulverten Salzes mit Jodkaliumlösung, doch ist eine mehrmalige Behandlung und längeres Digeriren nöthig, um alle Salpetersäure durch Jodwasserstoffsäure zu ersetzen.

Die Analyse des Salzes führte zur Formel:

$$Co_2 . (NH_3)_{10} . \left\{ \begin{matrix} OH \\ O . OH \end{matrix} \right\} J_4$$

1. 0·5413 Grm. gaben 0·2093 Grm. $CoSO_4 = 14{\cdot}72\%$ Kobalt.
2. 0·5925 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 13·65 CC. Schwefelsäure (1 CC. $= 0{\cdot}008436$ Grm. NH_3) $= 19{\cdot}44\%$ Ammoniak.
3. 0·3117 Grm. wurden mit wässeriger Weinsäurelösung digerirt, dann mit Salpetersäure und Silbernitrat versetzt; es wurden erhalten 0·3400 Grm. Jodsilber und 0·0020 Grm. metall. Silber, mithin $59{\cdot}70\%$ Jod.
4. 0·4100 Grm. einer anderen Darstellung gaben, auf gleiche Weise behandelt, 0·4525 Grm. Jodsilber und 0·0010 Grm. metall. Silber, hieraus ergibt sich der Jodgehalt zu $59{\cdot}93\%$.

5. 0·2930 Grm. gaben 0·3212 Grm. Jodsilber und 0·0026 Grm. metall. Silber = 60·28% Jod.
6. 0·4184 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 9·6 CC. obiger Schwefelsäure = 19·36% Ammoniak.

	Berechnet	Gefunden		
Kobalt	13·95	14·72	—	—
Ammoniak	20·09	19·44	—	19·36
Jod	60·05	59·70	59·93	60·28

Verdünnte Säuren zerlegen das Jodid sofort unter Sauerstoffentwickelung und Jodausscheidung; concentrirte Salpetersäure scheidet Jod aus und gibt beim Kochen nur Luteokobaltnitrat, verdünnte Salpetersäure gibt das grüne Nitrat der Maquenne'schen Reihe.

Die Ausbeute ist eine ganz gute; es wurde meistens eine dem Gewichte des angewandten Kobaltchlorürs gleiche Gewichtsmenge an jodwasserstoffsaurem Oxykobaltiak erhalten.

Verhalten der Oxykobaltiake gegen Säuren.

Fremy gibt an, dass die Oxykobaltiake beim Behandeln mit Säuren unter Sauerstoffentwickelung in Kobaltoxydulsalze übergeführt werden; nur beim Erwärmen des Nitrates mit Salpetersäure erhielt er Roseokobaltnitrat. Im Jahre 1883 beschrieb Maquenne ein Salz, das er durch Einwirkung eines Gemenges gleicher Raumtheile Schwefelsäure, Alkohol und Wasser auf schwefelsaures Oxykobaltiak und darauf folgendes Verdünnen mit Chlorwasser erhalten hatte. Aus diesem Sulfat stellte er auch ein Chlorid und ein leicht zersetzbares Nitrat dar; die Formeln, die er für die analysirten Verbindungen aufstellt, habe ich schon oben angegeben.

Meine Versuche bestätigen im Allgemeinen Maquenne's Angaben, doch verläuft die Einwirkung der Säuren auf die verschiedenen Oxykobaltiaksalze nicht in gleicher Weise. Besonders charakteristisch ist die Einwirkung der Salpetersäure, da diese mit allen schliesslich dasselbe Product gibt, dessen Bildung wegen der geringen Löslichkeit in Salpetersäure sehr gut als Reaction auf Oxykobaltiake dienen kann.

Saure Salze der Oxykobaltiake.

Übergiesst man das Nitrat, Sulfat oder Chlorid des Oxykobaltiaks mit Schwefelsäure (1 : 1), concentrirter Salpeter- oder Salzsäure, so beobachtet man zunächst, dass sie ihre braunschwarze Farbe verlieren und eine zinnoberrothe bis bräunlichviolette Farbe annehmen, ohne dass Sauerstoffgas entweicht. Auch Maquenne gibt an, dass das schwefelsaure Oxykobaltiak beim Eintragen in ein Gemenge gleicher Raumtheile Schwefelsäure, Alkohol und Wasser sich roth färbt.

Diese Farbenänderung rührt nun daher, dass die Oxykobaltiake in saure Salze übergehen, die aber sehr leicht sich zersetzen; am beständigsten ist das saure Sulfat.

Saures schwefelsaures Oxykobaltiak. Ich erhielt es beim Eintragen des fein gepulverten neutralen Salzes in ein abgekühltes Gemenge gleicher Raumtheile concentrirter Schwefelsäure und Wasser. Nach 5 bis 6 Minuten wurde das Salz auf ein Filter gebracht, mit Schwefelsäure derselben Concentration und hierauf mit Alkohol gewaschen. Das über Schwefelsäure getrocknete Salz gab bei der Analyse folgende Zahlen:

1. 0·3012 Grm. gaben 0·1285 Grm. $CoSO_4 = 16·24\%$ Kobalt,
2. 0·2998 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 8·15 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·008436 Grm. NH_3) = 12·93% Ammoniak und gaben 0·3790 Grm. $BaSO_4 = 43·40\%$ SO_3.

Hieraus ergibt sich die Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \left\{ \begin{matrix} OH \\ O.OH \end{matrix} \right\} . 4\, SO_4H.$$

	Berechnet	Gefunden
Kobalt.....	16·25	16·24
Ammoniak	23·42	22·93
Schwefelsäure.....	44·08	43·40

Bei einer zweiten Bereitung, als zur Darstellung desselben ein Gemenge gleicher Volumina Schwefelsäure, Alkohol und Wasser genommen wurde, erhielt ich es auch im wasserhaltigen Zustande.

1. 0·4747 Grm. gaben 0·1827 Grm. $CoSO_4 = 14·65\%$ Kobalt.

2. 0·4003 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 9·58 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·008436 Grm. NH_3) = 20·19% Ammoniak, und gaben 0·4615 Grm. $BaSO_4$ = 39·58% Schwefelsäure.

Die Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \left\{ \begin{matrix} OH \\ O.OH \end{matrix} \right\} \cdot 4\,SO_4H + 4\,H_2O.$$

	Verlangt	Gefunden
Kobalt	14·78	14·65
Ammoniak	21·30	20·19
Schwefelsäure	40·10	39·58

Das saure schwefelsaure Oxykobaltiak besitzt eine zinnoberrothe Farbe; beim Liegen an der Luft erleidet es bei 10 bis 13° C. keine Veränderung, steigt aber die Temperatur auf 20° C., so wird es grün. Durch Wasser wird es sofort unter lebhafter Sauerstoffentwickelung zersetzt, wobei es in Kobaltoxydulsulfat übergeht; nur geringe Mengen bleiben als Kobaltammoniumsalz in Lösung, da concentrirte Salpetersäure nach 1 bis 2tägigem Stehen einen schwachen, aus kleinen graugrünen Nadeln bestehenden Niederschlag gibt. Beim Kochen mit Wasser erhält man ausschliesslich Oxydulsalz.

Bei Aufstellung der Formel des sauren schwefelsauren Oxykobaltiaks wäre man vielleicht, in Anbetracht der überschüssigen Schwefelsäure, geneigt, die Hydroxylgruppe zu eliminiren und dem Salze die Formel:

$$Co_2O_2 \cdot (NH_3)_{10} \cdot 4\,SO_4H + H_2O$$

zu geben; ich glaube aber, dass die Hydroxylgruppe ganz gut auch in einem sauren Salze bestehen kann und verweise auf die Rhodo- und Erythrochromsalze Jörgensen's, welche auch in saurer Lösung die Hydroxylgruppe nicht gegen Säureradicale austauschen; ferner habe ich in der vorliegenden Arbeit auch ein Sulfat von der Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_8 \cdot (OH)_2 \cdot 2\,SO_4 + 3\,H_2O$$

erwähnt, das ich aus den Mutterlaugen des salpetersauren Oxykobaltiaks erhalten habe, und welches sich in kalter con-

centrirter Schwefelsäure löst, aber durch Wasser aus dieser Lösung zum grössten Theile unverändert wieder herausgefällt werden kann. Bei Annahme der Hydroxylgruppe erklärt sich auch besser die Zersetzbarkeit dieser sauren Salze und die Leichtigkeit, mit welcher sie in die grünen Maquenne'schen Salze übergehen.

Saures salpetersaures Oxykobaltiak. Man erhält es durch Eintragen von gepulvertem salpetersauren Oxykobaltiak in concentrirte Salpetersäure; nach $^1/_4$ bis $^1/_2$stündiger Einwirkung hatte dasselbe eine bräunlichrothe Farbe angenommen. Es wurde von der Flüssigkeit durch Filtration getrennt, einige Zeit auf einer Thonplatte ausgebreitet, dann zwischen Filtrirpapier rasch abgepresst und sofort in gewogene und mit gut eingeschliffenem Glasstöpsel versehene Röhrchen eingefüllt. Das saure salpetersaure Salz zerlegt sich nämlich sehr bald, so wie es trocken geworden ist, und nimmt unter Abgabe weisser saurer Dämpfe eine grüne Farbe an. Die Zusammensetzung desselben entspricht nicht der eines dem sauren Sulfat analogen salpetersauren Salzes, indem es nur ein $^5/_4$ saures Salz ist.

1. 0·5580 Grm. gaben 0·2422 Grm. $CoSO_4 = 16·52\%$ Kobalt.
2. 0·5275 Grm. gaben bei Zersetzung mit Barytwasser, Ausfällen des überschüssigen Baryts mittelst Kohlensäure und Fällen des Baryumnitrats mit Schwefelsäure 0·4598 Grm. $BaSO_5 = 40·40\%$ N_2O_5.
3. 0·4495 Grm. einer anderen Bereitung gaben 0·2060 Grm. $CoSO_4 = 17·44\%$ Kobalt.
4. 0·5885 Grm. gaben 0·4960 Grm. $BaSO_4 = 39·07\%$ N_2O_5.

Hieraus ergibt sich die Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \left\{ \begin{matrix} OH \\ O \cdot OH \end{matrix} \right\} \cdot 4NO_3 \cdot HNO_3 + 2H_2O.$$

	Berechnet	Gefunden	
Kobalt	17·22	16·52	17·44
Salpetersäure ..	39·42	40·40	39·07

Andere saure Salze. Bei Einwirkung concentrirter Salzsäure auf salzsaures Oxykobaltiak entsteht ebenfalls ein saures, rothbraun gefärbtes Salz, dieses zersetzt sich aber sehr schnell,

selbst in der sauren Flüssigkeit, unter lebhafter Sauerstoffentwickelung.

Lässt man concentrirte Salzsäure auf salpetersaures oder schwefelsaures Oxykobaltiak, oder Salpetersäure auf letzteres einwirken, so erhält man Verbindungen mit zwei verschiedenen Säuren. Ich habe diese sehr leicht zersetzbaren Verbindungen zu dem Zwecke dargestellt, um nachzuweisen, dass auch durch Einwirkung von Salpeter- oder Salzsäure zweifach saure Salze entstehen.

Salzsaures Chloridsulfat wurde durch Eintragen von schwefelsaurem Oxykobaltiak in concentrirte Salzsäure erhalten.

1. 0·1880 Grm. gaben 0·0809 Grm. $CoSO_4$ = 16·38% Kobalt.
2. 0·8826 Grm. gaben 0·3630 Grm. Chlorsilber und 0·0030 Grm. metall. Silber = 32·13% Chlor.

Formel:

$$Co_2(NH_3)_{10}\cdot\begin{Bmatrix}OH\\O.OH\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}SO_4\\Cl_2\end{Bmatrix}+4\,HCl.$$

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	18·13	16·38
Chlor	32·72	32·13

Salpetersaures Nitratsulfat wurde durch Eintragen von schwefelsaurem Oxykobaltiak in Salpetersäure erhalten.

1. 0·5253 Grm. gaben 0·2070 Grm. Kobaltsulfat = 15·00% Kobalt.
2. 0·4113 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 10·6 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·008436 Grm. NH_3) = 21·74% Ammoniak.
3. 0·4338 Grm. einer anderen Bereitung gaben 0·1751 Grm. $CoSO_4$ = 15·36% Kobalt.

Formel:

$$Co_2\cdot(NH_3)_{10}\cdot\begin{Bmatrix}OH\\O.OH\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}SO_4\\2\,NO_3\end{Bmatrix}+4\,HNO_3$$

	Berechnet	Gefunden	
Kobalt	14·57	15·00	15·36
Ammoniak	20·99	21·74	—

Salzsaures Chloridnitrat entsteht bei der Einwirkung concentrirter Salzsäure auf salpetersaures Oxykobaltiak.

1. 0·3148 Grm. gaben 0·1330 Grm. $CoSO_4$ = 16·08% Kobalt.
2. 0·2815 Grm. gaben 0·3205 Grm. Chlorsilber und 0·0025 metall. Silber = 28·46% Chlor.

Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \cdot \begin{Bmatrix} OH \\ O.OH \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\,NO_3 \\ 2\,Cl \end{Bmatrix} + 4\,HCl.$$

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	17·38	16·08
Chlor	31·37	28·46

Bei Annahme von drei Mol. H_2O in diesem Salze stimmen die gefundenen Zahlen besser mit den berechneten (Co = 16·09, Cl = 29·05) überein.

Diese gemischten sauren Salze besitzen eine bräunlich-violette Farbe und zersetzen sich in trockenem Zustande sehr rasch, wobei sie grün werden. Das salpetersaure Nitratsulfat stösst hiebei unter Wärmeentwickelung dicke weisse Dämpfe aus, welche sich an den Wandungen des Glasröhrchens unter Bildung kleiner Krystalle von Ammoniumnitrat condensiren; ebenso überzieht sich das grüne Product mit einer dünnen weissen Salzschichte. Im Röhrchen ist nach beendeter Reaction etwas Sauerstoffgas nachweisbar, hinlänglich, um einen in dasselbe eingeführten glimmenden Span zur Entzündung zu bringen.

Wenngleich ich diese Körper nicht einer vollständigen Analyse unterworfen habe, glaube ich doch, dass obige Zahlen deren Existenz zur Genüge beweisen.

II. Anhydro-Oxykobaltiake.

Von den Salzen dieser Reihe hat Maquenne das Sulfat, das Chlorid und das Nitrat dargestellt, jedoch nur die ersteren beiden analysirt. Die von ihm aufgestellten Formeln kann ich aber nicht ganz bestätigen. Maquenne hat beispielsweise nicht angegeben, wie er den Wassergehalt der Salze bestimmte; wahrscheinlich brachte er den Gewichtsverlust bei 100° als

Wasser in Rechnung. Dieses ist wenigstens für das Chlorid nicht richtig, da dasselbe bei dieser Temperatur nicht blos Krystallwasser, sondern auch Ammoniak und Sauerstoff verliert, was Maquenne übersehen zu haben scheint. Der Rückstand enthält kein Oxykobaltiak mehr, sondern nur Purpureo- und Luteokobaltsalz.

Was die Formel im Allgemeinen anbetrifft, so betrachtet sie Maquenne als saure Oxykobaltiake; diese Ansicht dürfte nun, nachdem ich im Vorhergehenden die sauren Oxykobaltiaksalze beschrieben habe, wohl nicht mehr haltbar sein. Ihre Entstehung erklärt sich unter Zugrundelegung meiner Formeln nach folgender Gleichung:

$$Co_2(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}OH\\O.OH\end{matrix}\right\}.Cl_4 + HCl = Co_2(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}Cl_4 + H_2O.$$

Da man also annehmen kann, dass diese Salze bei Einwirkung von Säuren auf Fremy's Oxykobaltiaksalze unter Austritt von Wasser entstehen, habe ich mir erlaubt, sie als eine neue Reihe von Kobaltammoniumverbindungen, zum Unterschiede von den Oxykobaltiaken, mit dem Namen Anhydro-Oxykobaltiake zu belegen.

Salpetersaures Anhydro-Oxykobaltiak. Ich beginne mit diesem Salze, da es das am leichtesten darstellbare Derivat dieser Reihe ist. Man erhält es stets bei der Einwirkung von Salpetersäure sowohl auf Oxykobaltiaksalze, als auch auf andere Salze dieser Reihe. Am zweckmässigsten stellt man es aus dem salpetersauren Oxykobaltiak dar, indem man dieses in ein Gemenge gleicher Raumtheile concentrirter Salpetersäure und Wasser einträgt, einige Zeit in der Kälte digerirt und dann bis zur vollständigen Lösung erwärmt. Man kühlt hierauf die blauviolette Flüssigkeit ab und filtrirt. Auf dem Filter bleibt das Nitrat als blaugrauer feinkrystallinischer Niederschlag zurück; das Filtrat ist roth gefärbt und enthält Roseokobaltnitrat, welches beim Stehen in Form kleiner rother Krystalle sich abscheidet. Das erhaltene blaugraue Nitrat kann aus salpetersäurehältigem Wasser umkrystallisirt werden; es schiesst beim Erkalten der Lösung in feinen, langen, lauchgrünen Nadeln an, welche bei Gasbeleuchtung schön grasgrün aussehen. In reinem Wasser

löst es sich wenig mit grüner Farbe auf, die Lösung zersetzt sich aber schon nach wenigen Minuten unter Sauerstoffentwickelung und Abscheidung von Kobaltoxydhydrat. In säurehältiger Lösung kann es andauernd gekocht werden, ohne merkliche Zersetzung zu erleiden. Erhitzt man es im trockenen Zustande auf 100 bis 120°, so wird es unter Ammoniakverlust zunächst violett, schliesslich blassroth und löst sich dann in Wasser mit röthlichgelber Farbe. Diese Lösung entwickelt beim Erwärmen mit Natronlauge keinen Sauerstoff mehr; mit concentrirter Salzsäure gibt sie erst einen rothen Niederschlag von Purpureokobaltchlorid, dann einen gelben von Luteokobaltchlorid.

Die Analyse ergab folgende Resultate:

1. 0·2467 Grm. verloren bei 110° C. 0·0208 Grm. = 8·43% und gaben 0·1217 Grm. $CoSO_4$ = 18·77% Kobalt.
2. 0·3147 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 9·85 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 25·69% Ammoniak.
3. 0·2022 Grm. einer anderen Bereitung sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 6·55 CC. derselben Schwefelsäure = 26·59% Ammoniak.
4. 0·3857 Grm. sättigten bei der Destillation mit Barytwasser 12·4 CC. Schwefelsäure = 26·39% Ammoniak; der Destillationsrückstand wurde mit Kohlensäure gesättigt, gekocht, filtrirt und im Filtrate der an Salpetersäure gebundene Baryt durch Schwefelsäure ausgefällt. Hierbei wurden erhalten: 0·3470 Grm. $BaSO_4$ = 41·17% N_2O_5.
5. 0·3044 Grm. verloren bei 110° 0·0245 Grm. = 8·04% und gaben 0·1487 Grm. $CoSO_4$ = 18·59% Kobalt.
6. 0·5072 Grm. wurden im Kohlensäurestrom durch Kochen mit Wasser zersetzt; das entweichende Sauerstoffgas wurde erst durch verdünnte Schwefelsäure geleitet, dann über Kalilauge aufgefangen. Seine Menge betrug 16·8 CC. bei 751·5 Mm. Barometerstand und 22·0° C.; der Rückstand im Kölbchen wurde mit Salzsäure und Jodkalium versetzt und das Jod mit Natriumhyposulfitlösung (1 CC.=0·012576 Jod) titrirt, wovon 7·1 CC. gebraucht wurden. Hieraus ergibt sich der Sauerstoffgehalt zu 4·22% als Gas, 1·11% an Kobalt gebunden, im Ganzen 5·33% mehr als zur

Bildung von Kobaltoxydul nöthig gewesen wären. Aus diesen Zahlen ergibt sich die Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \left\{ \begin{matrix} NO_3 \\ O.OH \end{matrix} \right\} . 4\,NO_3 + H_2O.$$

	Berechnet	Gefunden		
Kobalt	18·18	18·77	18·59	—
Ammoniak	26·19	25·69	26·44	26·59
Salpetersäure (N_2O_5)	41·60	—	41·17	—
Sauerstoff	4·93	—	5·33	—

Beim Erhitzen im Luftbade auf 110° verliert das Salz ausser Wasser auch Ammoniak; der Gewichtsverlust bei 110° entspricht der Abgabe von $H_2O + NH_3 + O$ (ber. 7·86%); bei 120° bis zum constanten Gewicht erhitzt, verloren 0·2467 Grm. (im 1. Vers.) 0·0252 Grm. = 10·21%, einem Verluste von $H_2O + 2\,NH_3 + O$ würden 10·47% entsprechen.

Salzsaures Anhydro-Oxykobaltiak. Am besten erhält man dasselbe durch Eintragen des frisch bereiteten salzsauren Oxykobaltiaks in kalte concentrirte Salzsäure. Es bildet sich zunächst bräunlichrothes saures Oxykobaltiak, welches aber sehr bald in grünes Anhydro-Oxykobaltiak übergeht, wobei ein Theil desselben unter lebhafter Sauerstoffentwickelung in Purpureokobaltchlorid sich verwandelt; Geruch nach Chlorgas habe ich nur gegen Ende der Einwirkung bemerkt. Das grüne Chlorid bildet sich ausserdem beim Behandeln von salpetersaurem oder schwefelsaurem Oxykobaltiak mit verdünnter Salzsäure (1:1—2), ferner beim Eintragen der angesäuerten wässerigen Lösungen des salpeter- und des schwefelsauren Anhydro-Oxykobaltiaks in concentrirte Salzsäure. In allen diesen Fällen entsteht zuerst ein Chloridnitrat oder Chloridsulfat, welche erst bei wiederholter Behandlung mit concentrirter Salzsäure in das reine Chlorid übergehen.

Die Analyse ergab folgende Resultate:

1. 0·2602 Grm. gaben 0·1512 Grm. $CoSO_4$ = 22·11% Kobalt.
2. 0·2363 Grm. gaben 0·3230 Grm. Chlorsilber und 0·0035 Grm metall. Silber = 34·30% Chlor.
3. 0·2910 Grm. einer anderen Bereitung sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 10·95 CC.

Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 30·88% Ammoniak; der Rückstand gab nach Zusatz von Salpetersäure und Silbernitrat 0·4012 Grm. Chlorsilber und 0·0008 metall. Silber, woraus sich der Chlorgehalt zu 34·19% ergibt.

4. 0·3696 Grm. gaben 0·2125 Grm. $CoSO_4$ = 21·88% Kobalt.
5. 0·2898 Grm. verloren bei 110° 0·0403 Grm. = 13·90% und sättigten hierauf bei der Destillation mit Natronlauge 9·15 CC. Schwefelsäure = 25·91% Ammoniak.
6. 0·2775 Grm. einer dritten Bereitung gaben 0·3900 Grm. Chlorsilber und 0·0015 Grm. metall. Silber = 34·94% Chlor.
7. 0·3178 Grm. sättigten bei der Destillation mit Barytwasser 12·0 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·008436 Grm. NH_3) = 31·85% Ammoniak.
8. 0·2813 Grm. einer vierten Darstellung verloren bei 110° 0·0353 Grm. = 12·54% und gaben 0·1642 Grm. $CoSO_4$ = 22·22% Kobalt.
9. 0·3121 Grm. sättigten bei der Destillation mit Barytwasser 11·6 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·008436 Grm. NH_3) = 31·35% Ammoniak.
10. 0·4332 Grm. wurden im Kohlensäurestrom durch Kochen mit Wasser zersetzt, sonst wurde wie beim Nitrat verfahren. Die Menge des Sauerstoffes betrug 13·2 CC. bei 748·5 Mm Barometerstand und 18·5° C.; an Natriumhyposulfitlösung wurden gebraucht 8·6 CC. Hieraus ergibt sich: Sauerstoff als Gas 3·93%, an Kobalt gebunden 1·57%, mithin im Ganzen 5·50%.

Aus diesen Zahlen ergibt sich die Formel:

$$Co_2.(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}.Cl_4 + H_2O$$

	Berechnet	Gefunden			
Kobalt	22·84	22·11	21·88	—	22·22
Ammoniak	32·91	—	30·88	31·85	—
Chlor	34·37	34·30	34·19	34·94	—
Sauerstoff	6·19	—	—	—	5·50
Gewichtsverlust bei 110° $= H_2O + 2NH_3 + O$	13·16	—	13·90	—	12·54

Das salzsaure Anhydro-Oxykobaltiak löst sich in Wasser leicht auf; die Lösung besitzt eine blaugrüne Farbe und zersetzt sich nach wenigen Minuten. Die mit verdünnter Salzsäure bereitete heisse Lösung scheidet es beim Erkalten in langen grünen Nadeln aus; sowohl concentrirte Salzsäure als auch Alkohol fällen es aus concentrirter Lösung als hellgrünen, aus kleinen, verfilzten Nadeln bestehenden Niederschlag. An der Luft ist es beständig; im Luftbade auf 110° erhitzt, verliert es ausser Wasser auch Ammoniak und wird roth. Der Verlust an Ammoniak entspricht 2 Mol., so dass der Rückstand noch 26·33% Ammoniak enthält (gefunden im Vers. 5. = 25·91%). Geringe Verunreinigungen bewirken, dass das Salz beim Aufbewahren auch bei gewöhnlicher Temperatur die grüne Farbe verliert und eine rothe annimmt, wobei stets schwacher Ammoniakgeruch bemerkbar ist. Diese Veränderung scheint durch geringe Mengen freier Salzsäure bewirkt zu werden, da ich stets ein Rothwerden des Salzes beobachtete, wenn das Salz nicht sorgfältig durch Auswaschen mit Alkohol von der freien Säure befreit war. Auch Maquenne beobachtete das Rothwerden des Salzes, jedoch nur bei dem durch Alkohol gefällten Präparat; es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Reduction des grünen Chlorids auch durch geringe Mengen Alkohol verursacht wird.

Die Farbenänderung beruht hauptsächlich auf einer Reduction:

$$Co_2(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}Cl_4 = Co_2(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}Cl\\OH\end{matrix}\right\}Cl_4 + O,$$

das hiebei entstehende rothe Salz wäre, seiner Zusammensetzung nach, ein dem Erythrochromchlorid analoges Kobaltsalz.

Bei der Analyse gab das über Schwefelsäure getrocknete Salz folgende Zahlen

	Berechnet für $Co_2(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}Cl\\OH\end{matrix}\right\}Cl_4$	Gefunden
Kobalt	24·45	23·55
Ammoniak	35·23	32·33
Chlor	36·78	36·83

In Wasser löst es sich mit blassrother Farbe auf, aus dieser Lösung fällt Salzsäure nur Purpureokobaltchlorid; Sublimatlösung

gibt einen blassrothen flockigen Niederschlag, der sich nach Zusatz einiger Tropfen Essigsäure beim Erwärmen vollständig löst und beim Erkalten in kleinen bräunlichgelben Krystallen abscheidet.

Wird die salzsaure Lösung des Anhydro-Oxykobaltiakchlorids andauernd gekocht, so entsteht Purpureokobaltchlorid. Diese Reduction kann auch durch verschiedene Reductionsmittel bewirkt werden, z. B. verdünnte schwefelige Säure, Zinnchlorür, Alkohol, Weinsäure, Eisenvitriol. Es ist jedoch schwer, die Reduction nur bis zur Bildung von Purpureokobaltchlorid zu führen, sie geht meist zu weit, so dass viel Kobaltoxydulsalz entsteht; ein Theil des Sauerstoffs entweicht hierbei stets als Gas.

Beim Übergiessen des festen Salzes mit verdünntem Ammoniak und gelindem Erwärmen bis die Gasentwicklung aufgehört hat, erhält man einen rothen Niederschlag von Purpureokobaltchlorid (gef. Co = 23·49%, NH_3 = 33·35%) und eine bräunlichgelbe Lösung. Aus letzterer fällt Alkohol einen blassgelben Niederschlag von Luteokobaltchlorid (gef. Co = 22·27%, NH_3 = 36·92%, Cl = 37·35%). Ich erwartete, durch vorsichtig ausgeführte Reduction zu einem Erythrokobaltchlorid zu gelangen, was nicht der Fall war. Das alkoholische Filtrat gab auf Zusatz von Schwefelsäure nur Roseokobaltsulfat (gef. Co = 17·81, NH_3 = 24·48, SO_3 = 34·01, H_2O = 10·64).

Chloridnitrate. Ich erwähnte oben, dass man bei Einwirkung von Salzsäure auf das salpetersaure Oxykobaltiak nicht sofort das reine Chlorid erhält.

Es entsteht zuerst ein Chloridnitrat, welches aus verdünnter Salzsäure in lauchgrünen, prismatischen Krystallen erhalten wird. Die Analyse ergab die Formel:

$$Co_2.(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}Cl\\O\cdot OH\end{matrix}\right\}.Cl_2.2\,NO_3+H_2O.$$

1. 0·3939 Grm. gaben 0·2074 Grm. $CoSO_4$ = 20·04% Kobalt.
2. 0·3130 Grm. sättigten bei der Destillation mit Barytwasser 10·9 CC. Schwefelsäure (1CC = 0·0082088 Grm. NH_3) = 28·59% Ammoniak; der Rückstand gab 0·2305 Grm. Chlorsilber und 0·0033 Grm. metal. Silber = 18·56% Chlor.

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	20·72	20·04
Ammoniak	29·85	28·59
Chlor	18·70	18·56

Ausser diesem Chloridnitrat existirt auch ein chlorärmeres Salz, welches man durch Fällung der mit verdünnter Salzsäure bereiteten Lösung des salzsauren Anhydro-Oxykobaltiaks durch Salpetersäure erhält. Seine Formel ist:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \cdot \left\{ \begin{matrix} Cl \\ O.OH \end{matrix} \right\} \cdot 4NO_3 + H_2O.$$

1. 0·1647 Grm. verloren im Luftbade bei 110° bis 120° 0·0185 Grm. = 11·23%, und gaben 0·0810 Grm. $CoSO_4$ = 18·72% Kobalt.
2. 0·1570 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 5·05 CC. Schwefelsäure (1CC = 0·0082088 Grm. NH_3) = 26·40% Ammoniak; der Rückstand gab 0·0357 Grm. Chlorsilber und 0·0013 Grm. metal. Silber = 5·89% Chlor.

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	18·95	18·72
Ammoniak	27·31	26·40
Chlor	5·70	5·89
Gewichtsverlust bei 110° $= H_2O + 2NH_3 + O$	10·92	11·23

Es gleicht in Farbe und Eigenschaften den anderen Salzen dieser Reihe, nur ist es in Wasser schwerer löslich als die vorher beschriebenen Chloride.

Quecksilberchloridverbindung. Auf Zusatz von Sublimatlösung zu einer Lösung von salzsaurem Anhydro-Oxykobaltiak entsteht sofort ein dunkelgrüner schwerer Niederschlag; dieser lässt sich aus sehr verdünnter heisser Salzsäure umkrystallisiren, wobei man ein krystallinisches Pulver von der Farbe des geglühten Chromoxyds erhält. Seine Lösung in verdünnter Salzsäure zersetzt sich bei andauerndem Kochen sehr leicht unter Bildung von Purpureokobaltchlorid und Kobaltchlorür. In Sublimatlösung ist das Salz ganz unlöslich.

1. 0·5155 Grm. gaben 0·1230 Grm. $CoSO_4 = 9·08\%$ Kobalt.
2. 0·4510 Grm. gaben 0·2412 Schwefelquecksilber (zweimal gefällt) $= 46·10\%$ Quecksilber; das Filtrat vom HgS sättigte, nach dem Eindampfen und Destilliren mit Natronlauge, 6·4 CC. Schwefelsäure (1 CC = 0·0082088 Grm. NH_3) $= 11·64\%$ Ammoniak. Hieraus ergibt sich die Formel:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \cdot \left\{ \begin{matrix} Cl \\ O \cdot OH \end{matrix} \right\} \cdot Cl_4 + 3\,HgCl_2.$$

	Berechnet	Gefunden
Kobalt.....	8·99	9·08
Ammoniak	12·96	11·64
Quecksilber ...	45·75	46·10

Patindoppelsalz. Man erhält es in kleinen grünlichgelben nadelförmigen Krystallen beim Versetzen einer Lösung des salzsauren Anhydro-Oxykobaltiaks mit Platinchlorid; in salzsäurehältigem Wasser löst es sich beim Erwärmen mit grüner Farbe auf und scheidet sich beim Erkalten in gelblichgrünen, prismatischen Krystallen wieder ab, welche sich beim Aufbewahren leicht zersetzen, wobei sie eine braunrothe Farbe annehmen.

1. 0·2408 Grm. verloren im Luftbade bis auf 140° erhitzt 0·0170 Grm. $= 7·06\%$ und gaben nach der Reduction im Wasserstoffstrom 0·0953 Grm. eines aus Platin und Kobal bestehenden Rückstandes $= 39·58\%$.

2. 0·2517 Grm. wurden mit chlorfreiem Kaliumnatriumcarbonat gemischt, die Mischung mit Wasser befeuchtet, hierauf getrocknet und geschmolzen. Nach Auflösung der Schmelze in Wasser und Versetzen mit Salpetersäure und Silbernitrat wurden 0·3715 Grm. Chlorsilber und 0·0033 Grm. metal. Silber erhalten $= 36·94\%$ Chlor.
   Aus diesen Zahlen berechnet sich die Formel:

$$Co_2\,(NH_3)_{10} \cdot \left\{ \begin{matrix} Cl \\ O.OH \end{matrix} \right\} \cdot Cl_4 + 2\,PtCl_4 + 5H_2O$$

	Berechnet	Gefunden
Kobalt + Platin	40·17	39·58
Chlor	36·59	36·94
Wasser	7·14	7·06

Schwefelsaure Anhydro-Oxykobaltiaksalze. Wird feingepulvertes schwefelsaures Oxykobaltiak in ein Gemenge gleicher Raumtheile Schwefelsäure und Wasser eingetragen, so entsteht, wie oben angegeben, zunächst saures schwefelsaures Oxykobaltiak. Beim Erwärmen oder bei Zusatz von Wasser wird dieses fast vollständig zersetzt; Alkohol fällt dann aus der rothen Lösung nur Spuren eines blassgrünen flockigen Niederschlags. Ist aber in der Lösung ein Oxydationsmittel vorhanden, so wird die Reduction des Oxykobaltiaks zum grossen Theile verhindert. Deshalb gibt Maquenne an, die Flüssigkeit, welche das saure Salz enthält, mit Chlorwasser zu verdünnen. Der Alkohol, den er zusetzt, ist eher von Nachtheil, da er die Wirkung des Chlorwassers schwächt. Nichtsdestoweniger ist die Ausbeute, bei Anwendung von Chlorwasser, noch immer eine sehr unbefriedigende. Weit besser ist der Erfolg, wenn man Kaliumpermanganat oder Kaliumbichromat anwendet und in folgender Weise verfährt:

Eine kalt gesättigte wässerige Kaliumpermanganatlösung, der man das gleiche Volumen Schwefelsäure (1:5) zugesetzt hat, wird nach und nach unter Umschütteln mit schwefelsaurem Oxykobaltiak versetzt, bis die rothe Farbe der Lösung verschwunden ist, welche Veränderung unter lebhaftem Aufbrausen sich vollzieht. Nun wird aufgekocht und sofort filtrirt; auf dem Filter bleibt etwas Kobaltoxydhydrat. Das Filtrat scheidet beim Erhalten flache, bis 1 Cm. lange prismatische Krystalle von tief blaugrüner, nahezu schwarzer Farbe ab. Die Krystalle wurden mit verdünnter Schwefelsäure, dann mit Alkohol gewaschen und an der Luft getrocknet.

Das auf diese Weise dargestellte Salz ist ein saures Sulfat. Maquenne erhielt ebenfalls nach seiner Methode ein saures Sulfat, doch fand ich einen anderen Wassergehalt; trotzdem ich die Versuche mehrmals wiederholte, konnte ich kein mit dem Maquenne'schen Salz in der Formel übereinstimmendes Sulfat erhalten.

Die Analyse ergab für das saure Sulfat die Formel:

$$2[Co_2(NH_3)_{10}.OOH].5SO_4+2H_2SO_4+2H_2O.$$

1. 0·2707 Grm. verloren, bei 110° bis zum constanten Gewichte erhitzt, 0·0053 Grm. = 1·95%, und gaben 0·1217 Grm. $CoSO_4$ = 17·11% Kobalt.
2. 0·3060 Grm. gaben 0·3606 Grm. $BaSO_4$ = 40·46% Schwefelsäure (SO_3).

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	17·43	17·11
Schwefelsäure	41·36	40·46
Wasser	2·66	1·95

Das Salz verliert bis 110° nur Wasser und ändert sein Aussehen nicht; erst über 130° beginnt es Ammoniak abzugeben und wird allmälig violett; der Gewichtsverlust bei 150° wurde im Versuch 1. zu 0·0203 = 7·49% gefunden (für $2H_2O+4NH_3$ verlangt die Rechnung 7·68%).

Wird dieses saure Salz aus verdünnter Schwefelsäure umkrystallisirt, so geht es in ein weniger saures Salz über von der Formel:

$$2[Co_2(NH_3)_{10}.O.OH].5SO_4.+SO_4H_2+3H_2O.$$

1. 0·2585 Grm. verloren bei 110° 0·0142 Grm. = 5·49%, und gaben 0·1222 Grm. $CoSO_4$ = 17·99% Kobalt.
2. 0·2537 Grm. gaben 0·2638 Grm. Baryumsulfat = 35·697% Schwefelsäure (SO_3).

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	17·77	17·99
Schwefelsäure	36·14	35·697
$2H_2O$	5·42	5·49

Auch dieses Sulfat ändert erst über 130° seine Farbe und verliert dann Ammoniak; der Gewichtsverlust bei 150° betrug im Versuch 1. 0·0385 Grm. = 14·89% (die Rechnung verlangt für die Abgabe von $2H_2O+4NH_3$ = 15·66%).

Bei anderen Darstellungen erhielt ich 36·19, 34·9, und bei einem nach Maquenne's Vorschrift dargestellten Salze 34·53% SO_3.

Bei weiterem Umkrystallisiren aus sehr verdünnter Schwefelsäure erhält man das neutrale schwefelsaure Anhydro-Oxykobaltiak; zu seiner Darstellung ist es jedoch vortheilhafter, vom salpetersauren Oxykobaltiak auszugehen. Dieses wird in fein gepulvertem Zustande in ein abgekühltes Gemenge gleicher Raumtheile Schwefelsäure und Wasser eingetragen und mehrere Stunden in der Kälte digerirt. Alsdann fügt man ein dem Flüssigkeitsvolumen gleiches Volumen Wasser hinzu, erwärmt bis zur vollständigen Lösung und kühlt ab. Das sich hiebei ausscheidende Salz ist ein saures Nitratosulfat; beim Umkrystallisiren aus verdünnter Schwefelsäure geht es in das neutrale Sulfat über.

Das neutrale Sulfat besitzt eine hellere grüne Farbe als die sauren Salze, in kaltem Wasser ist es, wie diese, schwer löslich.

Die Analyse ergab folgende Resultate:

1. 0·3083 Grm. verloren bei 110 bis 120° 0·0258 Grm. = 8·37%, und gaben 0·1510 Grm. $CoSO_4$ = 18·64% Kobalt.
2. 0·3050 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 9·95 CC. Schwefelsäure (1CC = 0·0082088 Grm. NH_3) = 26·78% Ammoniak und gaben 0·2819 Grm. Baryumsulfat = 32·42% Schwefelsäure (SO_3).
3. 0·2650 Grm. einer anderen Bereitung gaben 0·1295 Grm. $CoSO_4$ = 18·60% Kobalt.
4. 0·2440 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 7·9 CC. derselben Schwefelsäure = 26·58% Ammoniak.
5. 0·4175 Grm. gaben 0·3927 Grm. Baryumsulfat = 32·29% Schwefelsäure.
6. 0·3425 Grm. verloren bei 110° 0·0290 Grm. = 8·47%, bis 170° erhitzt 0·0570 Grm. = 16·64% und sättigten hierauf bei der Destillation mit Natronlauge 8·5 CC. Schwefelsäure (1CC = 0·008436 Grm. NH_3) = 20·94% Ammoniak.

Aus diesen Zahlen ergibt sich die Formel:

$$2[Co_2(NH_3)_{10}.O.OH].5SO_4 + 8H_2O.$$

	Berechnet	Gefunden	
Kobalt	18·64	18·64	18·60
Ammoniak	26·85	26·78	26·58
Schwefelsäure	31·59	32·42	32·29
$6H_2O$	8·53	8·37	8·47

Bei einer Temperatur von 110° bis 120° im Luftbade erhitzt, ändert das Salz seine Farbe nicht, über 130° wird es unter Ammoniakverlust violett und ist erst bei andauerndem Erhitzen auf 170° homogen violettroth gefärbt. Der Gewichtsverlust bei dieser Temperatur berechnet sich bei einer Abgabe von $8H_2O + 4NH_3$ zu 16·75%, im Rückstand sollten noch 21·48% Ammoniak enthalten sein; im Versuch 6 betrug der Verlust im Ganzen 16·64%, der Ammoniakgehalt 20·94%.

Bei der Darstellung des neutralen Sulfates erwähnte ich ein Nitratosulfat; dieses gleicht in seinem Aussehen den übrigen sauren Sulfaten und ist ebenfalls in Wasser schwer löslich.

Der Salpetersäuregehalt lässt sich sehr leicht nachweisen durch Zerlegung des Salzes mit Barytwasser, Filtriren, Fällung des Baryts mittelst verdünnter Schwefelsäure und Prüfung der vom Baryumsulfat abfiltrirten Flüssigkeit mit Eisenvitriol und concentrirter Schwefelsäure. Seine Formel ist:

$$Co_2 \cdot (NH_3)_{10} \cdot \left\{ \begin{matrix} NO_3 \\ O.OH \end{matrix} \right\} \cdot 2SO_4 \cdot + SO_4H_2 + H_2O.$$

1. 0·3607 Grm. gaben 0·1577 Grm. $CoSO_4 = 16·64\%$ Kobalt.
2. 0·3256 Grm. gaben 0·3403 Grm. Baryumsulfat = 35·88% Schwefelsäure (SO_3).
3. 0·3132 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 9·1 CC. Schwefelsäure (1 CC = 0·0082088 Grm. NH_3) = 23·85% Ammoniak.
4. 0·3692 Grm. wurden mit Natronlauge destillirt, das Destillat neutralisirte 10·45 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·008436 Grm. NH_3) = 23·88% Ammoniak.
5. 0·5467 Grm. verloren im Luftbade bei 110° bis 120° 0·0140 Grm. = 2·56%; über 150° bis 160° 0·0592 Grm. = 10·83%; der Rückstand wurde mit Weinsäure und Natronlauge destillirt, das überdestillirende Ammoniak sättigte 12·85 CC. Schwefelsäure (1 CC = 0·0082088 Grm. NH_3) = 19·48% Ammoniak.

	Berechnet	Gefunden	
Kobalt	17·07	16·64	—
Ammoniak	24·60	23·85	23·88
Schwefelsäure	34·73	35·88	—
Wasser	2·60	2·56	—

Die Krystalle des Salzes werden bei 110° bis 120° matt, sie behalten aber ihre grüne Farbe bei; erst bei 150° entweicht Ammoniak, wobei das Salz eine violettrothe Farbe annimmt. Unter der Voraussetzung, dass das Salz bei dieser Temperatur einen aus $2NH_3 + 2H_2O + O$ bestehenden Verlust erleidet, berechnet sich dieser zu 12·44%; im Rückstand sollten dann noch 19·68% Ammoniak enthalten sein; im Versuche 5 wurden 10·83% Gewichtsverlust und 19·48% Ammoniak gefunden.

Bei Behandlung des salzsauren Oxybaltiaks mit einem Gemenge gleicher Raumtheile Wasser und Schwefelsäure erhält man eine geringe Menge eines grasgrünen Chloridsulfates von der Formel:

$$Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}.2SO_4 + 3H_2O$$

1. 0·2890 Grm. verloren, im Luftbade bei 110° bis zum constanten Gewichte erhitzt, 0·0233 Grm. = 8·06% und gaben 0·1458 Grm. $CoSO_4$ = 19·20% Kobalt; beim Trocknen hatte das Salz die Farbe nicht geändert.
2. 0·2620 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 8·8 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 27·57% Ammoniak; der Rückstand gab 0·2005 Grm. Barymsulfat = 26·27% Schwefelsäure (SO_3).

	Berechnet	Gefunden
Kobalt	19·58	19·20
Ammoniak	28·21	27·57
Schwefelsäure	26·59	26·27
Wasser	8·96	8·06

Chromsaures Anhydro-Oxykobaltiak. Versetzt man eine mit Salzsäure angesäuerte wässerige Lösung des salzsauren Anhydro-Oxykobaltiaks mit Kaliumbichromatlösung, so entsteht sofort ein sehr schwer löslicher Niederschlag von gelbgrüner Farbe. Zur Analyse wurde derselbe mit Wasser gut ausgewaschen und auf einer Thonplatte an freier Luft getrocknet. Wird das Salz im Luftbade über 100° erhitzt, so wird es braun und gibt

ausser Wasser auch Ammoniak ab; der Rückstand löst sich in Wasser zum Theil leicht, zum Theil schwer mit gelbrother Farbe auf.

Seine Zusammensetzung entspricht der Formel:

$$2[Co_2.(NH_3)_{10}O.OH].5Cr_2O_7+8H_2O.$$

1. 0·3175 Grm. verloren, im Luftbade bis 125° erhitzt, 0·0350 Grm. = 11·02% ; der Rückstand wurde in verdünnter Salpetersäure gelöst und die Chromsäure durch Quecksilberoxydulnitrat ausgefällt; der Niederschlag hinterliess beim Glühen 0·1285 Grm. Chromoxyd = 53·17% Chromsäure (CrO_3).
2. 0·4692 Grm. sättigten bei der Destillation mit Weinsäure und Natronlauge 10·65 CC. Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) = 18·63% Ammoniak.
3. 0·4798 Grm. wurden in einem Rohre im Luftbade mehrere Stunden auf 110° erhitzt; die entweichenden Dämpfe wurden durch einen trockenen Luftstrom erst in ein mit Kalihydratstücken gefülltes U-Rohr, dann in verdünnte Schwefelsäure (1 CC. = 0·0082088 Grm. NH_3) geleitet. Der Gewichtsverlust betrug im Ganzen 0·0510 Grm. = 10·63% die Gewichtszunahme des Kalirohr's betrug 0·0273 Grm. = 5·69% ; das entweichende Ammoniak neutralisirte 1·8 CC der Schwefelsäure = 3·08% Ammoniak; der beim Trocknen erhaltene braune Rückstand wurde mit Natronlauge destillirt, wobei 8·7 CC. Schwefelsäure gesättigt wurden, mithin waren noch 14·88% Ammoniak im Rückstande enthalten; der Ammoniakgehalt beträgt somit im Ganzen 17·96% . Der Rückstand von der Ammoniakbestimmung wurde filtrirt, das Kobaltoxydhydrat in Salzsäure gelöst und, nach Verjagung der überschüssigen Säure, durch Kaliumnitrit gefällt; der bei 100° getrocknete Niederschlag wog 0·4862 Grm. = 13·15% Kobalt.

	Berechnet	Gefunden	
Kobalt	12·61	—	13·15
Ammoniak	18·17	18·63	17·96
Chromsäure	53·71	53·17	—

In der Voraussetzung, dass das Salz bei 110° einen Gewichtsverlust erleidet, der einer Abgabe von $6H_2O+4NH_3+2O$ entspricht, sollte derselbe im Ganzen 11·12%, das Wasser 5·77% betragen; ausserdem sollten 3·63% Ammoniak entweichen und 14·54% Ammoniak im Rückstande verbleiben. Diese Zahlen stimmen in der That mit den im Versuch 3. erhaltenen zur Genüge überein.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die Oxykobaltiake entstehen unmittelbar aus den Kobaltoxydulammoniakverbindungen durch Aufnahme von Wasser und Sauerstoff; sie zerfallen durch Hitze oder in ammoniakalischer Lösung in Octaminsalze, welche durch Aufnahme von Ammoniak in Decamin- und Luteokobaltsalze übergehen. Dem Zerfalle der Oxykobaltiake scheinen somit sämmtliche Kobaltammoniumverbindungen ihre Entstehung zu verdanken.
2. Mit concentrirten Säuren geben sie rothgefärbte saure Salze, von denen das saure Sulfat das beständigste ist.
3. Mit verdünnten Säuren geben sie unter theilweiser Zersetzung grüne Salze, welche man sich als durch Wasseraustritt aus den sauren Oxykobaltiaksalzen entstanden denken kann (Anhydro-Oxykobaltiake).
4. Sowohl in den Oxykobaltiaken, als auch in den Anhydro-Oxykobaltiaken ist die Atomgruppe —O.OH anzunehmen; als Beweise für die Anwesenheit dieses Wasserstoffsuperoxydrestes führe ich die Reductionen des Kaliumpermanganats, Kaliumbichromats und Kaliumeisencyanids an.
5. In den Anhydro-Oxykobaltiaksalzen sind die Säurereste nicht in gleicher Weise mit dem Oxykobaltammonium verbunden; von den fünf Säureresten befinden sich je zwei an gleichartigen Stellen, das fünfte Radical scheint direct mit dem Kobalt verbunden zu sein.
6. Beim Erhitzen über 100° werden sämmtliche Salze unter Abgabe von Ammoniak (Wasser und Hyperoxydsauerstoff) zersetzt; am beständigsten sind die Sulfate der Anhydro-Oxykobaltiake, welche erst zwischen 130° und 170° C. Ammoniak abgeben.

7. Aus der Thatsache, dass alle diese Salze beim Erhitzen mehr oder weniger leicht 2 Molekule Ammoniak abgeben, muss man schliessen, dass in ihnen 2 Molekule Ammoniak weniger fest gebunden sind, als die übrigen 8 Molecüle; ich halte es für sehr wahrscheinlich, dass den Oxykobaltiak- und den Anhydro-Oxykobaltiaksalzen die durch folgende Formeln ausgedrückte Constitution zukommt:

Oxykobaltiaksalze	Anhydro-Oxykobaltiaksalze
(X = Rest einer einbasischen Säure)	
$-NH_3.NH_3.NH_3.X$	$-NH_3.NH_2.NH_3.X$
$Co-NH_3.NH_3.X$	$Co-NH_3.NH_3.X$
$\begin{vmatrix} -OH \\ -O.OH \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -X \\ -O.OH \end{vmatrix}$
$Co-NH_3.NH_3.X$	$Co-NH_2.NH_3.X$
$-NH_3.NH_3.NH_2.X$	$-NH_3.NH_2.NH_3.X.$

Der Übergang der Oxykobaltiaksalze in basische Octaminsalze lässt sich hiernach in folgender Weise veranschaulichen:

$$\begin{array}{l} -NH_3.NH_3.NH_2.X \\ Co-NH_3.NH_3.X \\ \left|\begin{array}{l} -OH \\ -O.OH \end{array}\right. \\ Co-NH_3.NH_2.X \\ -NH_3.NH_3.NH_3.X \end{array} = \begin{array}{l} -NH_3.NH_3.X \\ Co-NH_3.NH_3.X \\ \left|\begin{array}{l} -OH \\ -OH \end{array}\right. \\ Co-NH_3.NH_3.X \\ -NH_3.NH_2.X \end{array} + 2NH_3 + O$$

Ob diese Octaminformel den Fuskokobaltiaksalzen oder dem in dieser Arbeit erwähnten unlöslichen Sulfat zukommt, darüber hoffe ich in einer späteren Arbeit Aufschluss geben zu können.

Ich lasse zum Schlusse noch eine übesichtliche Zusammenstellung der erhaltenen Salze folgen:

I. Oxykobaltiaksalze.

Nitrat ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix} OH \\ O.OH \end{matrix}\right\}.4\,NO_3 + H_2O$

Sulfat ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix} OH \\ O.OH \end{matrix}\right\}.2\,SO_4 + 3\,H_2O$

Chlorid ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix} OH \\ O.OH \end{matrix}\right\}.Cl_4$

Jodid ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}OH\\O.OH\end{matrix}\right\}.J_4$

Saures Sulfat ..... $Co_2.(NH_3)_{10}\left\{\begin{matrix}HO\\O.OH\end{matrix}\right\}.4SO_4H$

Saures Nitrat ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}OH\\O.OH\end{matrix}\right\}4NO_3+HNO_3+2H_2O$

II. Anhydro-Oxykobaltiaksalze.

Nitrat ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}NO_3\\O.OH\end{matrix}\right\}.4NO_3+H_2O$

Chlorid ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}.Cl_4+H_2O$

Chloridnitrat ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}Cl_2.2NO_3+H_2O$

„ „ ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}.4NO_3+H_2O$

Quecksilberdoppelsalz ..... $CO_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}.Cl_4+3HgCl_2$

Platindoppelsalz ... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}.Cl_4+PtCl_4+5H_2O$

Sulfate ..... $\left\{\begin{matrix}2[Co_2.(NH_3)_{10}.OOH].5SO_4+2H_2SO_4+2H_2O\\2[Co_2.(NH_3)_{10}.OOH].5SO_4+H_2SO_4+3H_2O\\2[Co_2.(NH_3)_{10}.OOH].5SO_4+8H_2O\end{matrix}\right.$

Saures Nitratsulfat ... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}NO_3\\O.OH\end{matrix}\right\}.2SO_4+H_2SO_4+H_2O$

Chloridsulfat ..... $Co_2.(NH_3)_{10}.\left\{\begin{matrix}Cl\\O.OH\end{matrix}\right\}.2SO_4+3H_2O$

Bichromat ..... $2[Co_2.(NH_3)_{10}.OOH].5Cr_2O_7+8H_2O.$

Rationelle Verwerthung nicht steuerbarer Winkelunterschiede bei Kursbestimmungen zur See.

Von **F. Zehden**,
Capitän der Donau-Dampfschiffahrtsgesellschaft in Turn-Severin.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. April 1885.)

Es kommt in See oft vor, dass bei Kursbestimmungen Winkel gefunden werden, welche über den Kompass nicht zu steuern sind, weil sie zwischen zwei Viertelstriche fallen. Dies bezieht sich entweder auf berechnete wahre, oder den Karten entnommene magnetische Kurse, wie es auch zustösst, dass die Verbesserung um den Betrag der Local-Attraction der Magnetnadel, oder des Einflusses einer Meeresströmung solche Resultate liefert. In diesen Fällen ist man daher genöthigt, den annehmbareren der beiden zunächst liegenden Viertelstriche zu steuern, mithin das Ziel der Fahrt in Bezug auf dessen geographische Breite entweder zu weit nach Nord, oder zu weit nach Süd anzulaufen, also bewusster Weise einen nicht übereinstimmenden Kurs zu verfolgen, nachdem auch das Steuern über den Achtelstrich nicht genügt und sich nicht empfiehlt.

Wenn die zu durchsegelnde Distanz klein ist, fallen solche Differenzen nicht weiter in Betracht, aber bei grosser Distanz des Abfahrtsortes vom Bestimmungsorte ist die durch diesen Fehler hervorgerufene Divergenz der Kurslinien nicht mehr zu vernachlässigen, und gibt vor Beendigung der Reise meistens zu sehr unsicheren und ob der Nähe der Küste oft Gefahr bringenden Kurswechselungen und Verlusten an Zeit und Weg Anlass, besonders dann, wenn während der letzten Tage keine astronomischen Ortsbestimmungen gelungen sind.

Bei eingehenderer Betrachtung dieses Umstandes ist aber zu bemerken, dass es sich hiebei eigentlich weniger um einen ungenauen Kurs, als um einen ungünstigen

Abfahrtspunkt handelt; denn denkt man sich die zu steuernde Kurslinie parallel zu sich selbst so lange verschoben, bis sie mit dem Ankunftspunkte übereinfällt, und trachtete man sodann irgend einen Ort in dieser neu gelagerten Linie zu erreichen, um ihn als Abfahrtspunkt zu benützen, so würde hiedurch dem Übelstande abgeholfen sein.

In Verfolgung dieses Problemes hätte man also zur Erreichung des Ankunftspunktes zwei Kurse zu steuern, deren erster, ein Hilfskurs, erst aufzufinden wäre, während der zweite bereits bestimmt ist, oder besser ausgedrückt, man müsste auf Grundlage von Principien, welche eine arithmetische Lösung zulassen, den Abfahrtspunkt entsprechend verändern.

Es ist vorhin erwähnt worden, dass alle Punkte der parallel zu sich selbst verschobenen Kurslinie diesen verbesserten Abfahrtspunkt vorstellen können, da man von ihnen aus über den Viertelstrich den Ankunftspunkt erreichen kann. Die nothwendige Anforderung, der Aufgabe eine arithmetische Lösung zugänglich zu machen, schliesst aber die directe Rechnung der geographischen Coordinaten dieser Punkte aus, da man als Argumente, nebst den geographischen Coordinaten des ursprünglichen Abfahrtsortes, nur entweder einen gegen den Bestimmungsort gerichteten, beliebigen Kurs, oder eine kleinere Distanz, als die Entfernung des Abfahrtsortes vom Bestimmungsorte beträgt, einführen kann. Denn unter Voraussetzung der bekannten geographischen Coordinaten zweier Punkte der Erdoberfläche, deren Distanz und der Richtung der durch sie gelegten kürzesten loxodromen Linie gegen den Meridian des einen der beiden Orte in Bezug auf eine Merkator'sche Projection, erfordern die aus den mathematischen Eigenschaften einer loxodromen Linie abgeleiteten Gleichungen wenigstens die Kenntniss von vieren dieser Argumente, um die anderen beiden bestimmen zu können.

Sind nämlich φ λ und φ_1 λ_1 die geographischen Breiten und Längen der beiden Orte, ε der Neigungswinkel einer durch sie gelegten loxodromen Linie gegen den Meridian eines der beiden Orte und d ihre über diese Linie gemessene Distanz auf eine Merkator'sche Projection bezogen, so ist, wenn $\Delta\omega$ den Unterschied der wachsenden Breiten vorstellt,

$$\Delta\varphi = d\cos\varepsilon \text{ und}$$
$$\Delta\lambda = \Delta\omega\,\mathrm{tg}\,\varepsilon.$$

Die Kenntniss von ε oder d allein reicht also zur Bestimmung von φ, und λ,, welches die geographischen Coordinaten des verbesserten Abfahrtspunktes sein sollen, nicht aus.

Eine nicht wesentliche Complication der Rechnung ermöglicht es aber, in der noch nicht verschobenen Kurslinie einen Punkt (φ_n λ_n) feststellen zu können, welcher mit dem verbesserten Abfahrtspunkte in Bezug der beabsichtigten Erreichung des Bestimmungsortes (φ,, λ,,) in einer analogen Relation steht, sobald dieser Punkt die vierte Ecke eines zwischen den verschobenen Kurslinien, dem ursprünglichen und verbesserten Abfahrtspunkte (φ λ und φ, λ,) und dem Bestimmungsorte bestehenden Parallelogrammes vorstellt. Denn seine Distanz vom Bestimmungsorte und der zwischen beiden einzuhaltende Kurs gelten als die zur Erreichung des verbesserten Abfahrtspunktes gesuchten Elemente, weil letztere die den ersteren gegenüberliegende Seite des gedachten Parallelogrammes bedeuten.

Nimmt man daher von φ und λ aus auf der noch nicht verschobenen Kurslinie, deren bekannte Richtung gegen den Meridian ε sei, eine Distanz d an, welche kleiner als die Distanz zwischen φ λ und φ,, λ,, sein müsste, so erhält man aus den Gleichungen:

$$\Delta\varphi = d\cos\varepsilon \text{ und}$$
$$\Delta\lambda = \Delta\omega\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$$

φ_n und λ_n. Nunmehr rechnet man aus:

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon, = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\omega} \text{ und}$$

$$d, = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varepsilon,} \text{ den zwischen}$$

φ_n λ_n und φ,, λ,, bestehenden Kurs ε, und deren Distanz d,, welche beiden Grössen man hierauf vom ursprünglichen Abfahrtsorte zur Erreichung des verbesserten benützen kann, so als ob man dieselben direct von Ersterem aus gerechnet hätte.

Beispiel: Ein Schiff soll von 36°5' Nordbreite und 32°4' Länge Ost von Ferro den Punkt 36°20' Nordbreite und 40°8' östlicher Länge erreichen. Durch Beobachtung eines Azimuthes der Sonne ist die örtliche Declination der Magnetnadel 14° West gefunden worden.

Zur Bestimmung des zwischen den beiden Orten einzuhaltenden wahren Kurses E und deren Distanz D sind daher die Angaben folgende:

$\varphi = 36°\ 5'$ N $\qquad \varphi_{,,} = 36°20'$ N

$\lambda = 32°\ 4'$ O v. F. $\qquad \lambda_{,,} = 40°\ 8'$ O v. F.

Mithin ist, weil

$$\operatorname{tg} E = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\omega} \text{ und}$$

$$D = \frac{\Delta\varphi}{\cos E} \text{ ist}$$

$\Delta\varphi = 0°15' \qquad \Delta\lambda = 8°\ 4' = 484'.$

Für 36° 5' ist die wachsende Breite $\omega = 2324 \cdot 2'$

„ 36 20 „ „ „ „ $\omega_{,,} = 2342 \cdot 8'$

Für D: also $\Delta\omega = 18 \cdot 6'$

$\log \Delta\varphi = 1 \cdot 17609 \qquad \log \Delta\lambda = 2 \cdot 68485$

$\log \cos E = 8 \cdot 58419 \qquad \log \Delta\omega = 1 \cdot 26951$

$\log D = 2 \cdot 59190 \qquad \log \operatorname{tg} E = 1 \cdot 41534$

$D = 397 \cdot 5^{sm} \qquad E = 87°\ 48'$

Wahrer Kurs $= N + 87°48'$

Declination der Magnetnadel $= (\mp)\ 14°$

Entsprechender magnetischer Kurs $= N + 101°48'$

„ „ $= S - 78°12'$

Local-Attraction der Magnetnadel $= (\pm)\ 2°$

Kompasskurs $= S - 80°12'$

Dieser Kurs fällt aber zwischen die steuerbaren Viertelstriche $O^3/_4 S$ und $Oz S$.

$O^3/_4 S = S - 81°34'$

$Oz S = S - 78\ 45.$

Die Differenz gegen ersteren Kurs beträgt 1°22' und gegen letzteren 1°27'. Nachdem die geographische Position derartig ist, dass es wünschenswerther erscheint, Kap Matapan seewärts zu erreichen, hat man den Kurs OzS zu wählen, also den Kiel des Schiffes gegen den Meridian in einem Winkel zu erhalten, welcher um 1°27' mit dem durch Rechnung gefundenen wahren Kurse E differirt.

Diesem misslichen Umstande gegenüger läge nunmehr die Aufgabe vor, den Abfahrtspunkt entsprechend den Eingangs entwickelten Erläuterungen derart zu verändern, dass der gewählte Kompasskurs den Bestimmungsort genau vor den Bug des Schiffes bringe.

Hätte man daher diesen Vorgang angenommen, so kann man bezüglich der Wahl eines der beiden zunächst gelegenen Viertelstriche bei freier See alle maritimen Rücksichten bei Seite lassen, und stets den näher gelegenen benützen, da der Erfolg der Untersuchung der gleiche sein soll. Man würde daher in diesem Falle nicht OzS, sondern $O^3/_4 S$ steuern.

Der dem Kompasskurse $O^3/_4 S$ entsprechende wahre Kurs ist, von Nord aus gezählt, um 1°22' kleiner als E und beträgt mithin $N + 86°26'$. Dies ist die Kurslinie, welche man sich parallel zu sich selbst so lange verschoben zu denken hätte, bis sie mit dem Punkte $\varphi_{,,}$ $\lambda_{,,}$ zusammenfällt. Auf dieser Linie hat man daher auch durch Annahme einer beliebigen Distanz d, wobei aber $d < D$ sein müsste, die geographischen Coordinaten des Punktes φ_n λ_n zu rechnen.

Würde d etwa 250^{sm} angenommen, so erhielte man zur Bestimmung von φ_n λ_n, wenn ε den über dem näher gelegenen Viertelstriche gewählten Kurs und $\Delta\omega$ wieder den Unterschied der wachsenden Breiten von φ und φ_n vorstellt:

$$\Delta\varphi = d \cos \varepsilon$$
$$\Delta\lambda = \Delta\omega \operatorname{tg} \varepsilon$$

$d = 250^{sm}$

$$\varepsilon = 86°26'$$
$$\log d = 2{\cdot}39794$$
$$\log \cos \varepsilon = 8{\cdot}79386$$
$$\log \Delta\varphi = 1{\cdot}19180$$
$$\Delta\varphi = 15{\cdot}5'$$

Abfahrtsbreite

$$\varphi = 36°5' \qquad \omega = 2324\cdot2$$
$$\Delta\varphi = 0\ 15\cdot5$$
$$\varphi_n = 36°20\cdot5 \qquad \omega_n = 2343\cdot4$$
$$\Delta\omega = 19\cdot2$$
$$\log\Delta\omega = 1\cdot28330$$
$$\log\operatorname{tg}\varepsilon = 1\cdot20530$$
$$\log\Delta\lambda = 2\cdot48860$$
$$\Delta\lambda = 308\cdot2 = 5°8\cdot2'$$

Abfahrtslänge

$$\lambda = 32°4'$$
$$\Delta\lambda = 5\ 8\cdot2$$
$$\lambda_n = 37°12'2$$

Aus φ_n λ_n und $\varphi_{,,}$ $\lambda_{,,}$ kann man nunmehr nach den Gleichungen

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{,} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\omega} \text{ und}$$

$$d_{,} = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varepsilon_{,}}$$

den zwischen diesen beiden Punkten bestehenden wahren Kurs $\varepsilon_{,}$ und deren Distanz $d_{,}$ ermitteln.

Es ist:

$$\lambda_n = 37°12\cdot2'$$
$$\lambda_{,,} = 40\ \ 8\cdot0$$
$$\Delta\lambda = 2\ 55\cdot8$$

$$\varphi_n = 36°20'5 \qquad \omega_n = 2343\cdot4$$
$$\varphi_{,,} = 36°20\cdot0 \qquad \omega_{,,} = 2342\cdot8$$
$$\Delta\varphi = 0\ \ 0\cdot5 \qquad \Delta\omega = 0\cdot6$$

$$\log\Delta\lambda = 2\cdot24502$$
$$\log\Delta\omega = 0\cdot07781$$
$$\log\operatorname{tg}\varepsilon_{,} = 2\cdot16721$$
$$\varepsilon_{,} = 89°36'$$

Da $\varphi_n > \varphi_{,,}$ muss dieser Winkel von Süd nach Ost gezählt werden, daher

Wahrer Kurs	$= S - 89°\ 36'$
Declination der Magnetnadel	$= (\mp)\ 14°$
Magnetischer Kurs	$= S - 75°\ 36'$
Hiefür die Local-Attraction	$= (\pm)\ 3$
Kompasskurs	$= S - 78°\ 36'$
„	$= \underline{\underline{0 z S}}$

Für die Distanz d, erhält man:

$$\log \Delta\varphi = 0 \cdot 06989$$
$$\log \cos \varepsilon, = 7 \cdot 84393$$
$$\log d, = 2 \cdot 22596$$
$$d, = \underline{\underline{168 \cdot 2^{sm}}}$$

Es liefert mithin für das vorliegende Beispiel die Rechnung das Resultat, dass man vom ursprünglichen Abfahrtsorte zuerst im Kompasskurse $0 z S$ $168 \cdot 2^{sm}$ zurückzulegen hätte, worauf man über den Kurs $0\ ^3/_4\ S$, unter Zurücklegung der angenommenen Distanz von 250^{sm} den Bestimmungsort genau anlaufen kann.

Dadurch, dass es nicht möglich ist den Kurs E zu steuern, und man den Bestimmungsort unter Einhaltung der Kurse ε und ε_1 zu erreichen trachtet, verliert das Schiff immerhin noch an Weg. Denn $d + d_1$ ist im Allgemeinen grösser als D, und zwar beträgt die Differenz in diesem Falle $20 \cdot 7^{sm}$. Auf einem Dampfer hat man sich aber möglichst zu bemühen an Weg zu ersparen, daher man für ε und ε_1 jene Kurslinien wählen würde, deren Richtungsunterschied einem geraden Winkel am nächsten liegt. Dies träfe mit ausreichender Genauigkeit für jenen Punkt der zu verschiebenden Kurslinie zu, dessen Länge $\lambda_n = \frac{\lambda + \lambda_{,,}}{2}$ ist. Unter dieser, die Lösung des Problemes verbessernden Voraussetzung wäre aber die vom ursprünglichen Abfahrtspunkte aus zu berücksichtigende Distanz nicht mehr willkürlich anzunehmen, sondern durch die Kenntniss von λ_n bereits bestimmt. Es würde sich daher bei Beginn der Rechnung nicht mehr darum handeln φ_n und λ_n aufzufinden, sondern φ_n und d.

$$\left(\Delta\omega = \frac{\Delta\lambda}{\operatorname{tg} \varepsilon} \text{ und } d = \frac{\Delta\varphi}{\cos \varepsilon}\right)$$

Hierauf hätte man so wie früher aus φ_n λ_n und $\varphi_{,,}$ $\lambda_{,,}$ d, und ε, festzustellen.

Die sichere Führung des Schiffes lässt es jedoch am annehmbarsten erscheinen, die verschobene Kurslinie möglichst rasch zu erreichen. Je geringer die Distanz des ursprünglichen Abfahrtsortes vom verbesserten ist, um so genauer lässt sich die Ankunft an letzterem, also der Ort des Kurswechsels ermitteln, und umso weniger ist man auch der Gefahr ausgesetzt, bei der Bestimmung von ε, ähnlichen Übelständen zu begegnen, als es bei der Rechnung von E der Fall war.

Das lohnendste Bemühen nach dieser Richtung wäre es jedenfalls $d = D$ anzunehmen, und auf Grundlage dieser Annahme φ_n, λ_n, d, und ε, festzustellen. d, bezeichnete sodann nahezu die Anzahl Seemeilen, um welche die über den steuerbaren Viertelstrich weisende Kurslinie verschoben wurde, daher auch nahezu den unterlaufenden Fehler und den kürzesten Weg zur Erreichung des verbesserten Abfahrtspunktes. Ferners verbindet sich hiemit der wichtige Vortheil, dass d, stets so klein erscheinen wird, um bei Kursen, welche nahe bei Nord, oder nahe bei Süd liegen, zu keinerlei Correction gezwungen zu sein, und dass für das Schiff aus dieser werthvollen Annahme sehr nahe der geringste Verlust an Weg und Zeit resultirt.

Das Beispiel müsste sich also folgend gestalten:

$$\varphi = 36^\circ\ 5'\ N$$
$$\lambda = 32\ \ 4\ \ O$$
$$\varepsilon = N + 86^\circ\ 26'$$
$$d = D = 397 \cdot 5^{sm}$$
$$\Delta\varphi = d \cos \varepsilon$$
$$\Delta\lambda = \Delta\omega \operatorname{tg} \varepsilon.$$

$$\log d = 2 \cdot 59934$$
$$\log \cos \varepsilon = \underline{8 \cdot 79386}$$
$$\log \Delta\varphi = 1 \cdot 39320$$
$$\Delta\varphi = 24 \cdot 7'$$
$$\omega = 2324 \cdot 2$$

$$\varphi = 36^\circ\ \ 5'$$
$$\Delta\varphi = \ \ 0\ \ 24 \cdot 7$$
$$\varphi_n = 36\ \ 29 \cdot 7$$

$$\omega_n = 2353 \cdot 9$$
$$\Delta\omega = \ \ 29 \cdot 7$$

$$\log\Delta\omega = 1{\cdot}47276$$
$$\log \operatorname{tg}\varepsilon = \underline{1{\cdot}20530}$$
$$\log\Delta\lambda = 2{\cdot}67806$$
$$\Delta\lambda = 476{\cdot}5' = 7^\circ\ 56{\cdot}5'$$

$$\lambda = 32^\circ\ 4'$$
$$\Delta\lambda = +\ 7\ 56{\cdot}5$$
$$\lambda_n = \underline{\underline{40^\circ\ 0{\cdot}5}}$$

Zur Rechnung von ε, und d, erhält man mithin aus $\varphi_n\ \lambda_n$ und $\varphi_{,,}\ \lambda_{,,}$ nach den Gleichungen

$$\operatorname{tg}\varepsilon, = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\omega} \text{ und}$$

$$d, = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varepsilon,}$$

$$\lambda_n = 40^\circ\ 0{\cdot}5'$$
$$\lambda_{,,} = \underline{40\ \ 8{\cdot}0}$$
$$\Delta\lambda = 0\ \ 7{\cdot}5'$$
$$\varphi_n = 46^\circ\ 29{\cdot}7'$$
$$\varphi_{,,} = \underline{36^\circ\ 20{\cdot}0}$$
$$\Delta\varphi = 0\ \ 9{\cdot}7$$

$$\omega_n = 2354{\cdot}8$$
$$\omega_{,,} = \underline{2342{\cdot}8}$$
$$\Delta\omega = 12{\cdot}0$$
$$\log\Delta\lambda = 0{\cdot}87506$$
$$\log\Delta\omega = \underline{1{\cdot}07918}$$
$$\log \operatorname{tg}\varepsilon, = 9{\cdot}79588$$
$$-\varepsilon, = 32^\circ\ 0'$$

Weil $\varphi_n > \varphi_{,,}$ hat man diesen Kurs von Süd nach Ost zu zählen. Daher:

Wahrer Kurs	$= S - 32^\circ\ 0'$
Declination der Magnetnadel	$= (\mp)\ 14\ \ 0$
Magnetischer Kurs	$= S - 18^\circ\ 0'$
Hiefür die Local-Attraction	$= (\mp)\ 2^\circ$
Kompasskurs	$= S - 16^\circ\ 0$
„	$= \underline{\underline{S\,z\,O\,{}^1/_2\,O}}$

Ferner zur Rechnung von $d_,$:

$$\begin{aligned} \log \Delta\varphi &= 0{\cdot}98677 \\ \log \cos \varepsilon_, &= 9{\cdot}92842 \\ \log d_, &= 1{\cdot}05835 \\ d_, &= 11{\cdot}4^{sm} \end{aligned}$$

Der Dampfer hätte also zuerst vom ursprünglichen Abfahrtsorte aus im Kompasskurse $Sz\,O\,{}^1/_2\,O$ $11{\cdot}4^{sm}$ zu durchlaufen, worauf er im Kompasskurse $O\,{}^3/_4\,S$ den $397{\cdot}5^{sm}$ entfernten Bestimmungsort genau vor den Bug bekommt.

In dieser letzten Fassung rührt das vorliegende Beispiel von einem Versuche her, welchen ich zur Erprobung des Problemes Anfangs December 1884 zwischen den Feuern von Gozo und Kap Matapan mit dem zutreffendsten Erfolge unternommen habe.

Man versichert sich daher durch diesen Vorgang im wahren Sinne selbst der Bogenminute des Kompasses, obwohl dieselbe weder anschaulich gemacht, noch gesteuert werden kann, hiebei die Kurse auf den bequemen Viertelstrich beziehend.

Aus allem Vorstehenden ist zu bemerken, dass auch eine graphische Lösung der Aufgabe ermöglicht ist. Man verbindet nämlich den Abfahrtsort mit dem Bestimmungsorte durch eine gerade Linie, deren Richtung gegen den Meridian des Abfahrtsortes der wahre Kurs (E) ist, welcher zwischen denselben einzuhalten wäre, wenn die in den Karten verzeichneten Windrosen rechtweisende, und der magnetische, wenn die Windrosen missweisende sind. Ist hierauf der entfallende Kompasskurs und dessen nicht steuerbarer Winkelunterschied mit dem nächsten Viertelstriche festgestellt, so trägt man vom Abfahrtsorte eine zweite Kurslinie auf, welche um diesen nicht steuerbaren Winkelunterschied von der ersteren abweicht. Auf dieser zweiten Linie misst man sodann d ab, wodurch der Punkt $\varphi_n\ \lambda_n$ gefunden wird. Verbindet man hierauf $\varphi_n\ \lambda_n$ mit $\varphi_{,,}\ \lambda_{,,}$ wieder durch eine gerade Linie, so gibt dieselbe die Richtung ε, und den Weg d, jenes Kurses an, welcher vom ursprünglichen Abfahrtsorte aus gesteuert werden muss, um den verbesserten zu erreichen. Dieser Hilfskurs ist natürlich auch, wie früher gezeigt wurde, in den entsprechenden Kompasskurs zu verwandeln.

Arithmetische Notiz.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

Bezeichnet man die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl α, welche ihr nach dem Modul k congruent sind und einen complementären Divisor besitzen, der nach demselben Modul der positiven Einheit congruent ist, mit $A_0(\alpha)$, so besteht, wie eine einfache Rechnung ergibt, die Gleichung:

$$1) \quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sum_{x=1}^{x=\sigma} \left[\frac{(k-1)x+\sigma-\rho}{kx-\rho}\right] \quad (\rho < k).$$

Es sei nun α_λ die Anzahl derjenigen Werthe von x, für welche:

$$\left[\frac{(k-1)x+\sigma-\rho}{kx-\rho}\right] = \lambda \qquad \text{ist.}$$

Alsdann sind die sämmtlichen Werthe von x, für welche λ gleich 1 ist:

$$x = \sigma, \sigma-1, \sigma-2, \ldots, \sigma-\alpha_1+1$$

und man hat daher die Relationen:

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1+1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1+1)-\rho} < 2$$

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1)-\rho} \geq 2,$$

aus welchen folgt:

$$\sigma-\alpha_1 \leqq \frac{\sigma+\rho}{k+1} < \sigma-\alpha_1+1$$

und daher ist:

$$\alpha_1 = \sigma - \left[\frac{\sigma+\rho}{k+1}\right].$$

Es ist ferner:

$$\left[\frac{(k-1)x+\sigma-\rho}{kx-\rho}\right] = 2$$

für:

$$x = \sigma-\alpha_1,\ \sigma-\alpha_1-1,\ \sigma-\alpha_1-2,\ldots,\ \sigma-\alpha_1-\alpha_2+1$$

während diese ganze Zahl für:

$$x = \sigma-\alpha_1-\alpha_2$$

den Werth 3 erhält, und daher hat man die Beziehungen:

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2+1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2+1)-\rho} < 3$$

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2)-\rho} \geqq 3$$

oder auch:

$$\sigma-\alpha_1-\alpha_2 \leqq \frac{\sigma+2\rho}{2k+1} < \sigma-\alpha_1-\alpha_2+1.$$

Aus dieser Relation folgt:

$$\sigma-\alpha_1-\alpha_2 = \left[\frac{\sigma+2\rho}{2k+1}\right].$$

und daher ist:

$$\alpha_2 = \left[\frac{\sigma+\rho}{k+1}\right] - \left[\frac{\sigma+2\rho}{2k+1}\right].$$

Es sei nun:

$$2)\quad \alpha_\lambda = \left[\frac{\sigma+(\lambda-1)\rho}{(\lambda-1)k+1}\right] - \left[\frac{\sigma+\lambda\rho}{\lambda k+1}\right]$$

für:

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \lambda_1.$$

Zur Bestimmung von α_{λ_1+1} hat man die Relationen:

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1}+1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1}+1)-\rho} < \lambda_1+1$$

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1})-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1})-\rho} \geqq \lambda_1+1$$

also:

$$\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1} \leqq \frac{\sigma+(\lambda_1+1)\rho}{(\lambda_1+1)k+1} < \sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1}+1$$

aus welcher Relation folgt:

$$\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1} = \left[\frac{\sigma+(\lambda_1+1)\rho}{(\lambda_1+1)k+1}\right]$$

und daher ist:

$$\alpha_{\lambda_1+1} = \left[\frac{\sigma+\lambda_1\rho}{\lambda_1 k+1}\right] - \left[\frac{\sigma+(\lambda_1+1)\rho}{(\lambda_1+1)k+1}\right].$$

Da die Relation 2) für $\lambda = 1, 2$ bewiesen wurde, so gilt sie allgemein. Nun ist der grösste Werth, welchen die erwähnten ganzen Zahlen annehmen können:

$$3) \quad \left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right] + 1 = \tau$$

Derselbe wird für:

$$\alpha_\tau = \left[\frac{\sigma+(\tau-1)\rho}{(\tau-1)k+1}\right] - \left[\frac{\sigma+\tau\rho}{\tau k+1}\right]$$

Werthe von x angenommen.

Aus der Gleichung 3) folgt aber:

$$\tau+1 > \frac{\sigma-1}{k-\rho} + 1 \geqq \tau$$

und daher ist:

$$\tau k+1 > \sigma+\tau\rho$$

also:

$$\left[\frac{\sigma+\tau\rho}{\tau k+1}\right] = 0.$$

Die Gleichung 1) verwandelt sich demnach in die folgende:

$$4) \quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sigma + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right]} \left[\frac{\rho x+\sigma}{kx+1}\right].$$

Man kann diese Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sigma + \left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right]} \left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1}\right].$$

Ist $\tau-\tau_1$ die Anzahl derjenigen Werthe von x, für welche:

$$\left[\frac{\sigma-(k-\rho)x-1}{kx+1}\right] = 0$$

wird, so bestehen die Relationen:

$$\frac{\sigma-(k-\rho)\tau_1-1}{k\tau_1+1} < 1$$

$$\frac{\sigma-(k-\rho)(\tau_1-1)-1}{k(\tau_1-1)+1} \geq 1$$

so ist:

$$\tau_1-1 \leq \frac{\sigma-2}{2k-\rho} < \tau_1$$

Aus welcher Relation folgt:

$$\tau_1-1 = \left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho}\right].$$

Man kann daher die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$5)\quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sigma + \left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho}\right]} \left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1}\right].$$

Nun ist:

$$\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right] = \left[\frac{\sigma-2}{k-\rho}\right] + \varepsilon$$

wo ε den Werth $+1$ oder 0 hat, je nachdem:

$$\sigma \equiv 1 \,(\mathrm{mod}.(k-\rho))$$

und daher:

$$k\sigma-\rho \equiv 0 \,(\mathrm{mod}.(k-\rho))$$

ist, oder nicht.

Es ist ferner:

$$\left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho}\right] = \left[\frac{\sigma-3}{2k-\rho}\right] + \eta$$

wo η den Werth $+1$ oder 0 besitzt, je nachdem σ der Congruenz:

$$\sigma \equiv 2 \,(\mathrm{mod.}\,(2k-\rho))$$

und daher $k\sigma-\rho$ der Congruenz:

$$k\sigma-\rho \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}(2k-\rho))$$

genügt, oder nicht.

Schreibt man nun in den Gleichungen 4) und 5) für $\sigma : \sigma-1$ und subtrahirt die dadurch entstehenden Gleichungen von den ursprünglichen, so ergeben sich die Formeln:

$$6)\quad A_0(k\sigma-\rho) = 1+\varepsilon+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{k-\rho}\right]} \left\{\left[\frac{\rho x+\sigma}{kx+1}\right]-\left[\frac{\rho x+\sigma-1}{kx+1}\right]\right\}$$

$$7)\quad A_0(k\sigma-\rho) = 1+\varepsilon+\eta+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-3}{2k-\rho}\right]} \left\{\left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1}\right]-\left[\frac{\sigma-2-(k-\rho)x}{kx+1}\right]\right\}.$$

Setzt man in den Formeln 4), 5), 6) und 7):

$$k=2,\ \rho=1$$

so erhält man die speciellen Relationen:

$$8)\quad \sum_{x=1}^{x=\sigma}\psi(2x-1) = \sigma+\sum_{x=1}^{x=\sigma-1}\left[\frac{x+\sigma}{2x+1}\right]$$

$$9)\quad \sum_{x=1}^{x=\sigma}\psi(2x-1) = 2\sigma-1+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{3}\right]}\left[\frac{\sigma-1-x}{2x+1}\right]$$

$$10)\quad \psi(2\sigma-1) = 2+\sum_{x=1}^{x=\sigma-2}\left\{\left[\frac{x+\sigma}{2x+1}\right]-\left[\frac{x+\sigma-1}{2x+1}\right]\right\}$$

$$11)\quad \psi(2\sigma-1) = 2+\eta+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma}{3}\right]-1}\left\{\left[\frac{\sigma-1-x}{2x+1}\right]-\left[\frac{\sigma-2-x}{2x+1}\right]\right\}$$

wo η den Werth $+1$ oder 0 hat, je nachdem $2\sigma-1$ durch 3 theilbar ist oder nicht und $\psi(\alpha)$ die Anzahl der Divisoren der Zahl α bezeichnet. Die speciellen Formeln 9) und 11) hat schon Herr V. Buniakowsky mitgetheilt.

Von den in den aufgestellten Gleichungen enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders hervorgehoben werden:

Wenn für alle Werthe von x, welche nicht grösser als $\left[\frac{\alpha-k}{k(k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ sind:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]=\left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist, so besitzt die nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente Zahl α ausser α höchstens einen ihr nach dem Modul k congruenten Theiler mit complementärem Divisor von der Form $k\lambda+1$, nämlich $k-\rho$.

Wenn für alle Werthe von x, welche nicht grösser als $\left[\frac{\alpha-k}{k(2k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ sind:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]=\left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist, so besitzt die nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente Zahl α ausser α höchstens zwei ihr nach dem Modul k congruente Theiler mit complementärem Divisor von der Form $k\lambda+1$, nämlich $k-\rho$ und $2k-\rho$.

Eine nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente, durch $k-\rho$ nicht theilbare Zahl α ist keine Primzahl, wenn auch nur für einen $\left[\frac{\alpha-k}{k(k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ nicht übersteigenden Werth von x:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]>\left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist.

Eine nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente, weder durch $k-\rho$ noch durch $2k-\rho$ theilbare Zahl ist keine Primzahl, wenn auch nur für einen $\left[\frac{\alpha-k}{k(2k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ nicht übersteigenden Werth von x:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]>\left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist.

Eine ungerade Zahl α ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-3}{2}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\alpha-2}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right]$$

ist.

Eine durch 3 nicht theilbare ungerade Zahl α ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-5}{6}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\alpha-2}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right]$$

ist.

Eine ungerade Zahl α von der Form $3n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-5}{6}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{\alpha-3}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right]$$

ist.

Eine durch 5 nicht theilbare ungerade Zahl α von der Form $3n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-8}{15}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{\alpha-3}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right]$$

ist.

Eine durch 3 nicht theilbare Zahl α von der Form $4n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-7}{12}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]=\left[\frac{\alpha-4}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]$$

ist.

Eine weder durch 3 noch durch 7 theilbare Zahl von der Form $4n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-11}{28}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]=\left[\frac{\alpha-4}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]$$

ist.

Seite

Eder, Spectrographische Untersuchung von Normal-Lichtquellen und die Brauchbarkeit der letzteren zu photochemischen Messungen der Lichtempfindlichkeit. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1097

XII. Sitzung vom 15. Mai 1885: Übersicht 1103

Linnemann, Das Oxydationsproduct des Propylenoxydes durch Silberoxyd. 1107

Goldschmiedt, Untersuchungen über Papaverin. I. Abhandlung 1110

Vortmann, Beiträge zur Kenntniss der Kobaltammoniumverbindungen 1142

Zehden, Rationelle Verwerthung nicht steuerbarer Winkelunterschiede bei Kursbestimmungen zur See. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1184

Gegenbauer, Arithmetische Notiz. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . 1194

Preis des ganzen Heftes: 4 fl. = 8 RMk.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Palaeontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

DUE AUG 31 1916

DUE JUN 1 1922

DUE MAR 15 1929

MIT 8/8/46

Widener Library
2044 090 836 859